

## Towards an Application of the Multifractal Analysis to Econophysics

筑波大学 物理学系  
横浜国立大学 院環境情報

有光敏彦 (ARIMITSU, Toshihico)  
有光直子 (ARIMITSU, Naoko)

### I. INTRODUCTION

乱流のマルチフラクタル解析とは、Tsallis 型分布関数 [1,2] に基づいて構築された、大偏差系を扱うための系統的で自己無撞着な統計力学的方法である [3]- [5]。Tsallis 型分布関数は、適切な条件下で示量的 Rényi エントロピー [6] かあるいは非示量的 Tsallis エントロピー [1,2,7] の極値を与える定常分布である。この解析法は、高 Reynolds 数における Navier-Stokes 方程式のスケール変換不変性と、この不変性に起因する特異点が実空間にマルチフラクタル分布しているという仮定に基づいている。なお、マルチフラクタル解析は、対数正規モデル [8]- [10] を一般化したものととらえることもできる。実際、Boltzmann-Gibbs エントロピーに基づいてマルチフラクタル解析を行うと、対数正規モデルが導かれる。

本論文では、発達乱流中の各種の確率密度関数 (PDF) の理論的表式を導き、実験で得られた PDF を解析する。

乱流粘性に比べて動粘性  $\nu$  の影響が無視できる高 Reynolds 数  $Re \gg 1$  では、スケール変換  $\vec{r} \rightarrow \lambda \vec{r}$ ,  $\vec{u} \rightarrow \lambda^{\alpha/3} \vec{u}$ ,  $t \rightarrow \lambda^{1-\alpha/3} t$ ,  $(p/\rho) \rightarrow \lambda^{2\alpha/3} (p/\rho)$  に対して、非圧縮流体を記述する Navier-Stokes 方程式  $\partial \vec{u} / \partial t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla (p/\rho) + \nu \nabla^2 \vec{u}$  は不変である [11,12]。指数  $\alpha$  は任意の実数である。 $\rho$  と  $p$  は、それぞれ質量密度と圧力である。この系の Reynolds 数  $Re$  は、 $Re = \delta u_{in} l_{in} / \nu = (l_{in} / \eta)^{4/3}$  で与えられる。 $\eta = (\nu^3 / \epsilon)^{1/4}$  は Kolmogorov 長 [13]、 $\epsilon$  は流入スケール  $l_{in}$  へのエネルギー流入率である。距離  $l_n$  離れた 2 点間での流速場  $\vec{u}$  の 1 成分  $u$  の揺らぎ  $\delta u_n = |u(\bullet + l_n) - u(\bullet)|$  が速度揺らぎの定義であるが、これを利用して  $\delta u_{in} = |u(\bullet + l_{in}) - u(\bullet)|$  を導入した。距離の測定は、離散的な単位  $l_n = \delta_n l_0$  で行なう。ただし、 $\delta_n = 2^{-n}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) である。非負の整数  $n$  をマルチフラクタル深度<sup>1</sup> と

<sup>1</sup>マルチフラクタル深度  $n$  は、エネルギーカスケードモデルにおけるステップ数と関係付けられる。カスケード

称する。なお、実験の解析ではこれを正の実数として扱う。

### II. マルティフラクタル解析

マルチフラクタル解析の本質は、特異性指数  $\alpha$  にマルチフラクタル分布を仮定するところにある。実空間の 1 点で指数  $\alpha$  の値を  $\alpha \sim \alpha + d\alpha$  の範囲に見つける確率  $P^{(n)}(\alpha) d\alpha$  は、分布

$$P^{(n)}(\alpha) = [1 - (\alpha - \alpha_0)^2 / (\Delta\alpha)^2]^{n/(1-q)} / Z_\alpha^{(n)} \quad (1)$$

で与えられるとする [4]。 $Z_\alpha^{(n)}$  は分配関数である。ただし、 $(\Delta\alpha)^2 = 2X / [(1-q) \ln 2]$  とおいた。 $\alpha$  の範囲は  $\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$  である。ここで、 $\alpha_{min} = \alpha_0 - \Delta\alpha$ ,  $\alpha_{max} = \alpha_0 + \Delta\alpha$  とした。マルチフラクタル・スペクトル  $f(\alpha)$  は、

$$f(\alpha) = 1 + (1-q)^{-1} \log_2 [1 - (\alpha - \alpha_0)^2 / (\Delta\alpha)^2] \quad (2)$$

で与えられる [4]。エントロピーが示量的か非示量的であるかにかかわらず、その極値を与える分布関数  $P^{(n)}(\alpha)$  は、同じ構造を持っている<sup>2</sup>。

間欠性指数  $\mu$  の値が与えられると、パラメータ  $\alpha_0$ ,  $X$ ,  $q$  は 3 つの条件式より自己無撞着に決定される。3 つの条件式は、エネルギーの保存:  $\langle \epsilon_n \rangle = \epsilon$ , 間欠性指数  $\mu$  の定義:  $\langle \epsilon_n^2 \rangle = \epsilon^2 \delta_n^{-\mu}$ , スケーリング則<sup>3</sup>:  $1/(1-q) = 1/\alpha_- - 1/\alpha_+$  で与えられる。

ドの各ステップ ( $n$  番目のステップと呼ぶ) で渦は 2 個に分裂するが、それにより、 $n$  ステップ目では単位質量あたりのエネルギー輸送率  $\epsilon_n$  で、サイズ  $l_n$  の渦からサイズ  $l_{n+1}$  の渦へエネルギーが受け渡される。エネルギー散逸率は、 $\alpha < 1$  における  $n \rightarrow \infty$  の極限で特異性を持つ:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n / \epsilon_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (l_n / l_0)^{\alpha-1} \rightarrow \infty$

<sup>2</sup>本論文における表式では、乱流の背景となるエントロピーがいずれであるかを決定することはできない。

<sup>3</sup>文献 [14,15] で初めて導かれたものをマルチフラクタル・スペクトル  $f(\alpha)$  が負値をとる場合へ拡張したものである。

ただし,  $\alpha_{\pm}$  は  $f(\alpha_{\pm}) = 0$  を満たす。平均  $\langle \dots \rangle$  は  $P^{(n)}(\alpha)$  でとるものとする。

物理量  $x_n$  の値を  $x_n \sim x_n + dx_n$  の範囲に見つける確率  $\Pi_{\phi}^{(n)}(x_n)dx_n$  は,  $\Pi_{\phi}^{(n)}(x_n)dx_n = \Pi_{\phi,S}^{(n)}(x_n)dx_n + \Delta\Pi_{\phi}^{(n)}(x_n)dx_n$  で与えられる。ただし, 規格化を  $\int_{-\infty}^{\infty} dx_n \Pi_{\phi}^{(n)}(x_n) = 1$  で与える。第1項は, 特異点が実空間にマルチフラクタル分布しているという仮定によるもので, 物理量  $x_n$  の異常部分からの寄与を記述している。これは, 変数変換  $|x_n| = \delta_n^{\phi\alpha/3}$  を通じて  $\Pi_{\phi,S}^{(n)}(|x_n|)dx_n \propto P^{(n)}(\alpha)d\alpha$  で与えられる。他方, 第2項  $\Delta\Pi_{\phi}^{(n)}(x_n)dx_n$  は, Navier-Stokes 方程式における散逸項や測定誤差による寄与を記述している。散逸項はスケール変換に基づく不変性を破るので, 上記の特異性の分布に対する考察では無視されていた。第2項は, 第1項への補正項である。

変数  $|x_n|$  の  $m$  次モーメントは,

$$\begin{aligned} \langle |x_n|^m \rangle_{\phi} &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx_n |x_n|^m \Pi_{\phi}^{(n)}(x_n) \\ &= 2\gamma_{\phi,m}^{(n)} + (1 - 2\gamma_{\phi,0}^{(n)})a_{\phi m} \delta_n^{\zeta_{\phi m}} \end{aligned} \quad (3)$$

で与えられる。ただし,

$$2\gamma_{\phi,m}^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_n |x_n|^m \Delta\Pi_{\phi}^{(n)}(x_n), \quad (4)$$

$$a_{3\bar{q}} = \{2/[\sqrt{C_{\bar{q}}}(1 + \sqrt{C_{\bar{q}}})]\}^{1/2}, \quad (5)$$

$$C_{\bar{q}} = 1 + 2\bar{q}^2(1 - q)X \ln 2 \quad (6)$$

である。物理量

$$\begin{aligned} \zeta_m &= \alpha_0 m/3 - 2Xm^2/[9(1 + C_{m/3}^{1/2})] \\ &\quad - [1 - \log_2(1 + C_{m/3}^{1/2})]/(1 - q) \end{aligned} \quad (7)$$

は速度構造関数, すなわち速度揺らぎ ( $\phi = 1$ ) の  $m$  次モーメント  $\langle |\delta u_n / \delta u_0|^m \rangle$  のスケール指数である [4]。なお, 表式 (7) が  $n$  に依存しないのはスケール変換不変性の現れである。

偏差値  $\langle x_n^2 \rangle^{1/2}$  でスケールした新たな変数  $\xi_n = x_n / \langle x_n^2 \rangle^{1/2}$  で書かれた PDF  $\hat{\Pi}_{\phi}^{(n)}(\xi_n)$  を  $\hat{\Pi}_{\phi}^{(n)}(\xi_n)d\xi_n = \Pi_{\phi}^{(n)}(x_n)dx_n$  により導入する。これが実験で得られた PDF と比較されるべきものである。新たな変数と  $\alpha$  には  $|\xi_n| = \bar{\xi}_n \delta_n^{\phi\alpha/3 - \zeta_{2\phi}/2}$  の関係がある。ただし,  $\bar{\xi}_n = [2\gamma_2^{(n)}\delta_n^{-\zeta_{2\phi}} + (1 - 2\gamma_0^{(n)})a_{2\phi}]^{-1/2}$  である。領域  $\xi_n^* \leq |\xi_n| \leq \xi_n^{\max}$  で

は, 間欠的で稀な事象を記述する表式 (II) 第1項の異常部分に比べて, 第2項の寄与は無視できると考えられる:

$$\hat{\Pi}_{\phi}^{(n)}(\xi_n)d\xi_n = \Pi_{\phi,S}^{(n)}(x_n)dx_n. \quad (8)$$

他方,  $|\xi_n| \leq \xi_n^*$  を満たす小さな揺らぎへの寄与は, 主に熱揺らぎか測定誤差によるとし, この領域では,  $\xi_n$  そのものの PDF

$$\hat{\Pi}_{\phi}^{(n)}(\xi_n)d\xi_n = [\hat{\Pi}_{\phi,S}^{(n)}(x_n) + \Delta\hat{\Pi}_{\phi}^{(n)}(x_n)]dx_n \quad (9)$$

の関数形が, パラメータ  $q'$  の Tsallis 型関数で与えられると仮定する。2つの PDF, は,  $\xi_n^*(\sim 1)$  で関数値とその傾きが一致するよう接続されている。ただし,  $\xi_n^* = \bar{\xi}_n \delta_n^{\phi\alpha^*/3 - \zeta_{2\phi}/2}$  である。 $\alpha^*$  は,  $\zeta_{2\phi}/2 - \phi\alpha/3 + 1 - f(\alpha) = 0$  の小さい方の解である。 $\xi_n^*$  は,  $n \gg 1$  で  $\hat{\Pi}_{\phi}^{(n)}(\xi_n^*)$  の  $n$  依存性が最小となる点である。

結局, 自身の偏差値でスケールされた新たな変数に対する PDF は, 間欠性指数  $\mu$  ならびに長さのスケール  $l_n$  を与えるマルチフラクタル深度  $n$  が決まると, 完全に決められることになった。速度揺らぎ PDF と速度導関数 PDF は,  $\phi = 1$  を代入して得られる。他方, 圧力揺らぎ PDF と流体粒子加速度 PDF は  $\phi = 2$  を代入して得られる。エネルギー散逸率 PDF は  $\phi = 3$  を代入して得られる。具体的な表式については, 文献 [5] を参照のこと。

### III. 実験の解析

乱流の実験を解析する手順は以下のとおりである。まず, 速度構造関数のスケール指数の実験データと理論表式 (7) とを比較して, 最適な間欠性指数  $\mu$  を決める。間欠性指数  $\mu$  が決まるとパラメータ  $\alpha_0, X, q$  は自己無撞着に決定される。これらの値は,  $n$  に依存しない。次に, 主に裾部分だけで決まり中心部の影響をほとんど受けない扁平度, あるいは扁平度に関連する4次モーメントの被積分関数  $\xi_n^4 \hat{\Pi}_{\phi}^{(n)}(\xi_n^*)$  の解析により  $n$  を決める。さらに中心部 PDF の形状の解析より  $q'$  を決める。最後に  $\xi_n$  の領域全体 ( $\leq \xi_n^{\max}$ ) で PDF 実験データと理論 PDF を比較して  $n$  と  $q'$  を調整する。

図1では, 文献 [16] の  $R_{\lambda} = 110$  における実験で得られた速度構造関数のスケール指数のデータ

と実線で示した理論式 (7) との比較を行い、 $\mu = 0.238$  であることを見出した。

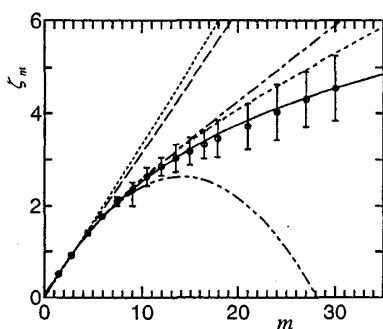


FIG. 1. Comparison of the present scaling exponents  $\zeta_m$  for  $\mu = 0.238$  (solid curve) with the experimental results plotted by circles at  $R_\lambda = 110$  ( $Re = 32000$ ) [16], and with other theories with the same value of  $\mu$ . K41 is given by the dotted line,  $\beta$ -model by the dashed line, p-model by the dotted dashed line, log-Poisson model by the short dashed curve, and log-normal by the two dotted dashed curve.

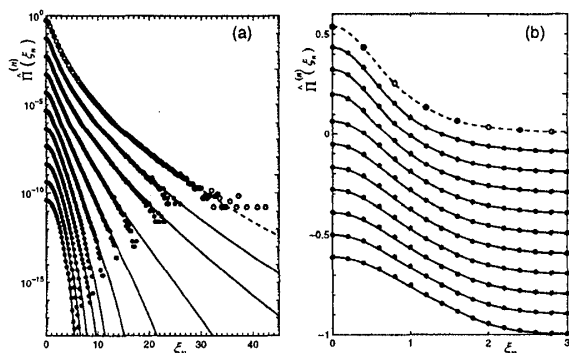


FIG. 2. Analyses of the PDF's of velocity fluctuations (closed circles) and of velocity derivatives (open circles) measured in the DNS by Gotoh et al. at  $R_\lambda = 380$  by the present theoretical PDF's  $\hat{\Pi}_\phi^{(n)}(\xi_n)$  for velocity fluctuations (solid lines) and for velocity derivatives (dashed line) are plotted on (a) log and (b) linear scales. The DNS data points are symmetrized by taking averages of the left and the right hand sides data. The measuring distances,  $r/\eta = l_n/\eta$ , for the PDF of velocity fluctuations are, from the second top to bottom: 2.38, 4.76, 9.52, 19.0, 38.1, 76.2, 152, 305, 609, 1220. For the theoretical PDF's of velocity fluctuations,  $\mu = 0.240$  ( $q = 0.391$ ), from the second top to bottom:  $(n, \bar{n}, q') = (20.7, 14.6, 1.60)$ ,  $(19.2, 13.1, 1.60)$ ,  $(16.2, 10.1, 1.58)$ ,  $(13.6, 7.54, 1.50)$ ,  $(11.5, 5.44, 1.45)$ ,  $(9.80, 3.74, 1.40)$ ,  $(9.00, 2.94, 1.35)$ ,  $(7.90, 1.84, 1.30)$ ,  $(7.00, 0.94, 1.25)$ ,  $(6.10, 0.04, 1.20)$ ,  $\xi_n^* = 1.10 \sim 1.43$  ( $\alpha^* = 1.07$ ), and  $\xi_n^{\max} = 204 \sim 6.63$ . For the theoretical PDF of velocity derivatives,  $(n, \bar{n}, q') = (22.4, 16.3, 1.55)$ ,  $\xi_n^* = 1.06$  ( $\alpha^* = 1.07$ ), and  $\xi_n^{\max} = 302$ . For better visibility, each PDF is shifted by  $-1$  unit along the vertical axis.

図2に、後藤ら [17] の DNS により  $R_\lambda = 380$  で求められた速度揺らぎ PDF (黒丸) と速度導関数 PDF (白丸) を、対数と線形の両スケールで載せた [5]。ただし、データ点は、PDF の左右を平均したものを記している。理論 PDF の表式を決定する際、図1と同様の解析により得た値  $\mu = 0.240$  を用いる。それより、 $q = 0.391$ ,  $\alpha_0 = 1.14$ ,  $X = 0.285$  が決まる。速度揺らぎ PDF の理論曲線 (実線) に必要なパラメータは、図の説明中に記してある。速度導関数 PDF の理論曲線 (破線) に必要なパラメータは、 $(n, \bar{n}, q') = (22.4, 16.3, 1.55)$  である [5]。

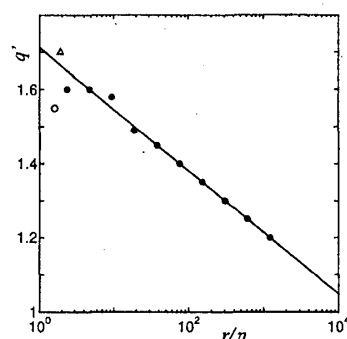


FIG. 3. Dependence of  $q'$  on the distance  $r/\eta$  extracted from the analyses of the PDF's for velocity fluctuations (closed circles), for velocity derivatives (open circle) and for fluid particle accelerations (open triangle). The line represents  $q' = -0.05 \log_2(r/\eta) + 1.71$ .

同じ DNS で得られた流体粒子加速度 PDF [17] の理論曲線の決定に必要なパラメータは、 $(n, \bar{n}, q') = (17.5, 11.4, 1.70)$  である [5]。

図3には、中心部 PDF の形状を決める  $q'$  の  $r/\eta$  依存性を載せた [5]。これより、経験式  $q' = -0.05 \times \log_2(r/\eta) + 1.71$  が抽出できる [5]。この依存性は、各測定量の標準偏差より小さい物理量が従う何らかの普遍的なダイナミクスが抽出できることを予感させる。

Bodenschatz [18,19] らが  $R_\lambda = 690$  の実験で得た流体粒子加速度 PDF に理論 PDF 曲線を用いる際、マルチフラクタル深度は  $n = 17.1$  とした。これは  $n = \log_2(l_0/l_n)$  に実験値  $l_0 = l_{in}$  と、測定における空間分解能  $l_n = 0.5 \mu m$  を代入して得たものである。さらに裾部分の解析により間欠性指数の値として  $\mu = 0.240$  を抽出し、これより、他のパラメータの値が  $q = 0.391$ ,  $\alpha_0 = 1.14$ ,  $X = 0.285$ , と求められた。中心部を決めるのに必要なパラメータは  $q' = 1.45$  である。

マルチフラクタル解析の予備的な応用をいくつか述べて、締め括りとして、大規模生物圏環境 (Large Scale Biosphere-Atmosphere; LBA) 実験がアマゾン熱帯雨林で行われており、その一環として、雨季の林冠 (canopy) 上下での乱流が気象や生態系へ与える影響を探るために速度揺らぎ PDF が観測された [20,21]。その PDF をマルチフラクタル解析で得られた PDF にて吟味することが始められている。

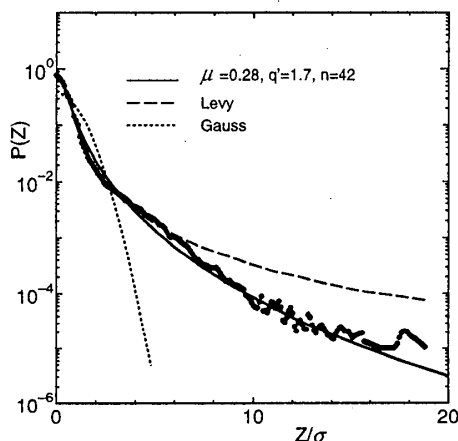


FIG. 4. Analysis of the PDF  $P(Z)$  of index changes extracted from S&P 500 (closed circle) by the PDF  $\hat{\Pi}_\phi^{(n)}(\xi_n)$  for velocity fluctuations (solid line) derived by multifractal analysis with the parameters  $\mu = 0.28$ ,  $q = 0.47$ ,  $n = 42$  and  $q' = 1.7$ . The index change  $Z$  is scaled by the volatility  $\sigma$ . The original data points are symmetrized by taking averages of the left and the right hand sides data. The Révy stable distribution (dashed line) and the Gaussian distribution (dotted line) are also shown as references.

経済物理学 (econophysics) における株価変動時系列  $Y(t)$  の解析で得られた価格変動  $Z(t) = Y(t + \Delta t) - Y(t)$  に対する定常 PDF  $P(Z)$  の、マルチフラクタル解析による予備的な調査も進めている。図 4 には、 $Z(t)$  を  $\Delta t = 1$  分として解析した定常 PDF  $P(Z)$  を、ボラティリティー (標準偏差)  $\sigma$  で規格化した変数  $Z/\sigma$  の関数として記してある [22]。黒丸は Standard & Poor's 500 (S&P 500) 指数から抽出された価格変動の PDF、実線はマルチフラクタル解析で得られた速度差 PDF (パラメータは、 $\mu = 0.28$ ,  $q = 0.47$ ,  $n = 42$ ,  $q' = 1.7$ )、破線は Lévy 安定分布、点線は Gauss 分布である。大偏差統計 [23] とマルチフラクタル解析との関連を調べることも、今後の興味深い重要な問題である。

- [1] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52**, 479-487 (1988).
- [2] C. Tsallis, *Braz. J. Phys.* **29**, 1-35 (1999); On the related recent progresses see at <http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm>.
- [3] T. Arimitsu and N. Arimitsu, *Phys. Rev. E* **61**, 3237-3240 (2000).
- [4] T. Arimitsu and N. Arimitsu, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, L235-L241 (2000) [CORRIGENDUM: **34**, 673-674 (2001)].
- [5] T. Arimitsu and N. Arimitsu, cond-mat/0306042 (2003) and the references therein.
- [6] A. Rényi, *Proc. 4th Berkeley Symp. Maths. Stat. Prob.* **1**, 547 (1961).
- [7] J.H. Havrda and F. Charvat, *Kybernetika* **3**, 30-35 (1967).
- [8] A.M. Oboukhov, *J. Fluid Mech.* **13**, 77-81 (1962).
- [9] A.N. Kolmogorov, *J. Fluid Mech.* **13**, 82-85 (1962).
- [10] A.M. Yaglom, *Sov. Phys. Dokl.* **11**, 26-29 (1966).
- [11] U. Frisch and G. Parisi, *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, ed. by M. Ghil, R. Benzi and G. Parisi (North-Holland, New York, 1985) 84.
- [12] C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **2**, 49-76 (1987).
- [13] A.N. Kolmogorov, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **30**, 301-305 (1941). *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **31**, 538-540 (1941).
- [14] U.M.S. Costa, M.L. Lyra, A.R. Plastino and C. Tsallis, *Phys. Rev. E* **56**, 245-250 (1997).
- [15] M.L. Lyra and C. Tsallis, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 53-56 (1998).
- [16] C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, *J. Fluid Mech.* **224**, 429-484 (1991).
- [17] T. Gotoh, D. Fukayama and T. Nakano, *Phys. Fluids* **14**, 1065-1081 (2002).
- [18] A. La Porta, G. A. Voth, A. M. Crawford, J. Alexander and E. Bodenschatz, *Nature* **409**, 1017-1019 (2001).
- [19] G. A. Voth, A. La Porta, A. M. Crawford, J. Alexander and E. Bodenschatz, *J. Fluid Mech.* **469**, 121-160 (2002).
- [20] M.J.A. Bolzan, F.M. Ramos, L.D.A. Sá, C.R. Neto and R.R. Rosa, *J. Geophys. Res.* **107**, doi:10.1029/2001JD000378 (2002).
- [21] F.M. Ramos, M.J.A. Bolzan, L.D.A. Sá and R.R. Rosa, preprint (2003).
- [22] R.N. Mantegna and H.E. Stanley, *Nature* **376**, 46-49 (1995).
- [23] T. Watanabe, Y. Nakayama and H. Fujisaka, *Phys. Rev. E* **61**, R1024-R1027 (2000).