株価変動の確率過程について
- Slow diffusion in intra-day evolutions -

福山平成大学経営学部　増川純一

要旨：株価の日中変動における、変動の大きさの分布と自己相関、取引時間間隔の分布と自己相関、価格の拡散について実証的研究を行った。その結果、価格の拡散は通常の拡散係数の６分の１程度の緩慢な拡散であることがわかった。この現象は株価変動の特異な自己相関から理論的に導くことが出来る。また、この特異な自己相関はマーケット・メイカーが大きな価格変動を極力抑えようとする振る舞いの現れであると推測される。

株価は、板寄せと呼ばれるオープニング価格の決定と連続オークション方式による日中変動の二つのプロセスによって変動している[1]。ここでは、時間優先（早い注文が優先）、価格優先（安い売り注文、高い買い注文優先）の原則による連続オークション方式で決定される株価の日中変動に着目してデータ分析を行った[2]。以下、主要な結果（stylized facts も一部含まれる）を述べる。

・ 取引ごとの株価変動の確率密度関数。横軸はティック・サイズ（ここでは１６分の１ドルを用いた）を単位とした株価のジャンプ。中心部は指数-2.15 のべき乗関数、裾野は指数-3.67 のべき乗関数でフィットした。株価変動の確率分布関数がべき関数の振る舞いをすることはよく知られている[3]。

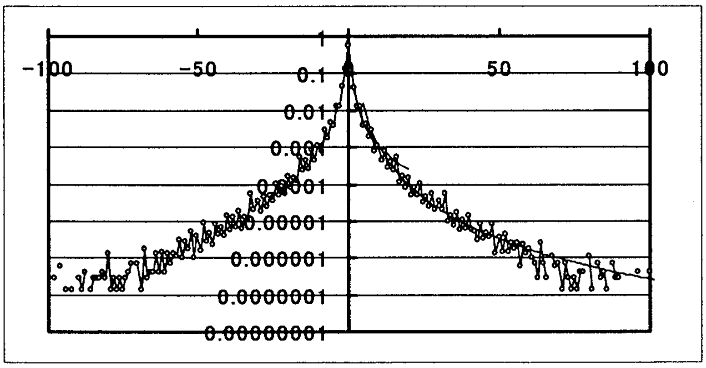

図１　株価変動の確率密度関数の片対数プロット

・ 株価変動の自己相関関数。横軸は取引回数。ひとつ先の取引では逆相関を示すがそれ以降の相関はほとんどない。ただし、株価変動の絶対値については、よく知られているように[4]、べき関数の振る舞いを示し、長期記憶を持つ。

---

1 例えば、大村敬一他　［１９９８］　「株式市場のマイクロストラクチャー」　日本経済新聞社

2 データはニューヨーク証券取引所の TAQ Database を利用した。分析したデータは、1, Nov, 1999 から 4, Nov, 1999 （９：３０～１６：００）にアメリカの主要証券取引所で取引された株のうち、一日の取引回数が４０４回を越えたのべ３３２９銘柄分のデータ（総データ数：約７００万件）である。

3 例えば、R. N. Mantegna and H. E. Stanley [2000] “An Introduction to Econophysics” Cambridge University Press

4 Y. Liu et al. [1999] “The statistical properties of the volatility of price fluctuations” Phys. Rev. E59 p1390

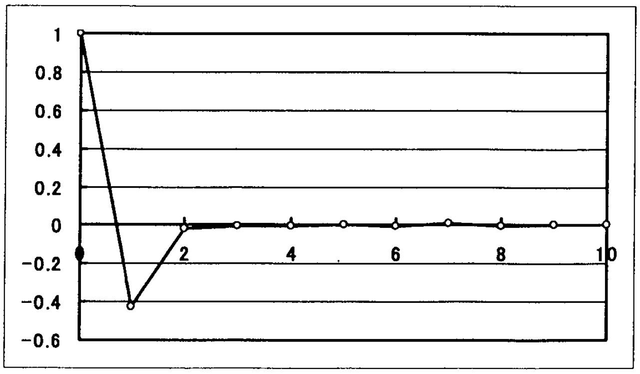

図２　株価変動の自己相関関数

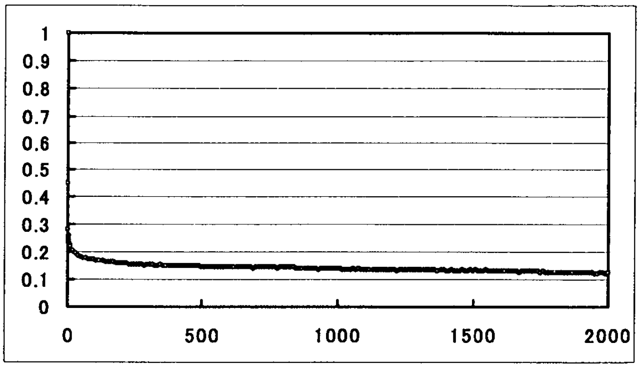

図３　株価変動の絶対値の自己相関関数

・ 取引時間間隔の確率密度関数。裾野は図中の指数関数でフィットした。全体では、複数の生存時間を持つ指数関数の重ねあわせであると考えられる。あわせて、よく知られた取引回数の日中変動パターンを示しておく。

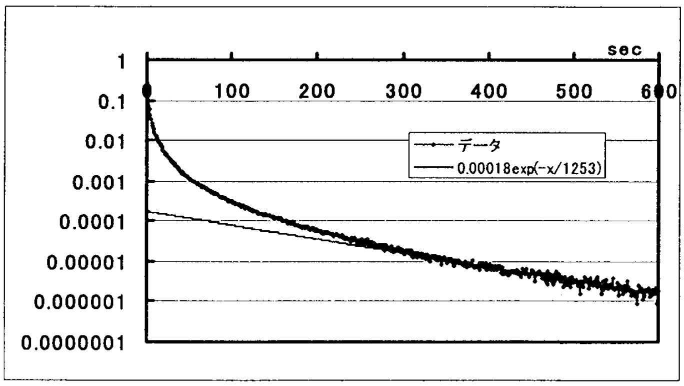

図４　取引時間間隔の確率密度関数の片対数プロット

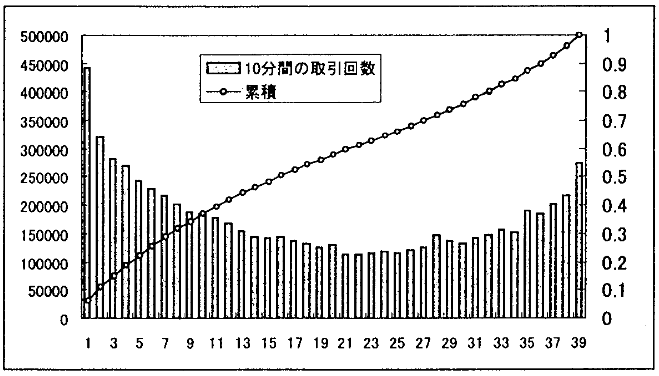

図５　取引回数の日中変動パターン

・ 取引時間間隔の自己相関関数。横軸は取引回数。図中の指数関数によるフィットが非常によい。従って、取引時間間隔は短期記憶をもつ。

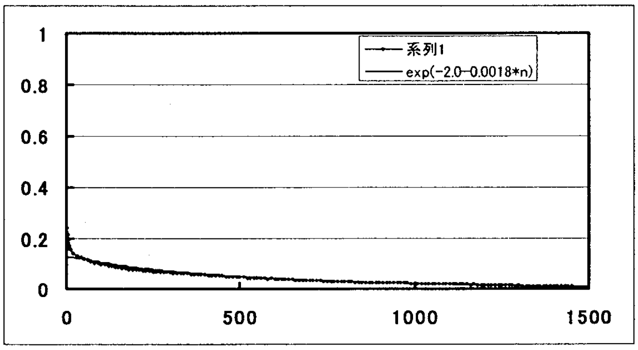

図６　取引時間間隔の自己相関関数のプロット

・ 株価の拡散。横軸は取引回数。縦軸は $E((x_n - x_0)^2)/\sigma^2$ 、すなわちｎ取引後の価格の分散を価格変動の分散で規格化した値。自由拡散であれば傾き（拡散係数）が１の直線となるが、実際のデータでは傾きが 0.155 の緩慢な拡散となった。

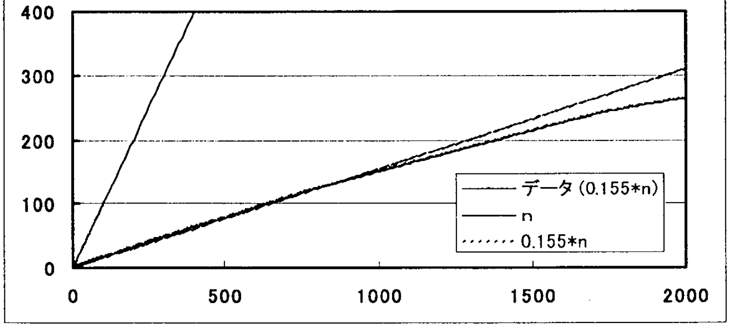

図７　株価の拡散

ここでは、株価の緩慢な拡散をすでに述べた株価変動の特異な自己相関係数から説明してみよう。ｎ取引後の株価の分散は株価変動の自己相関係数 ρ_i を用いて次のように変形できる。

$$E((x_n - x_0)^2)/\sigma^2 = E((\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i)^2)/\sigma^2$$
$$= n + 2\sum_{i=1}^{n}(n-i)\rho_i$$
$$= n(1+2A) - 2B$$

ここで、$A = \sum_{i=1}^{n} \rho_i < 0$、$B = \sum_{i=1}^{n} i\rho_i < 0$ である。実際、自己相関係数のデータの有限性によるノイズを考慮して小数点以下三桁以降を切り捨てると、次のグラフのように株価の拡散をよく再現する。

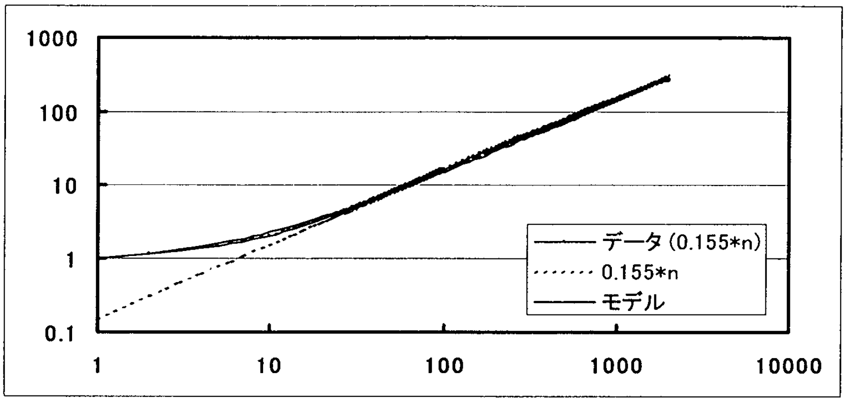

図8　株価の拡散の両対数プロット

ここで分析したアメリカの主要証券取引所では、マーケット・メイカー（NASDAQ）あるいはスペシャリスト（NYSE）といったシステムを採用している。これらのシステムでは、これらの主体が売り手と買い手の間に介在して大幅な価格変動を抑える働きをしている。ここで述べたような株価変動の自己相関係数の特異な振る舞い[5]は、ひとつにはこのようなシステムに拠るものではないかと考えられる。これを検証するには、異なるシステムを持つ市場（例えば東証）のデータを調べればよいが、これについては別の機会に報告したい。

[5] 外国為替市場においても自己相関係数の同様な振る舞いが報告されている。詳しくは本研究会の水野氏（中央大理工）の報告を参照。