Superstatistics in Econophysics

大滝 由一[1]、 長谷川 博[1,2]

茨城大学理学部[1]
Center for Statistical Mechanics, University of Texas[2]

100 年以上昔、Pareto は個人所得の分布が冪乗則に従うことを発見した。現実の金融取引や経済活動は非常に複雑であるにもかかわらず、このような普遍的な統計則が現れるのはなぜであろうか? 近年この疑問に答えるため、さまざまな視点から所得分布に関する研究がなされている。これらの論文では企業や個人の個性や特性を完全に無視した平均場の力学、特に multiplicative noise の性質から冪乗則の理解を深めてきた [1][2]。我々はこの小論で企業や個人の個性や特性を考慮した superstatistics の視点からこの冪分布について考察した。

人工市場における冪乗則 我々は株式投資のみを通して資産形成を行う１００人のトレーダーからなる孤立した理想的な人工金融市場を考え、トレーダーの特性と資産の冪乗則の関係を統計力学的視点から考察した。孤立した理想的な人工金融市場は、株式への投資以外の経済活動を行わない孤立系で、トレーダー、現金、株式の外との流出入はないとし、投資家の人数、現金の総流通量、株式の総流通量は一定とした。トレーダーの株取引は、閾値モデル [3] に新たに売買注文量を考慮した拡張モデルに従うとした（拡張閾値モデル）[4]。我々は資産に比例した売買注文量を仮定した。

物理系（気体分子系）と比較において、金融系の大きな特徴は各トレーダーの優劣の存在にある。金融系と物理系（気体分子系）では、総資産/総エネルギー保存量や取引/衝突におけるトレーダー/分子間の資産/エネルギーのやり取りなど類似点が多い。しかし決定的に違うのは、通常物理では同一分子を扱うのに対して、各トレーダーが優劣を持っている点である。

数値計算を行うと、各トレーダーの優劣がほとんどない類似したトレーダで構成される金融市場では、資産分布は、気体と同様の定常正規分布になった。それに対してトレーダーがはっきり優劣を持つ場合、図１のように資産分布は冪分布（指数 -1.4）になった。この計算ではトレーダーの取引周期について指数分布 (指数 $\gamma = 0.1$) を取った。

この結果は、トレーダーの優劣によって、貧富の階層が出来上がり、その重ね合わせ結果として資産分布全体が冪分布になるというメカニズムを推測させる。我々は貧富の階層についての重ね合わせの統計分布、すなわち superstatistics の視点からこの現象の解釈を試みる。

Superstatistics 典型的な分布を重ね合わせた統計分布の技巧は工学においてよく知られている [5]。近年 Beck–Cohen によってボルツマン分布の温度の分布を導入してボルツマン分布を重ね合わせることで、Tsallis 分布などより一般的な統計分布を解釈しようということが提唱された [6]。典型的な統計分布（statistics）の重ね合わせ（superposition）として superstatistics を定義する。

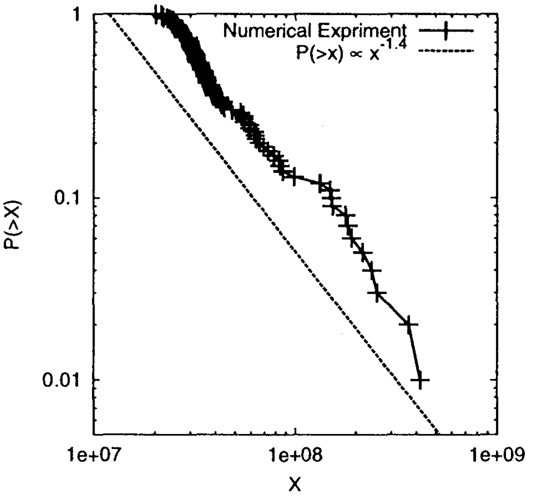

図 1: 資産分布

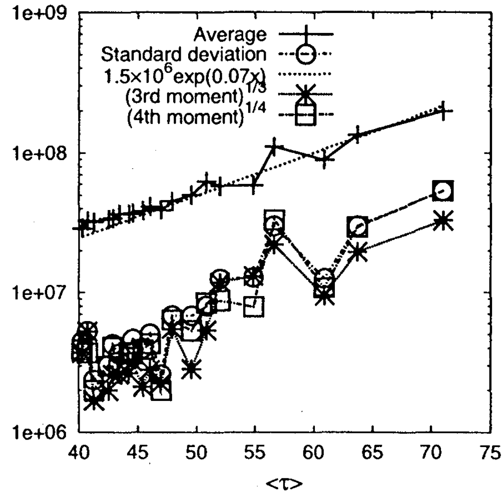

図 2: モーメントのスケーリング

簡単な例で説明しよう。拡張闘値モデルではトレーダーの優劣はトレード周期 τ で特徴づけられる。トレード周期 τ が長いトレーダーが勝ち組みなって、大きな資産を形成する。ほぼ定常な状態で、資産規模（平均）: $m(\tau) \sim \bar{m}\exp[\lambda\tau]$ が近似的に成り立ち、資産に比例した売買注文量を仮定したので取引規模（標準偏差）: $\sigma(\tau) \sim \bar{\sigma}\exp[\lambda\tau]$ が近似的に成り立つ。このとき各トレーダーの資産を簡単のため仮に正規分布に従っているとすると、全資産の密度分布 $\rho(x)$ の冪乗則が導出される。

$$\rho(x) \sim \int d\tau f(\tau)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(\tau)}\exp[-\frac{(x-m(\tau))^2}{\sigma^2(\tau)}]$$

$$\sim \int d\tau f(\tau)\frac{e^{-\lambda\tau}}{\sqrt{2\pi}\bar{\sigma}}\exp[-\frac{(xe^{-\lambda\tau}-\bar{m})^2}{\bar{\sigma}^2}] \qquad \sim \frac{1}{x^{1+\gamma/\lambda}} \quad \text{for} \quad f(\tau)\sim e^{-\gamma\tau}$$

ここで $f(\tau)$ は取引周期 τ を持つトレーダーの分布関数である。冪乗則が導出されるには正規分布である必要はない。資産規模にスケールする分布なら冪乗則が導出される [2]。図 2 に示したように拡張闘値モデルでは平均、標準偏差、高次モーメントが $\lambda = 0.07$ でスケールしている。このスケーリングは図 1 の指数 $1.4 \sim \gamma/\lambda$ と無矛盾である。

superstatistics の見方では、階層形成が重要であって、エルゴード性を持たないことが特徴となる。この点が従来の企業や個人の個性や特性を完全に無視した平均場の見方と大きく違っている点である。しかしながら経済系においては個人や企業の持つ能力は環境とともに時間変化していく。長い時間スケールで見れば平均場の力学に帰着することが期待される。

[1] K. Okuyama, M. and H. Takayasu,Physica **A269**(1999)125 および参考文献.

[2] Y. Fujiwara et.al., cond-mat/0208398 および参考文献.

[3] H. Takayasu, H. Miura, H. Hirabayashi and K. Hamada: Physica **A184**(1992)127, A.-H.Sato H.Takayasu: Physica **A250**,(1998)231.

[4] Y. Ohtaki and H.H. Hasegawa, to appear in Pro. 2nd Nikkei Symposium (2003).

[5] M. Yamada and M. Agu, IEICE Trans. Funda., E81-A(1998)1512 および参考文献.

[6] C. Beck and E.G.D. Cohen, Physica **A322**(2003)267 および参考文献.