# 遅れを含むランダムウォーク

（株）ソニーコンピュータサイエンス研究所　大平徹 [1]

遅れを含むランダムウォークについて概説します。とくに拡散の速度や確率分布の振動がおきるような点に着目します。

## 1 はじめに

ランダムウォークのトピックは長年確率論の基本的なモデルとしてさまざまな形で研究が進められてきたことは周知のとおりです。ここでは遅れを含むランダムウォークについて議論します[1]。このモデルは遅れの長さの記憶をもった高次のランダムウォークの記憶のありかたが過去の一時点という意味で特殊な場合です。しかしその特徴としては今まで知られていたような高次のランダムウォークには見えていなかった振動という特徴が自己相関関数などに現れます。この振動現象は遅れを含む力学系の中心的な記述である遅れ微分方程式においてはよく知られた現象です。この現象を確率空間においても捕らえることができたというのが以下で紹介する遅れランダムウォークの特徴です。

## 2 モデル

われわれの提案するモデルは一次元の離散空間、離散時間のランダムウォークで、一ステップの長さは固定です。さらにこのランダムウォークは空間的に一様ではなく、その位置に依存します。単純な具体例について述べます。

$X(t)$ を時刻 $t$ におけるウォーカーの位置とするとこのモデルは以下の正の方向への遷移の条件付き確率の定義で与えられます。

$$\begin{aligned}
P(X(t+1)=X(t)+1|X(t-\tau)>0) &= p \\
P(X(t+1)=X(t)+1|X(t-\tau)=0) &= 0.5 \\
P(X(t+1)=X(t)+1|X(t-\tau)<0) &= 1-p
\end{aligned}$$

つまり遅れ　$\tau$　があると、今の位置で次のステップの方向のバイアスが決まるのではなく、遅れ時間前の位置でバイアスが決まります。遅れが無い場合にはもし $p<0.5$ ならば原点に向かう

[1] E-mail: ohira@csl.sony.co.jp

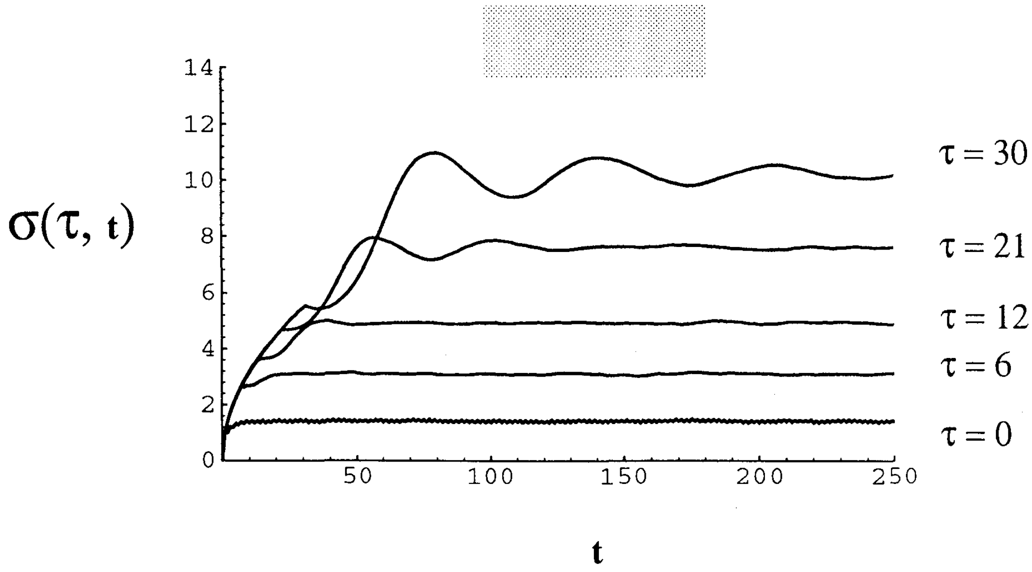


図 1: $\sigma(\tau, t)$ の時間発展 ($p = 0.25$).

ようなバイアスが強くなりますが、$p > 0.5$ のときには原点からはなれていくようなバイアスが強くなります。$p = 0.5$ の場合には遅れの値によらずによく知られた空間的に一様なランダムウォークになります。原点に対しては対称なモデルとなっていることに留意してください。

さて $p < 0.5$ の場合にこのランダムウォークの挙動について調べて見ましょう。初期条件として $(-\tau, 0)$ 　の時間については原点に存在するようにして、$t = 1$ から動き始めるようにします。原点に局在していた確率分布は時間とともに広がっていき、いずれ原点を中心として対称な定常分布に収束します。遅れが大きくなるとどうなるでしょう。遅れがあるとバイアスの逆転する確率が増えます。つまり原点から離れるバイアスがつよくなる確率が過去の位置によっているので増えるということです。この要因によってこの場合にも同じように確率分布は時間とともに広がっていきますが、広がりのスピードはより速くなり、定常分布の広がりもより大きくなると思われます。

数値計算によってこれらが事実であることを示すことができます。図 1 では原点から出発した遅れ $\tau$ を持つウォーカーの確率分布の幅 $\sigma(\tau, t) = \sqrt{< X(t)^2_\tau >}$ を時間とともにおってみました。拡散、すなわち確率分布の広がりの速度は遅れが大きくなるとともに大きくなっていきます。しかし、さらに注目すべきは遅れがある程度おおきくなると分布の幅の振動が見られることです。振動現象は遅れをともなう力学系には特徴的ですが、このモデルでも分布の幅にそれが現れるということです。図 2 では長い時間のあとで定常状態にいたったときの分布の幅が遅れにどのように依存しているかを調べてみました。

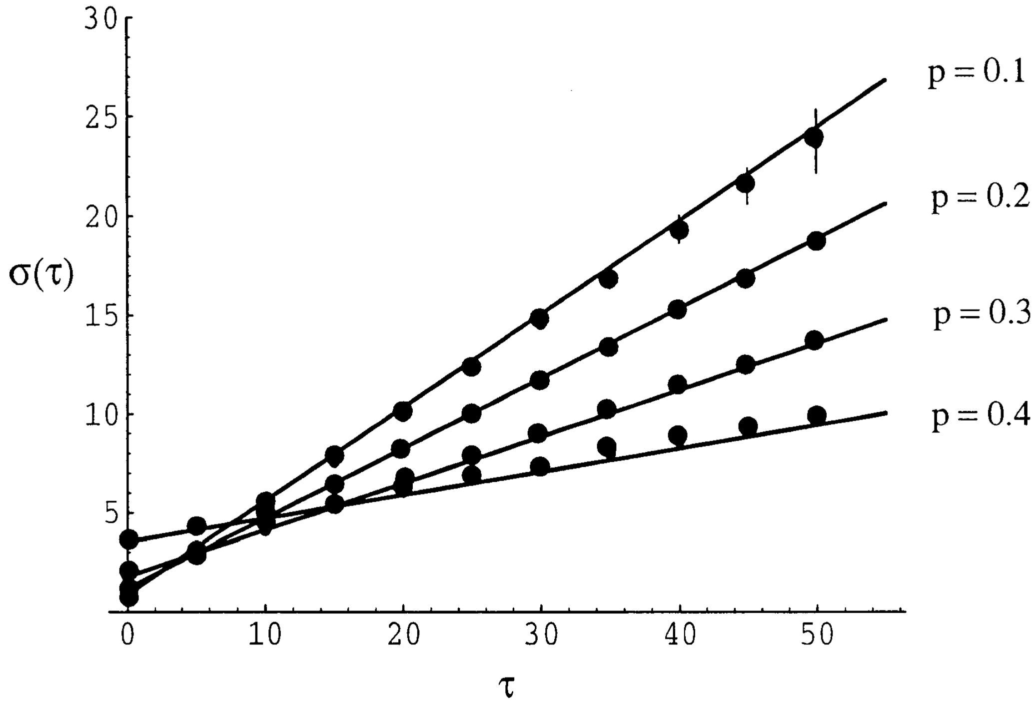


図 2: $\sigma(\tau)$ の $\tau$ を変化させた時の挙動.

遅れとともにほぼ線形に定常分布の幅が広がっていることが見て取れます。しかし厳密な計算は遅れが小さい時にしかできていません。(これは原理的にできないのではないかとのコメントもいただきました。お分かりの読者はお教え下さい。) 以下のようになります。$(\eta = 1 - 2p)$

$$< X_0^2 >= \frac{1}{2\eta^2} \tag{1}$$

$$< X_1^2 >= \frac{1}{2\eta^2}\frac{1 + 2\eta + 2\eta^2 + 2\eta^3}{1 + 2\eta} \tag{2}$$

$$< X_2^2 >= \frac{1}{2\eta^2}\frac{2 + 5\eta + 8\eta^2 + 12\eta^3 - 2\eta^5}{2 + 5\eta - 2\eta^3} \tag{3}$$

近似的に線形の増加があることも以下の式でとらえることができますが、導出は割愛します。(文献 [2] を参照下さい)

$$\sigma(\tau) \approx 0.59(1 - 2p)\tau + \frac{1}{\sqrt{2}(1 - 2p)} \tag{4}$$

確率分布の幅から焦点を定常状態の自己相関関数

$$C(u) = \lim_{t\to\infty} < X(t + u)X(t) > \tag{5}$$

にうつしても、振動現象が見えます。(図３)

残念ながらこのモデルについては、この振動現象をとらえることができません。原点における遷移確率の変化が非線形的であることが原因です。そこでモデルを原点からの距離で線形にバイ

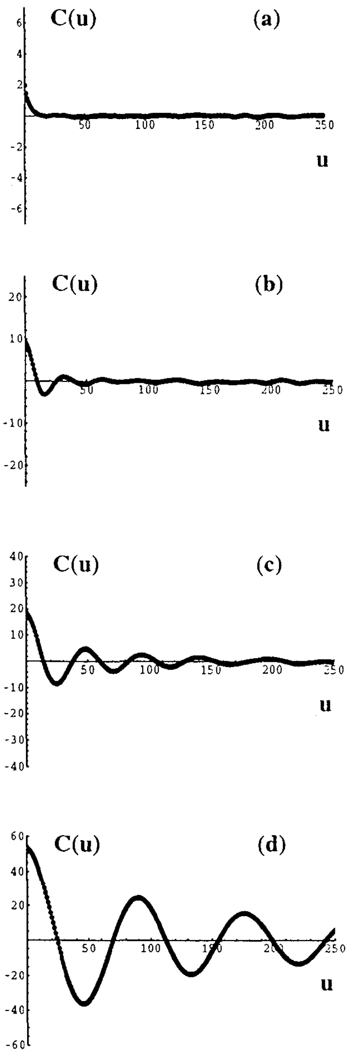


図 3: 定常自己相関関数 $C(u)$ の例. $p = 0.25$ の時で遅れは $(a)\tau = 0, (b)\tau = 6, (c)\tau = 10, (d)\tau = 20$.

アスが増加するようなモデル、すなわち原点に遅れのついた線形ばねで結ばれているような質点に変更すると自己相関関数の振動などもある程度解析的に追えるようになりますが、これについては文献 [3, 2] を参照ください。

## 3　まとめと関連トピック

遅れの概念は物理学ではあまりなじみがないかと思いますが、生理現象などの分野では早くから反応や相互作用の遅延をとりいれる必要性からモデルにも取り入れられてきました [4, 1]。ここで紹介したモデルも人間が立っているときの重心制御のモデルとして考案いたしました。さらに現在進行中の研究は $p > 0.5$ の場合です。この場合は原点から離れていくようなバイアスが強くなるのですが、特徴としては遅れがあると拡散の速度が遅くなるという現象があります。

最後にこれらのモデルを通じて浮かんできている課題なり、疑問なりを述べたいとおもいます。

（1）物理研究の分野で一般に考えられている記憶効果は過去にむけて次第に減衰していく形です。これは複数の遅れをとりこんだランダムウォークでつくることができるのですが、そこに現れる挙動の比較はまだきちんと行っていません。たとえばここでのモデルに見られたような振動は複数の遅れの重ね合いにより消えていくのでしょうか。

（2）また確率共鳴という現象が知られています。(例えば [5]) この現象についてはいくつかの見方がありますが、端的には外からの振動信号をノイズによる確率遷移を持つシステムの振動と共鳴させておこす現象です。ここでも見られた遅れによる振動を利用して Delayed Stochastic Resonance のモデル提案をおこないました [6, 7, 8]。このモデルは 2 値から多値、もしくは単素子からリング上のネットワークへの拡張をすることができます。多値のモデルの考察をすることで Delay Differential Equation の研究などで取り扱われている連続値をとる力学系の性質の理解につながらないかと考えています。また、ネットワークへの拡張は神経回路におけるリズムの発生や、交通流のモデル (例えば [9, 10]) への応用ができないかとも考えています。

（3）その他、周辺のノイズと遅れのどちらかを含むシステムとしては、Stochastic Resonance を用いたネットワークトラフィックの渋滞制御 [11] や、遅れをを用いたネットワーク構造の自己組織化 [12] 等を行いました。

遅れとノイズの効果は数理的に精密な議論（たとえば定常性についてなど [13]）についてはそれぞれ積み重ねの深い研究トピックで筆者のスコープを超えます。ただ、本稿で紹介したような定義的に単純なモデルからでも、遅れとノイズが共に織りなす現象を面白いと思っていただければ幸いです。

## 謝辞

この原稿は京都大学基礎物理学研究所研究会「確率モデルの統計力学」における講演に関連した研究会報告です。上記研究会の世話人の皆様に謝辞を申し上げます。

## 参考文献

[1] T. Ohira and J. G. Milton: Delayed Random Walks, Physical Review E, 52 3277 (1995).

[2] T. Ohira and T. Yamane: Delayed Stochastic Systems, Physical Review E, 61 1247 (2000).

[3] T. Ohira: Oscillatory Correlation of Delayed Random Walks, Physical Review E, 55 R1255 (1997).

[4] J. J. Collins and C. J. DeLuca: Random Walking during Quiet Standing, Physical Review Letters, 73 764 (1994).

[5] 内山智香子:確率共鳴現象に話題集中！, パリティ 13-06 20 (1998).

[6] T. Ohira and Y. Sato: Resonance with Noise and Delay, Physical Review Letters, 82 2811 (1999).

[7] 大平徹, 佐藤譲: ノイズと遅れの共鳴現象, 日本物理学会誌 55-5 360 (2000).

[8] L.S. Tsimring and A. Pikovsky: Noise-induced dynamics in bistable systems with delay, cond-mat/0107130 (2001).

[9] 只木進一, 菊池誠, 杉山雄規, 湯川 諭: 交通流の科学, 日本物理学会誌 55-3 166 (2000).

[10] 五十嵐 二, 伊藤克美, 中西健一交通流模型の数理, 日本物理学会誌 55-3 202 (2000).

[11] T. Ohira and R. Sawatari: Phase Transition in a Computer Network Traffic Model, Physical Review E, 58 193 (1998).

[12] Junji Ito and T. Ohira: Emergence of a Dominant Unit in a Network of Chaotic Units with a Delayed Connection Change. Physical Review E, 64 (2001).

[13] U. Küchler and B. Mensch: Langevin's stochastic differential equations extended by a time-delayed term, Stochastics and Stochastics Reports 40, 23 (1992).