

# 量子演算中の結合したキュービットに対する 背景電荷の揺らぎの効果

NTT 物性科学基礎研究所 板倉 利文<sup>1</sup>, 都倉 康弘

今回、我々は結合ジョセフソン電荷キュービットにおける背景電荷の揺らぎ (Background charge fluctuation, BCF) による位相緩和について考察したので報告する。ジョセフソン電荷キュービット系は、量子計算機の有力な候補の一つで最近結合したジョセフソン電荷キュービットの実験が行われている。これまでの研究で、我々は単一ジョセフソン電荷キュービットに対して、BCFが重要な位相緩和の原因であることを示した。今回、結合したキュービット系に対し同様の解析を行った。キュービットの状態としては、ジョセフソン電荷キュービット系の電荷縮退状態を用いた。見積もった量は、2キュービットゲート演算中のゲートフィデリティと密度行列の対角要素である。

## 1 はじめに

量子計算機の基本となる要素、量子ビット (キュービット) を実現する様々な提案の中で、ジョセフソン電荷キュービット [1] や、量子ドットなどの固体中の素子によるキュービット [2, 3, 4] が、スケーリングの側面などで有力であると考えられている。超伝導物質から構成されるナノ回路を使った系は、量子計算機の有望な提案の一つであり [5, 6]、その量子的な性質についていくつかの実験がなされてきている [1, 7]。詳しく述べるとナノ回路における超伝導状態は、コヒーレントな二準位系をなしており、これをキュービットとして用いる。量子計算は、多数のキュービットに対するユニタリー演算として実行するが、このためには量子コヒーレンスはゲート演算の間保たれていなければならない。しかしながら、系と環境との相互作用により生じる位相緩和は避けがたい問題である。

超伝導のナノ回路では、位相緩和の要因としていろいろなものが存在する [5]。例えば、周辺回路から発生する電磁場の揺らぎ、準粒子のトンネル、背景電荷の揺らぎ (BCF) [8, 9] や、フラックスのノイズなどがある。電荷キュービットに対しては、BCFが最も重要な位相緩和の原因であることが指摘されている [10, 11, 12, 13, 14]。これまで、主に単一キュービット系が調べられてきた。多くの相互作用するキュービット系ほど位相緩和しやすくなっており、熱力学極限においては多体のエンタングルメント状態がロバストでないことが主張されている [15]。そこで今回は2キュービット系を扱った。BCFの効果を議論するため、我々は動的な電荷状態が2つの値を持つバイアスの揺らぎをもたらす場合の位相緩和現象を調べた。ここで考える位相緩和は、キュービットが環境とエンタングルするのではなく、確率的に変動する外力によるものである。しかしなが

<sup>1</sup> E-mail: itakura@will.brl.ntt.co.jp

ら、確率過程について統計平均を取ることによって、キュービットの密度行列の対角項と非対角項の時間変化が生じる。また、キュービット系から BCF に対するバックアクションの効果は無視した。

## 2 結合したジョセフソン電荷キュービット

結合したクーパーペアボックスを考える [5]。

ジョセフソン結合エネルギーと  $E_J^i$ , チャージングエネルギー  $E_C^i$ , 電子温度  $T$  が、 $k_B T \ll E_J^i, E_C^i (i = 1, 2)$  となっている時、キュービット系のハミルトニアン  $H_{qb}$  は次のように与えられる。

$$H_{qb} = \frac{\hbar}{2}(E_J^1 \sigma_x^1 + E_J^2 \sigma_x^2) + \frac{\hbar}{2}(\delta E_C^1 \sigma_z^1 + \delta E_C^2 \sigma_z^2) + \frac{\hbar E_M}{4} \sigma_z^1 \sigma_z^2.$$

ここで、演算子をパウリ行列を用いてあらわし、電荷状態が  $\sigma_z$  を対角化する基底である。  $E_M$  はキュービット間の相互作用であるクーロン斥力の強度である。さらに、電荷に起因するエネルギー  $\delta E_C^i \equiv E_C^i(1 - C_x^i V_x^i/e)$  は、ゲート電圧  $V_x^i$  を変化させることにより制御することができる。ここで、 $C_x^i$  は  $i$  番目のキュービットのキャパシタンスである。まず電荷縮退状態、 $\delta E_C^1 = \delta E_C^2 = 0$  を考える。環境は、キュービットと静電的に結合した単一の電荷トラップによる BCF であり [10, 11, 12, 13, 14, 16, 17]、環境との相互作用ハミルトニアンは次のように表すことができる。

$$H_1 = \frac{\hbar J_C}{2}(\sigma_z^1 + \sigma_z^2)(d^\dagger(t)d(t) - \frac{1}{2}). \quad (1)$$

ここで  $d^\dagger$  と  $d$  は、BCF の生成消滅演算子であり、BCF が作る不安定なバイアスの揺らぎの強度を  $J_C$  とした。キュービットのハミルトニアンは環境との相互作用ハミルトニアンと非可換なため、位相緩和の過程はエネルギー散逸を伴う。また、この環境との相互作用は、二つのキュービットが同じ揺らぎを感じていることを仮定している。これは、BCF の元となる電荷が、キュービットから比較的是なれて存在している場合に対応する。

環境の変数として次を定義する。  $X(t) = \langle d^\dagger(t)d(t) \rangle_r - 1/2$ , ここで、 $\langle A(t) \rangle_r$  は、演算子  $A(t)$  の、BCF を作る電荷状態の電子浴に関するトレースである。環境との相互作用ハミルトニアンを書き直すと、次のようになる。  $H_1 = \frac{\hbar J_C}{2}(\sigma_z^1 + \sigma_z^2)X(t)$ , ここで、我々は電荷トラップと電子浴が強く結合しており、 $X(t)$  はランダムテレグラフの型のポアソン過程に従うと仮定した。位相緩和しない状態を探すと、スピンの言葉でシングレットな状態、 $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$  が、その状態になっており、2キュービットのヒルベルト空間で、 $|\phi\rangle$  に近い状態はよりロバストと考えられる。我々は、相互作用表示から求めた近似的な密度行列を用いて、密度行列の時間発展を求め、アンサンブル平均を取ることにより、キュービット系の密度行列を求めた。相互作用表示では、全系のユニタリーオペレーター  $U(t)$  は次のように記述される。  $U(t) = U_0(t)U_1(t)$ ,  $U_0(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{qb}t}$ ,  $U_1(t) = T[e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \bar{H}_1(t')dt'}]$ , ここで、 $\bar{H}_1(t) = U_0^\dagger(t)H_1(t)U_0(t)$  であり、 $T[\ ]$  は時間順序演算子をあらわしている。二次摂動の近似で時刻  $t$  におけるキュービット系の密度行列  $\rho(t)$  は、次のように与えられる。

$$\rho(t) = \rho_0(t) - \frac{1}{\hbar^2}U_0(t)\left[\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle \bar{H}_1(t_1)\bar{H}_1(t_2) \rangle\right]\rho(0)$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \rho(0) \langle \bar{H}_1(t_1) \bar{H}_1(t_2) \rangle \\
 & - \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle \bar{H}_1(t_1) \rho(0) \bar{H}_1(t_2) \rangle U_0^\dagger(t)
 \end{aligned} \tag{2}$$

$\rho_0(t)$  は、 $J_C = 0$  としたとき、つまり位相緩和が存在しないときの時刻  $t$  における密度行列であり、次のように定義される。 $\rho_0(t) = U_0(t)\rho(0)U_0^\dagger(t)$ 。また、 $\langle \rangle$  はランダムテレグラフノイズに従う確率過程に対するアンサンブル平均を表し、環境の変数の期待値は、

$$\begin{aligned}
 \langle X(t_1) \rangle & = 0, \\
 \langle X(t_1)X(t_2) \rangle & = e^{-|t_1-t_2|/\tau},
 \end{aligned} \tag{3}$$

となる。 $\tau$  は BCF の時定数である。これを用いて式 (2) を書き直すと、

$$\rho(t) = \rho_0(t) - J_C^2 U_0(t) \left[ \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{-\frac{t_1-t_2}{\tau}} [V_1(t_1), [V_1(t_2), \rho(0)]] \right] U_0^\dagger(t), \tag{4}$$

ここで、 $V_1$  はつぎのように定義される。

$$V_1(t) = \frac{1}{2} U_0^\dagger(t) (\sigma_z^1 + \sigma_z^2) U_0(t). \tag{5}$$

量子ゲート演算中に生じる位相緩和を調べるため、ゲートフィデリティを計算した。ゲートフィデリティは次のように定義される。

$$\mathcal{F}(t) = \text{Tr}[\rho_0(t)\rho(t)]. \tag{6}$$

以下、 $E_J^1 = E_J^2 \equiv E_J (> 0)$  を仮定した。

図 1 に、 $-\ln(\mathcal{F}(t))$  の  $E_J t$  依存性を示した。初期状態の密度行列としては、 $|00\rangle\langle 00|$  を用いた。実線は  $|E_M|/E_J=20$  の場合、点線は  $E_M = 0$  の場合をあらわしている。BCF の強度として、 $J_C/E_J=0.5$  を使い、時定数として次の三種類、 $E_J \tau = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$  を用いた。時刻  $t=0$  において、ゲートフィデリティは 1 で、時間とともにゲートフィデリティは減少する。 $(-\ln(\mathcal{F}))$  は増大する。) 時定数  $E_J \tau$  を大きくするとゲートフィデリティはより減少する。このため、位相緩和率が、 $E_J \tau$  を大きくするほど増大することが推測される。これは弱結合、 $J_C \tau \ll 1$  の BCF よる単一キュービットの位相緩和の結果と一致する [10]。注目すべきことは、初期状態に近い短時間の領域では、ゲートフィデリティは、 $\ln(\mathcal{F}(t)) \propto -t^4$  の様に減少し、その振る舞いは  $E_J \tau$  によらないということである。 $E_M = 0$  の場合には、時間が短い場合を解析的に調べることができ、 $\ln(\mathcal{F}(t)) \simeq -\frac{1}{8} J_C^2 E_J^2 t^4$  となっている。 $E_M=0$  の場合と、 $E_M \neq 0$  の場合のゲートフィデリティを比べることにより、 $E_M \neq 0$  のほうがこの量が多いことがわかる。

図 2 に振幅を 1 に規格化した  $\langle 01|\rho(t)|01 \rangle$  の  $E_J t$  依存性を示した。初期状態は図 1 の場合と同じであり、 $J_C/E_J=0.5$ 、 $\tau E_J=0.1$  として、 $E_M/E_J=8, 20$  を選んだ。振動周期は、 $E_M/E_J$  が大きくなるほど短くなり、 $4\pi E_J/E_M$  で与えられる。Q 値は、振幅の変化率をコヒーレント振動の振動数で割ったものなので、ゲートフィデリティで示したのと同様に  $|E_M|/E_J$  が大きい程位相緩和しに

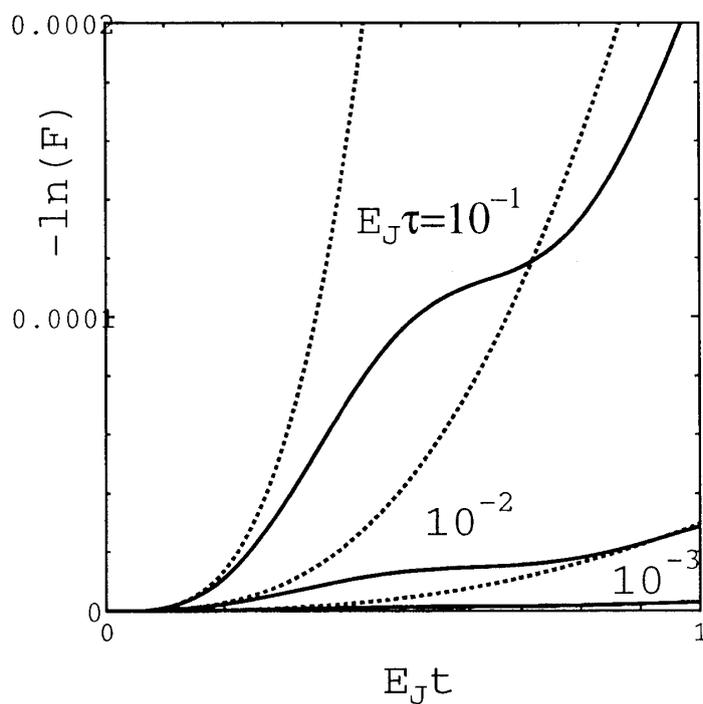


図 1: フィデリティの時間依存性

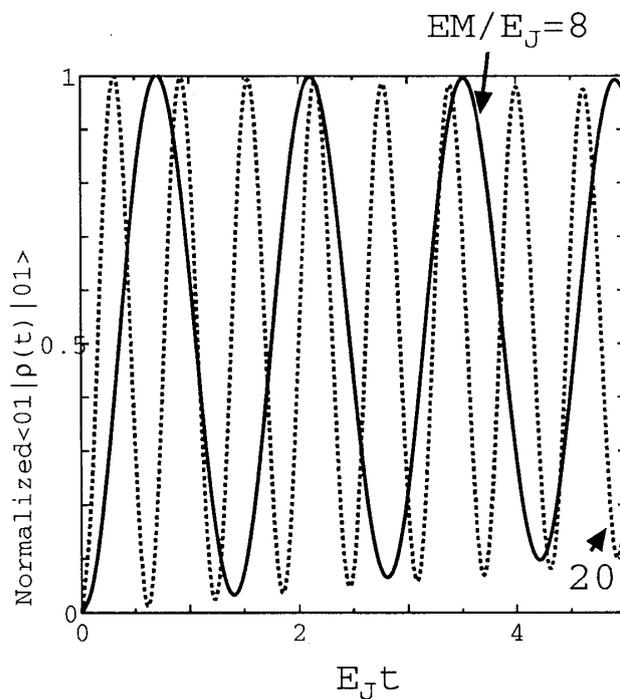


図 2: キュービット系の密度行列の  $\langle 01|\rho(t)|01\rangle$  成分

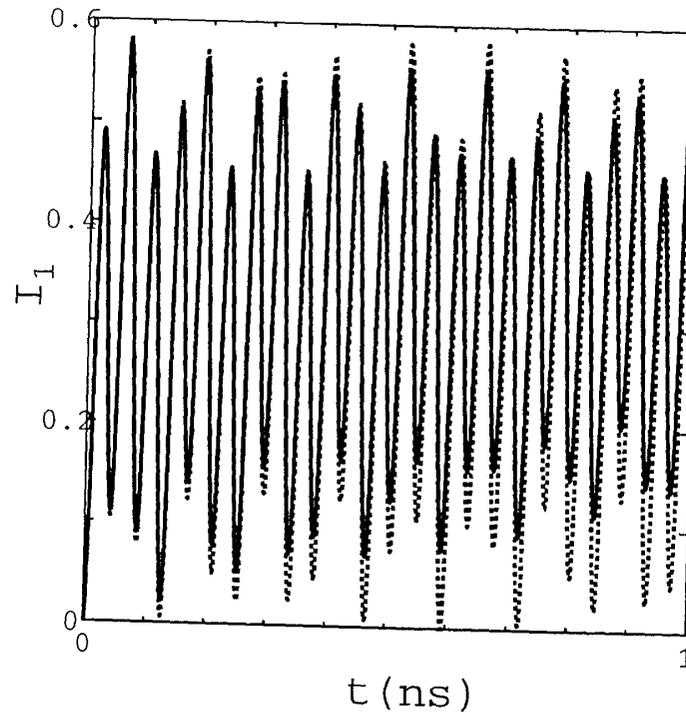


図 3: Time dependence of POVM

くくなっている。この理由については後ほど議論する。また、別の解析により初期密度行列が対角的でないときには、密度行列の非対角成分の時間依存性はガウシアン的な振る舞いを示すことがわかっている。この振る舞いの見える時定数は  $\tau$  程度で与えられる。これは、ノイズのスペクトル関数  $\langle X(t_1)X(t_2) \rangle$  が、 $|t_1 - t_2| \ll \tau$  の時に 1 に近い値をとり、以前の情報を保存しているメモリー効果が存在していることを示している。また、図 1 で調べた様に初期状態の密度行列が対角的な場合には、フィデリティの時間変化は、対数で見た場合に、 $t^2$  からではなく、 $t^4$  から立ち上がる。この初期条件は、最近の実験 [1] の場合に対応する。この実験は密度行列に対してアンサンブル平均を取ったことに対応するカレント測定の方法で行われた。次に、なぜ  $|E_M|/E_J$  が大きいほど位相緩和しにくくなるかを説明する。今回調べた、初期状態  $|00\rangle\langle 00|$  の場合には、非摂動ハミルトニアン、4つの固有状態のうち、3つの固有状態のみ（エネルギーで  $E_1 < E_2 < E_3$ ）状態の確率振幅が存在する。この時、 $E_2$  の準位を通した遷移のみが素過程に効いてくる。 $|E_3 - E_2|$  は、 $|E_M|$  が多くなってもあまり変化しないが、 $|E_2 - E_1|$  は、 $|E_M|$  とともに大きくなる。そして、 $|E_2 - E_1|$  が大きくなるほど参考文献 [10] より状態は位相緩和しにくくなる。これは、スピン系の言葉で言うと交換相互作用による先鋭化にあたる。このために、 $E_M$  とともにより 1 に近いフィデリティが期待されうると考えられる。

図 3 に、Positive-Operator Valued Measurement (POVM) の時間変化を示した。 $I_1$  は、キュービット系の密度行列の  $|01\rangle\langle 01|$  成分と  $|11\rangle\langle 11|$  成分の和である。ここで、パラメーターとしては、参考文献 [18] の実験のパラメーターである  $J_C = 1$  GHz,  $\tau = 0.1$  ns,  $E_{J1} = 13.4$  GHz,  $E_{J2} = 9.1$

GHz と  $E_M = 14.5\text{GHz}$  を選んだ。  $J_C = 0$  (点線) の場合と  $J_C = 1\text{GHz}$  (実線) の場合を比べると、背景電荷の揺らぎの効果により、振幅が小さくなっており、位相緩和が起こっていることがわかる。

我々はまた、  $|0,0\rangle \iff |1,0\rangle$  の状態間のラビ振動を調べた。 ( $\delta E_C^1 = 0, \delta E_C^2 = 152\text{GHz}$ ) この時、系の時間発展は、単一キュービットのコヒーレント振動になっている。その結果、単一キュービット系のコヒーレント振動は2キュービット系のコヒーレント振動に比べて、よりロバストであることが分かった。この振る舞いは実験の結果と一致している [18]。この理由は、位相緩和の原因として、同じ強度及び時間依存性を持つ BCF を考えているためと考えられる。この時、  $\sigma_z^1 + \sigma_z^2$  の固有値が0の状態は、BCFにより攪乱を受けにくく位相緩和しにくい。

### 3 結論

今回、我々は結合した電荷キュービットに対する、背景電荷の揺らぎの効果を議論した。環境の種類として、ポアソン過程に従うランダムテレグラフノイズを仮定した。また、環境との相互作用の性質として、2つのキュービットが同じ揺らぎを感じることを仮定した。この結果、キュービット間の相互作用  $|E_M|$  が大きいほうが位相緩和しにくいことがわかった。

また、アンサンブル平均を取った結果、二つのキュービットの間に外場の効果により、エンタングルメントが生じている。これは、先の解析的結果で、時間とともに密度行列の非対角項が存在することからも推察することができる。

いっぽう、1つのキュービットに比べて、2つのキュービットのほうが位相緩和しやすくなっていることがわかった。多体の相互作用する系に対する結論 [15] に対しては、今回の結果は、2キュービット系で多体系への前駆現象を表していると考えられる。

最後に、ここで調べた位相緩和の過程として、2つのキュービットに対して同じ揺らぎを仮定しているが、独立な環境との相互作用については、別の考察が必要である。

### 4 謝辞

議論させていただいた、川口晃氏、林稔晶氏、藤澤利正氏、棚元哲史氏、S. Lloyd、並びに、平山祥郎氏に深く感謝の意を捧げます。この研究は、SORST-JST、(発展・継続)第二研究事務所の補助を受けています。

### 5 参考文献

#### 参考文献

- [1] Y. Nakamura, Yu. A. Pashkin and J. S. Tsai: Nature **398** (1999) 786.

- [2] T. Hayashi, T. Fujisawa, H-D. Cheong, Y-H. Jeong and Y. Hirayama: cond-mat/0308362 :  
to be published in Phys. Rev. Lett.
- [3] T. Tanamoto: Phys. Rev. A **61** (2000) 22305.
- [4] D. Loss and D. P. DiVincenzo: Phys. Rev. A **57** (1998) 120.
- [5] Y. Makhlin, G. Schön and A. Shnirman: Rev. Mod. Phys. **73** (2001) 357.
- [6] D. A. Averin: Solid State Commun. **105** (1998) 659.
- [7] V. Bouchiat, D. Vion, P. Joyez, D. Esteve and M. H. Devoret : Phys. Scr. **T76** (1998) 165.
- [8] T. Fujisawa and Y. Hirayama: Appl. Phys. Lett **77** (2000) 543.
- [9] P. Dutta and P. H. Horn: Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 497.
- [10] T. Itakura and Y. Tokura : Phys. Rev. B **67** (2003) 195320.
- [11] T. Itakura and Y. Tokura : J. Phys. Soc. Jpn. **72** (2003) 2726.
- [12] Y. Nakamura, Yu A. Pashkin, T. Yamamoto and J. S. Tsai: Phys. Rev. Lett. **88** (2002)  
047901.
- [13] E. Paladino, L. Faoro, G. Falci and R. Fazio: Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 228304.
- [14] A. Shnirman, Y. Makhlin and G. Schön: Phys, Scr. **T102** (2002) 147.
- [15] T. Miyadera and A. Shimizu : quant-ph/0109065
- [16] Y. M. Galperin and K. A. Chao: Phys. Rev. B **52** (1995) 12126.
- [17] R. Bauernschmitt and Yuli V. Nazarov: Phys. Rev. B **47** (1992) 9997.
- [18] Yu. A. Pashkin, T. Yamamoto, O. Astafive, Y. Nakamura, D. V. Averin and J. S. Tsai :  
Nature **421** 823 (2003).
- [19] G. Massimo, K. A. Suominen and A. K. Ekert : Proc. R. Soc. Lond. A **452** 567 (1996).