

## バルハン砂丘の衝突・合体・分裂

大阪大学理学研究科物理学専攻・大阪大学サイバーメディアセンター 勝木 厚成<sup>1</sup>  
 大阪大学理学研究科宇宙地球科学専攻 遠藤 徳孝  
 大阪府立大学工学研究科数理工学分野 西森 拓

### 1 はじめに

砂丘は砂の量や風向きによって様々な空間パターンをとることが知られている [1, 2]。特にバルハンという三日月型の砂丘は特徴的で見た目にも美しいので、数多くの研究がなされてきた。また最近、バルハンは地球上だけでなく火星にも存在することが報告され、その形態から火星の風土などをすることができると注目されている。

いままでの多くの研究は、一つの孤立したバルハンの形成や移動速度に注目しておこなわれてきた。しかし、バルハンが一つだけで存在する場合は少なく、多くの場合、周りにも多くのバルハンが存在している。そして、それらは砂粒の流れを通して相互作用している。相互作用の中でも、特に劇的な変化を起こすのが砂丘同士の衝突である。しかし、砂丘の衝突のタイムスケールは長く、その過程を観測などで追うことは難しいため、ほとんど研究されてこなかった [3]。近年、水槽の中で砂丘の形成が可能になり、様々な実験ができるようになってきた。今回、我々はその水槽実験の中で見られた砂丘の衝突、分裂過程をシミュレーションで再現し、その振る舞いを議論していく。

### 2 砂丘模型

砂丘は風と砂の相互作用で形作られる。流体力学としての風と粉粒体としての砂を同時に扱うのははなはだ難しい。現在、風を流体として解いたモデルに Jackson-Hunt モデル [4] があり、これを使用した砂丘モデルがいくつかある [5, 6]。だが Jackson-Hunt モデルは一つの丘についてナビエーストクス方程式を摂動的に解いたものなので二つの丘にたいしても適用できるかは少し疑問が付きまとう。そこで今回は、定量的評価を多少下げても定性的になにが起こっているかを知ることが目標とする。そのための砂丘を再現するもっとも簡単なモデルとして、Coupled lattice model をつかうことにする。このモデルは Field を格子状に分割し、その上の砂を一粒ずつみるのではなく砂の塊で砂の移動をみるというものであり、砂丘形態の再現性に優れていることが示されている [7, 8]。

今回使用するモデルでは2つのプロセスをひたすらくり返す。1つめは Saltation で、砂が風によって運ばれる効果を表している。いま、単位時間に飛ぶ距離  $Q_L$  と飛ぶ砂の量  $Q_M$  を以下の式のように定義する。

$$Q_L = a + bh(t) - ch(t)^2 \quad (1)$$

$$Q_M = d \quad (2)$$

ここで、 $h(t)$  は砂の高さをあらわし、パラメータは  $a=2.0, b=0.5, c=0.01, d=0.1$  とする。この概念図を図1の左図に示す。ただし、Saltation は風上斜面でしかおきないとする。第1式は、次の2つの効果を取り入れた最も簡単な式である。i) 砂丘の頂上の Saltation flux はその高さが増加す

<sup>1</sup>E-mail: katsuki@cp.cmc.osaka-u.ac.jp

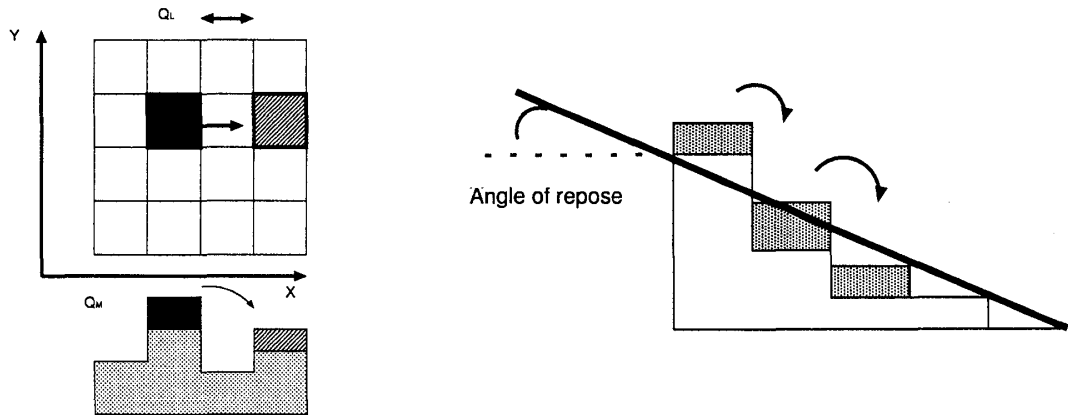


図 1: 左図: Saltation の概念図、右図: Avalanche の概念図

るに従って増えていく。これは the wind speed up と呼ばれており、観測から示唆されている。ii) 砂丘の頂上の Saltation flux は高さに比例するよりかはゆっくりと増加する。そうしないと、後で述べるような速度が高さに反比例するという関係がでてこないからである。ただし、シミュレーションでは Saltation は式 (1) の増加関数部分だけを使うことにする。

2つめのプロセスは Avalanche(雪崩)である。これは、砂の一般的な性質で、斜面が安息角より大きくなると斜面の最も急勾配の方向へ砂を流すプロセスである。この概念図を図 1 の右図に示す。今、砂の安息角は  $34^\circ$  としてある。実際の simulation ではまず saltation で砂を飛ばし、次に avalanche を起こしそれが落ち着くまで何度も繰り返す。そして落ち着いてからまた saltation で砂を飛ばす。ここで注意しないといけないのは、実験では avalanche が落ち着く前に saltation が起こっているかもしれないということである。しかし、avalanche と saltation の起こるタイムスケールはよく分からないので、今回は上記のようにする。今後この調査は必要である。

いまから、このモデルが砂丘モデルとして妥当であるかをみていく。観測よりバルハンの幅  $W$  と長さ  $L$  は高さ  $H$  に比例すること、移動速度  $V$  は高さに反比例することが知られている。この関係をシミュレーションで確認していく。まず、初期条件として Gaussian の砂山を用意する。境界条件は準周期境界条件を用いることにする。この条件はシミュレーションフィールドからでていった砂を風上境界から一様に分布させるというもので、これによりフィールド内では砂量一定の状態が保たれる。これらの条件によって得られた高さ と 長さ、幅の関係グラフを図 2(a)、図 2(b) に示す。点が simulation から得られた値で、これらは、

$$L = a_L h + b_L \quad (3)$$

$$W = a_W h + b_W \quad (4)$$

で fit すると、 $a_W = 4.24$ ,  $b_W = 9.29$ ,  $a_L = 3.10$ ,  $b_L = 3.04$  が得られる。また、移動速度のグラフを図 2(c) に描く。実線は移動速度  $V$  を

$$V = Q/(h + h_c) \quad (5)$$

に従うと仮定して fit したものである。これから  $Q=1.43$ ,  $h_c=8.56$  が得られる。これらより、このモデルが砂丘モデルとして使用可能であること確認できた。

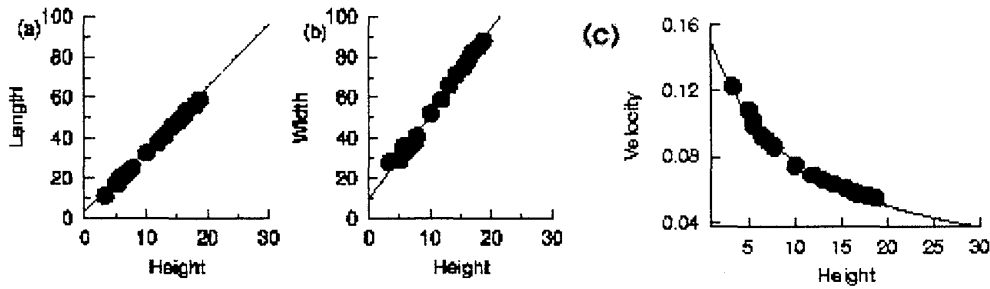


図 2: (a) 高さとの長さの関係,(b) 高さとの幅の関係,(c) 高さとの速度の関係

### 3 2 砂丘衝突シミュレーション

このモデルを使って2つの砂丘を衝突させてみる。衝突させる砂丘は準周期境界条件で定常状態になったものである。境界条件は自由境界にする。なぜなら、もし風上境界から砂を一様に供給すると風上の砂丘部分には供給されるが、風下の一部には供給されないという違いがでてくるからである。まず最初に、中心軸位置が同じ場合の2砂丘の時間発展を図3(左図)に示す。質量比は  $\rho = M_w/M_l = 0.4$  (風上砂丘の質量を  $M_w$ 、風下砂丘の質量を  $M_l$ ) である。風上砂丘は風下砂丘の一部をえぐっていき、しばらくすると吸収されてしまう。このとき、一時的にいびつな形になるが最終的には三日月型にもどっていく。次に、風上砂丘の中心位置をずらした以外は同じ条件での時間発展を図3(右図)に示す。いま、中心軸のずれは  $X_c = 0.3W_l$  ( $W_l$  は風下砂丘の幅) に設定した。風上砂丘は風下砂丘の一部をえぐりながらすすんでいくのが分かる。このとき、風下砂丘の分離しようとしている部分は風上砂丘に押されて進んでいるように見える。そして、砂丘が分離していくとき、元の砂丘との間に砂の道をつくっている。完全に分離した後、砂丘はまた三日月型にもどっていった。今回のシミュレーションでは砂丘の衝突位置を変えることで、合体や分裂することがわかった。ここで風上砂丘の大きさと中心軸位置のずれをパラメータとして、合体と分裂の相図をつくった(表1)。質量比が小さく、中心軸位置のずれが小さいときに合体が起こり、質量比が大きく、中心軸位置のずれが大きいとき分裂がおきるのがわかる。これは今後実験や観測と比較するとき重要である。

中心軸のずれ ( $\times W_l$ )	質量比								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	×	×	×	×	×	×	×	×	×
0.1	×	×	×	×	×	×	×	×	○
0.2	×	×	○	○	○	○	○	○	○
0.3	×	○	○	○	○	○	○	○	○
0.4	○	○	○	○	○	○	○	○	○
0.5	○	○	○	○	○	○	○	○	○

表 1: 風上砂丘と風下砂丘の質量比 (風下砂丘の質量を 1 として) と中心軸のずれ (風下砂丘の幅  $W_l$  を 1 として) をパラメータとしたときの合体、分裂の相図、 $\times$ =合体、 $\circ$ =分裂

さて、合体と分裂現象のシミュレーションはできた。では、なぜこのような現象が起きるのだろうか。次にこれに注目したい。調べることは合体と分裂の場合になにが違うのを調べるのが妥

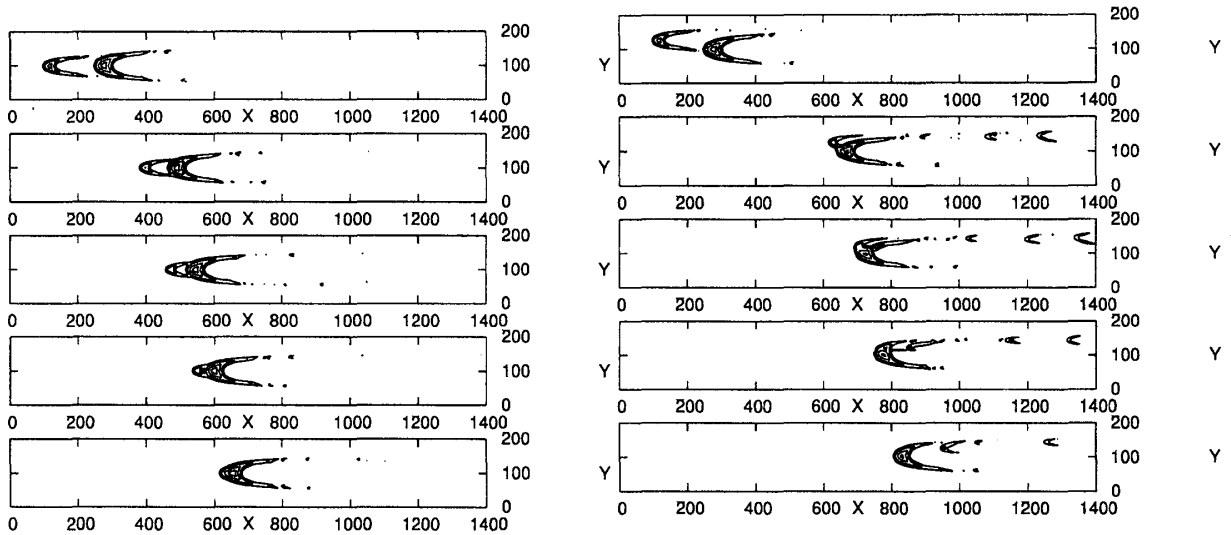


図 3: 2 砂丘の時間発展 (等高線は外側から 1,5,10,15): (左図) 風上砂丘と風下砂丘の中心軸が同じときの時間発展。合体を表している。上から  $t=1000, 5000, 6000, 7000, 8000$ : (右図) 風上砂丘と風下砂丘の中心軸がずれているときの時間発展。分裂を表している。上から  $t=1000, 8000, 9000, 10000, 11000$

当である。そこで、風向き方向に平行に砂丘の断面図をつくり、その時間発展を調べることにした。図 4 の左図に合体の場合の  $X_c=0$  の断面図を示す。風上砂丘の高さ ( $H_1$ ) と (風上砂丘と風下砂丘の間の) 谷の高さ ( $H_v$ ) が同じ高さになり、合体していることが分かる。図 4 の右図に分裂の場合の  $X_c=0.2W_l$  の断面図を示す。風上砂丘の高さ ( $H_1$ ) と風下砂丘の高さ ( $H_2$ ) で、高さの入れ替わりが起こっているのがみられる。これから言えることは、高さが入れかわる速さと、谷の埋まる速さの比で合体と分裂が起きる。つまり、高さが入れかわる速さのほうが速いと分裂が起り、遅いと合体が起きるということである。

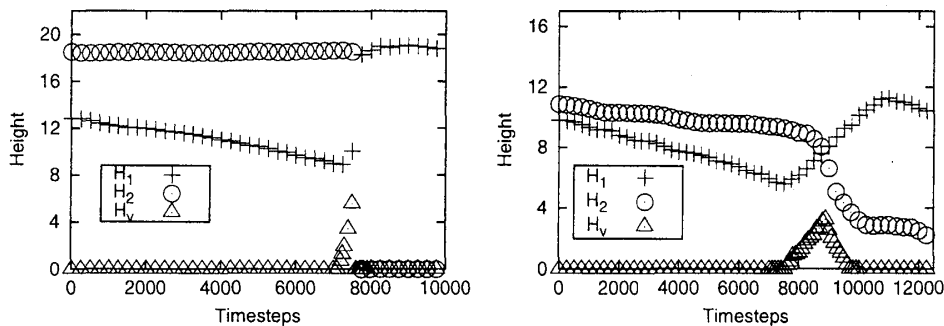


図 4: 合体 (左図)、分裂 (右図) の時の風上砂丘 (+)、風下砂丘 (o)、谷 ( $\Delta$ ) の時間発展

#### 4 現象論的發展方程式

この高さの入れ替わり (風上砂丘が大きくなり、風下砂丘が小さくなる) がなぜ起きるかを考えてみる。風上砂丘は風下砂丘の風上斜面を登っていくから、高くなるというのは簡単にわかる。次に風下砂丘が小さくなる理由について考えてみる。まず、砂丘がひとつだけある場合を考えると、

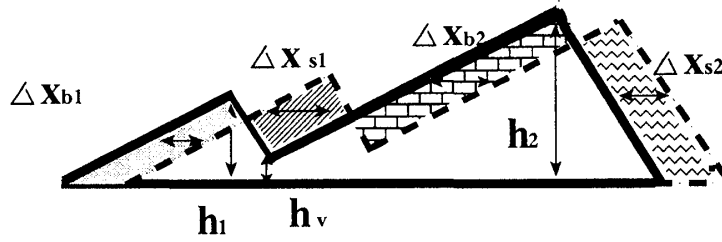


図 5: 衝突中の時間発展の概念図 (断面図)

それが形や高さを保って移動していくためには、風上斜面で減った砂が風下斜面に供給される必要がある。逆に言うと、砂の Mass balance が保たれていれば砂丘は同じ高さのままである。いま、2つの砂丘の衝突の場合を考えると、風上砂丘は風下砂丘の風上斜面にのっている。そのため風上砂丘のかぶさった部分の砂は風下砂丘の風下斜面には供給されない。したがって、砂丘が相似だとすると、風下砂丘の高さは低くならざるを得ない。

この考えで砂丘の高さの入れ換わりが再現できるかをみていく。このとき2つの仮定をおく。1、砂丘の形は相似とする。2、風上斜面からとんだ砂はその砂丘の風下斜面につかまえられる。つぎに、 $t$ 秒後(実線)と $t+1$ 秒後(破線)の砂丘断面図(図5)を考える。そこから、砂の量が減った部分と増えた部分を幾何学的に計算する。ここで、 $t$ 秒後の風上砂丘の頂点の高さを $h_1$ 、風下砂丘の頂点の高さを $h_2$ 、谷の高さを $h_v$ 、風上砂丘、風下砂丘それぞれの風上斜面の減少分の水平方向長さを $\Delta x_{b1}$ 、 $\Delta x_{b2}$ 、風上砂丘、風下砂丘の風下斜面部分のそれぞれの増加分の水平方向長さを $\Delta x_{s1}$ 、 $\Delta x_{s2}$ として、風上砂丘と風下砂丘でのそれぞれの砂量の釣り合いを考えると

$$h_1 \Delta x_{b1} - \frac{(\Delta x_{b1})^2 A}{2} = (h'_1 - h'_v) \Delta x_{s1} - (\Delta x_{s1})^2 A \equiv q_1 \quad (6)$$

$$(h_2 - h'_v) \Delta x_{b2} - (\Delta x_{b2})^2 A = h_2 \Delta x_{s2} - \frac{(\Delta x_{s2})^2 A}{2} \equiv q_2 \quad (7)$$

になる。ここで'は $t+1$ 秒後のそれぞれの砂丘と谷の高さ。また、幾何学的な関係より

$$\begin{cases} h'_1 = h_1 + (\Delta x_{s1} - \Delta x_{b1}) A \\ h'_2 = h_2 + (\Delta x_{s2} - \Delta x_{b2}) A \\ h'_v = h_v + (\Delta x_{s1} - \Delta x_{b2}) A \end{cases} \quad (8)$$

が求まる。ここで、 $A$ は頂上付近の三角形の(高さ)/(底辺)を表した値である。また、 $q_1$ 、 $q_2$ はそれぞれ風上砂丘と風下砂丘で風上斜面から風下斜面に移動した砂量である。ここでは $q = Q_M \cdot Q_L$ とする。Eq.(6),(7),(8)より、 $\Delta^2$ の項を無視すると、

$$\dot{h}_1 = q_1 A \left( \frac{1}{h_1 - h_v} - \frac{1}{h_1} \right) \quad (9a)$$

$$\dot{h}_2 = q_2 A \left( \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_2 - h_v} \right) \quad (9b)$$

$$\dot{h}_v = A \left( \frac{q_1}{h_1 - h_v} - \frac{q_2}{h_2 - h_v} \right) \quad (9c)$$

これを数値計算する。 $h_1=10.0$ 、 $h_2=2.0$ 、 $h_v=0.1$ のときの結果を図6(左図)に示す。ここで、風上砂丘と谷の高さの差がある定数値以下(いまの場合、saltation量)になると合体したとみなすこ

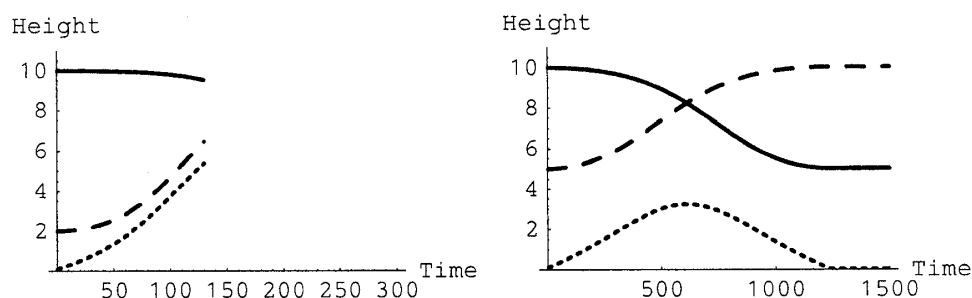


図 6: 方程式 (9) を解いて得られた砂丘の高さの時間発展 (風上砂丘 (破線)、風下砂丘 (実線)、谷 (点線)): 左図: 合体を表している、右図: 分裂を表している。

とにする。そうすると谷の高さが風上砂丘の高さに追いつき、合体していることがわかる。また  $h_1=10.0$ ,  $h_2=5.0$ ,  $h_V=0.1$  のときの結果を図 6(右図) に示す。風上砂丘の高さが風下砂丘の高さと入れ換わって分裂していくことがみてとれる。

## 5 結論

単純なモデルを用いて 2 つのバルハン砂丘の衝突現象をシミュレーションした。この振る舞いはいくつかの特徴を示している。1、風上砂丘が近づくことによって風下砂丘の一部がえぐれる。2、分裂するとき、離れていく砂丘はしばらくの間、元の砂丘と砂の道のようなものを通してつながっている。3、衝突途中はいびつな形をしても、最終的には三日月型にもどる。次に砂丘断面でそれぞれの砂丘高さの時間発展をみることによって、分裂するときには、風上砂丘と風下砂丘の高さが入れかわること、合体するときには風上砂丘の高さと谷の高さが同じになって合体することがわかった。また、砂の Mass balance から発展方程式を導き、その振る舞いは simulation の合体、分裂と同じであることをみた。

## 参考文献

- [1] R. A. Bagnold, The Physics of Blown Sand and Desert Dunes (Methuen, London, 1941)
- [2] K. Pye and H. Tsoar, Aeolian Sand and Sand Dunes (Unwin Hyman, London, 1990)
- [3] V.Schwammle and H.J.Herrmann, Nature **426** (2003), 619.
- [4] P.S. Jackson and J.C.R. Hunt, J. R. Meteorol. Soc. **101**(1975) 929.
- [5] B. Andreotti, P. Claudin and S. Douady, Eur. Phys. J. B. **28** (2002) 321.
- [6] B. Andreotti, P. Claudin and S. Douady, Eur. Phys. J. B **28** (2002) 341.
- [7] B.T. Werner, Geology **23** (1995) 1107.
- [8] H. Nishimori, M. Yamasaki and K.H. Andersen, Journal of Modern physics B **12** (1998) 256.