

手の巧みさと解析力学： ベルンシュタイン問題（身体運動の謎）への挑戦*

有本 卓

立命館大学工学部ロボティクス学科

(2004年6月7日受理)

1. はじめに

人間はインテリジェンスを外界との相互作用によって獲得する。幼児が手で物をさわり、つかみ、足をばたつかせ、そして両親との柔らかい接触を通して脳の中に何かを取り込む。発達心理学では幼児の詳細な行動観察から、“sensory-motor coordination”によってインテリジェンスが創発することを仮説し始め、そこには幼児の身体（body）と手足（limb）が環境、および、物体との織りなす全体のダイナミクスが本質的な働きをすると主張している [1]。他方、ロシアの生理学者 N. ベルンシュタイン（Nicholas Bernstein）は、自身が “The Science of Human Movements”（身体運動の科学）と呼んだ未知の科学分野が存在することを指摘し、1932～1962年にわたって膨大な論文を残した。それらの一部は復刻されている [2]。ベルンシュタインが考察した身体と脳をめぐる問題は多岐にわたるが、Hinton[3] はそれらを要にして簡明に次のようにまとめている。

a) What can we infer about the code that the brain uses to communicate with the periphery, and what does that tell us about how the computation is organized?

b) If the brain knew just what movements it wanted the body to make, could it figure out what to tell the muscles in order to make it happen?

c) How is it possible to coordinate a system with so many degrees of freedom that interact in such complex ways?

d) How does the brain make sensible choices among the myriad possibilities for movement that the body offers?

1984年、Hinton[3] は、1980年に見出されたロボット制御のための計算トルク法の高速度アルゴリズムに言及し、ロボティクス研究との関連も論じている。ここでは、上述した後半の二つの問題、すなわち、ベルンシュタイン問題の中心である冗長自由度系の逆問題（ベルンシュタインはこれを “Degrees of Freedom” と呼んだが、ロボティクスでは “redundancy resolution problem” と呼ぶ [4]）についてロボティクスの最新の研究成果から考え直してみる。すなわち、ころがり接触を許し、冗長自由度をもつ多指ハンドが、劣駆動系になるにもかかわらず、適当な感覚フィードバックを見出せば、逆運動学を解くことなく、動力学的には自然に、閉ループダイナミクスが指定した姿勢角をもつ安定把持状態に収束することを証明する。また、もっと単純に、幾何拘束を受けない手先自由の冗長多関節リーチング運動（multi-joint reaching）について、逆運動学を解くことなく、ま

*本稿は、編集部の方から特にお願ひして執筆していただいた記事である。

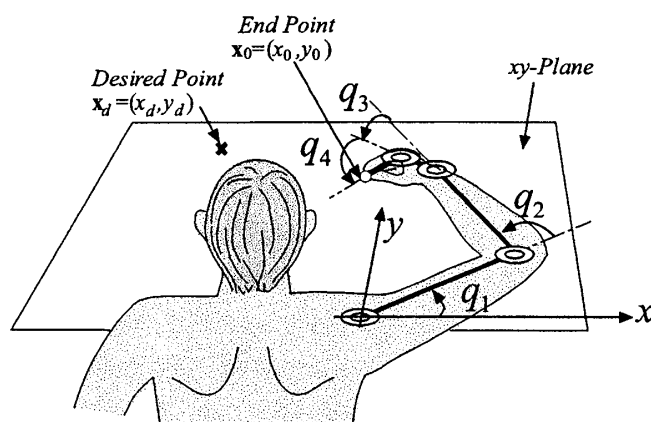


図 1: 目標手先位置 $x_d = (x_d, y_d)$ に向かう reaching 運動. 四つの関節の回転軸はすべて xy 平面に垂直であり, 運動は 2次元面に閉じられているとする.

た, 逆運動学を一意に解くための人為的な評価関数を導入することなく, 作業座標フィードバックのみによって閉ループ系が自然に所望の手先位置の状態に収束することを示す. これらの収束性の証明には, 新たに導入した多様体上の安定性の概念や部分多様体への可遷移性の定義が重要な役割を演じる.

そもそもベルンシュタインが初めて指摘した身体運動の謎とは, 腕と手による単純な 2次元平面内のリーチング運動に典型的に現れている. 図 1 に見るように, 肩, 肘, 手首, および人差指の付け根の四つの関節変数 $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T$ に対して, xy 平面のリーチング目標点を (x_d, y_d) を指定したとき, 人間は運動 (これを q の時間関数 $q(t)$ と見る) をどのように生成しているか, と問うたのである. 明らかに q が与えられると, 人差指の先端位置は q の関数 $(x(q), y(q))$ によって定まる. しかし, $(x(q) = x_d, y(q) = y_d)$ を与える q は無限にあり, 逆は一意に定まらない. これを逆運動学的不良設定性 (ill-posedness of inverse kinematics) と呼んだ. この問題は生理学においても, ロボティクスにおいても, 21 世紀に至るも未解決のままになっているのである.

第 2 節では, 平面リーチング運動について, 多様体上の安定性を定義しつつ, 逆運動学を全く解かずに, リーチング運動が, 自然に, かつ動学的に生成できることを論じる. ただし, 証明は数学的な完璧を企図するには紙数を要するので, その一部は概略にとどめ, 付録にゆずる. 第 3 節では, ころがり接触を許したときの多指ハンドと物体の全体のダイナミクスを導出し, それが冗長自由度かつ劣駆動のシステムになることを示す. なお, このようなクラスに属するダイナミクスの動学的解析は, 今迄, 解析力学やロボティクスにおいて全く手がつけられていなかったことに言及しておく. 第 4 節では, 物体の回転モーメントのバランスや姿勢角制御に本質的な感覚フィードバック信号が存在することを示し, 第 5 節では, これらから構成された制御入力によって, 閉ループダイナミクスが指定した物体姿勢角をもつ安定把持状態に収束することを示す. なお, 証明は概略にとどめ, 詳細は別の論文 [5] ~ [8] にゆずる. 第 6 節では, 第 4 節で述べた問題に関する計算機シミュレーションの結果を示すとともに, 感覚フィードバックのゲイン調節の問題を議論し, ここに人間の筋肉の収縮時の力/速度の特性に関する Hill のモデルが重要な働

きを示す。第7節では、これらのロボティクス研究で得られた結果の意味を身体運動の科学と生理学の観点から論じてみる。

本論文の目的は、日常生活で普通に行う手足の運動について、いざ解析を試みるととても複雑で困難に見える力学的对象を、解析力学で扱えるようにすることにある。言い換えると、複雑に見えるばかりで、解析できないと思われていた手足の運動の織りなす巧みさが、拘束のある冗長自由度系にこそ特長的に創発することを、装いを新たにした解析力学によって示すことにある。

2. 腕と手、指が一体となった“Reaching”運動

逆運動学的な不良設定性が感覚フィードバックによって解消できる典型例を手先自由なロボット作業について見る。実際、運動生理学の分野におけるベルンシュタイン問題は“Reaching”について考察された。図1のように、肩、肘、手首、人差指の付け根関節の四つの関節を回転させる平面運動を考え、任意の初期姿勢から指先を目標位置 (x_d, y_d) に到達させる Reaching 問題を解析する。ラグランジュの運動方程式は、その関節ベクトルを $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T$ で表すと、

$$H(q)\ddot{q} + \left\{ \frac{1}{2}\dot{H}(q) + S(q, \dot{q}) \right\} \dot{q} = u \quad (1)$$

となる。 $H(q)$ は慣性行列であり、 $S(q, \dot{q})$ は歪対称である。そこで、指先の目標位置をカーテシアン座標系で $x_d = (x_d, y_d)$ と表し、また、指先の位置 $x = (x, y)^T$ は常に目視できるとして、感覚フィードバック

$$u = -C\dot{q} - J^T(q)K\Delta x \quad (2)$$

を考える。ここに、右辺第一項はダンピング成形項であり、第二項の K は適当な正定対角行列、 $J(q)$ は $x = (x, y)$ の関節座標 q によるヤコビアン行列である。これを式(1)に代入すると閉ループダイナミクス

$$H(q)\ddot{q} + \left\{ \frac{1}{2}\dot{H}(q) + S(q, \dot{q}) + C \right\} \dot{q} + J^T(q)K\Delta x = 0 \quad (3)$$

が得られる。こうして、問題は、逆運動学的には不良設定であるにもかかわらず（つまり、与えられた x_d に対して、 $x(q) = x_d$ を実現する q が一意に定まらない）、人為的な評価関数を全く導入しないで、ダンピング成形と単なる作業座標による位置フィードバックだけで、任意の位置 $x^0 = (x_0, y_0)$ から出発した閉ループダイナミクス(3)の解軌道が目標の位置 (x_d, y_d) に収束するかどうかになる。ちなみに、関節速度ベクトル \dot{q} と式(3)との内積を取ると

$$\frac{d}{dt}E = -\dot{q}^T C \dot{q} \quad (4)$$

となることが判る。ここに

$$E(q, \dot{q}, \Delta x) = \frac{1}{2}\dot{q}^T H(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\Delta x^T K \Delta x \quad (5)$$

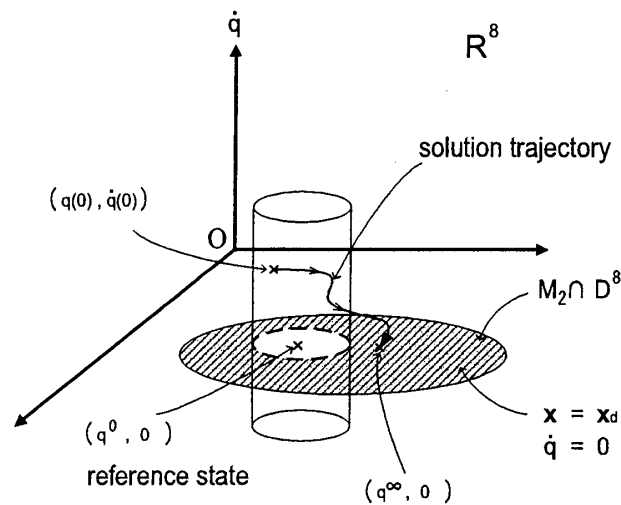


図 2: 静止した (速度=0) 参照状態 $(q^0, 0)$ の安定性とその近傍の可遷移性の定義。

である。残念ながら、スカラ量 E は状態空間 $(q, \dot{q}) \in R^8$ では正定ではないので、ここではリヤプノフの安定論は使えない。

上で導入したスカラ量 E は状態空間 R^8 では正定ではないが非負定である。そこで、 $E = 0$ となる多様体

$$M_2 = \{(q, \dot{q}) : \dot{q} = 0, \mathbf{x}(q) = \mathbf{x}_d\}$$

を考えよう。 R^8 の部分集合でヤコビアン行列 $J(q)$ が full rank (non-degenerated) である領域 D^8 を想定し、部分多様体 $M_2 \cap D^8$ を考える。そこで、 $M_2 \cap D^8$ のある状態 $(q^0, 0)$ を考え、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し、その δ 近傍 N^δ (R^8 の近傍) の任意の点から出発した解が ε 近傍にとどまるとき、 $(q^0, 0)$ は多様体 M_2 上で安定であると定義する (図 2 参照)。そして、式 (3) の閉ループダイナミクスについて、 $M_2 \cap D^8$ の任意の点が多様体安定になることを示すことができる。

なお、従来のロボット研究では、作業座標が時間軌道 $\mathbf{x}_d(t)$ で与えられたとき、関節軌道を $\dot{\mathbf{x}}_d(t) = J(q_d(t))\dot{q}_d(t)$ と求め、ヤコビアン行列 J の擬似逆行列 $J^+(q_d(t))$ を求めて、所望の関節軌道を $\dot{q}_d(t) = J^+(q_d(t))\dot{\mathbf{x}}_d(t)$ とすることが提案された [9]。しかし、この方法では、 $q_d(t)$ そのものが決められないので、実際には $J^+(q_d(t))$ を計算できない。そこで、目標位置 \mathbf{x}_d に対して、制御入力を

$$u = -C\dot{q} - J^T(q)K\Delta\mathbf{x} + (I_4 - J^+(q)J(q))v \quad (6)$$

とし、 v を何らかの評価関数を最適化することによって一意に定め、こうして制御入力を決める。 $v(t)$ と $J^+(q(t))$ は実時間計算できねばならないが、人工的な評価関数としては、ジャーク (加速度の微分) の 2 次形式 [10]、加速度の 2 次形式 [11]、トルク [4]、トルク変化 [12]、可操作性 [13]、等々、様々な提案があった。しかし、何ら人為的な評価関数を導入せずに、式 (2) の作業座標フィードバックのみによって閉ループダイナミクスが収束し得るとは今迄全く予想だにされなかったのである。

表 1: 人間の手足とロボットのサイズ効果と冗長性

Physical Quantities Robot	Length (link, radius)	Mass	Inertia Moment	World	Redundancy of DOF
Fingers & Hand	1 ~ 5 [centimeter]	0.5 ~ 50 $\times 10^{-2}$ [kg]	1.0 ~ 50.0 $\times 10^{-6}$ [kgm ²]	Centimeter World	Highly Redundant
Human Arm	10 ~ 30 [centimeter]	0.2 ~ 2.0 [kg]	0.5 ~ 5.0 $\times 10^{-2}$ [kgm ²]	Deca- Centimeter World	Universal Joints (Wrist & Shoulder)
Robot Manipulator	0.1 ~ 0.8 [meter]	1.0 ~ 25.0 [kg]	2.5 ~ 50.0 $\times 10^{-2}$ [kgm ²]	Sub-Meter World	Non- Redundant

ここでは、年齢が5歳の児童のサイズに基づいた図1のような自由度4の腕と手による平面リーチングを取り上げる。そのとき、上腕、下腕、掌、指の各関節まわりの慣性モーメントは大きく異なる。実際、腕を長さ l 、質量 m の丸棒としてみたとき、慣性モーメントは $I = (1/4)ml^2$ となり、 m が l^3 に比例するので、 I は代表長さ l の5乗のオーダーになる。このことから、表1に示すように、人間の腕、手、指や産業用ロボットの部材リンクの慣性モーメントは長さに比して著しく異なる。実際、5歳児のサイズを表2に表すが、本サンプルの児童の身長は107 [cm]で体重は15.5 [kg]であり、身長は大人の女性の約2/3である。しかし、5歳児の腕、手、指の慣性モーメントは大人の約1/10のオーダーになることに注意されたい。このことはリーチング運動の収束性の速さに大きく効き、また、遠心力などの非線形効果が大人の場合ほど大きくはならないので、解析は少しだけ易くなる。

さて、表2のサイズの例について、表3に示す初期条件（これは図3のようになる）、表4の各ゲインのもとでリーチングさせてみたい。ここに、制御入力 u は式(2)とし、 $C = \text{diag}(c_1, c_2, c_3, c_4)$ 、 $K = kI_4$ とし、初期時刻 $t = 0$ における関節速度はすべて0であるとする。このとき、閉ループダイナミクスは式(3)で表されるが、式(4)から、式(5)で定義される E が非負であり、 E の値は時刻 t について単調非増加であるから、

$$\begin{aligned}
 E(t) &= E(q(t), \dot{q}(t), \Delta \mathbf{x}(t)) = \frac{1}{2} \dot{q}^T(t) H(q(t)) \dot{q}(t) + \frac{k}{2} \|\Delta \mathbf{x}(t)\|^2 \\
 &\leq \frac{k}{2} \|\Delta \mathbf{x}(0)\|^2 = E(0)
 \end{aligned} \tag{7}$$

である。このことから、指先は \mathbf{x}_d を中心とした半径 $r_0 = \|\Delta \mathbf{x}(0)\| = 12.75$ [cm]の内円にとどまることが判る。このことに注意しながら、関節ベクトルを次のように変数変換しよう。

$$\mathbf{p} = C^{1/2} \mathbf{q} \tag{8}$$

表 2: 5 歳児の上腕 (l_1), 下腕 (l_2), 掌 (l_3), 指 (l_4) に関する, 質量と慣性モーメント (質量中心まわり). なお, 掌は厚さ 21 [mm] の立方体とし, その他は丸棒として計算した.

arm	link1 length	l_1	0.175 [m]
	link2 length	l_2	0.170 [m]
	link3 length	l_3	0.060 [m]
	link4 length	l_4	0.060 [m]
	link1 cylinder radius	r_1	0.0247 [m]
	link2 cylinder radius	r_2	0.0223 [m]
	link3 cuboid height	h_3	0.060 [m]
	link3 cuboid depth	d_3	0.021 [m]
	link4 cylinder radius	r_4	0.00509 [m]
	link1 mass	m_1	0.335 [kg]
	link2 mass	m_2	0.266 [kg]
	link3 mass	m_3	0.0756 [kg]
	link4 mass	m_4	0.00488 [kg]
	link1 inertia moment	I_1	9.07×10^{-4} [kgm ²]
	link2 inertia moment	I_2	6.73×10^{-4} [kgm ²]
	link3 inertia moment	I_3	2.55×10^{-5} [kgm ²]
link4 inertia moment	I_4	1.50×10^{-6} [kgm ²]	

そして,

$$\begin{cases} \bar{H}(p) = C^{-1/2} H(q) C^{-1/2}, & \bar{J}(p) = J(q) C^{-1/2} \\ \bar{S}(p, \dot{p}) = C^{-1/2} S(q, \dot{q}) C^{-1/2} \end{cases} \quad (9)$$

と置くと, 明らかに $\partial x / \partial p = J(q) C^{-1/2} = \bar{J}(p)$ となるので, 運動方程式 (3) は

$$\bar{H}(p) \ddot{p} + \left(\frac{1}{2} \dot{\bar{H}}(p) + \bar{S}(p, \dot{p}) \right) \dot{p} + \dot{p} + k \bar{J}^T(p) \Delta x = 0 \quad (10)$$

と書ける. 表記を簡明にするため, 以後, H や S , J の上につけた記号 “-” は混乱が生じない限り省略し, また, 変数 p や \dot{p} の表記も省略することがある. まず, 式 (9) と $(\dot{p} + \alpha k J^T \Delta x)$ との内積をとると,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{p}^T H \dot{p} + \frac{k}{2} \|\Delta x\|^2 + \frac{\alpha k}{2} \|\Delta x\|^2 \right) + \|\dot{p}\|^2 \\ & + \alpha k^2 \|\bar{J}^T \Delta x\|^2 + \alpha k \Delta x^T J H \dot{p} + \alpha k \Delta x^T J \left(\frac{1}{2} \dot{H} + S \right) \dot{p} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

となる. ところで,

$$\alpha k \Delta x^T J H \ddot{p} = \frac{d}{dt} (\alpha k \Delta x^T J H \dot{p}) - \alpha k \Delta x^T J \dot{H} \dot{p} - \alpha k \Delta x^T \dot{J} H \dot{p} - \alpha k \dot{p} J^T J H \dot{p} \quad (12)$$

となることに注意すれば，式 (11) は次のように書き直すことができる。

$$\frac{d}{dt} \left[\left\{ \frac{1}{2} (\dot{p} + \alpha k J^T \Delta \mathbf{x})^T H (\dot{p} + \alpha k J^T \Delta \mathbf{x}) \right\} + \frac{k}{2} \Delta \mathbf{x}^T \left\{ (1 + \alpha) I_2 - \alpha^2 k J H J^T \right\} \Delta \mathbf{x} \right] + \|\dot{p}\|^2 + \alpha k^2 \|J^T \Delta \mathbf{x}\|^2 + \alpha k h(\Delta \mathbf{x}, \dot{p}) = 0 \quad (13)$$

ここに

$$h(\Delta \mathbf{x}, \dot{p}) = \Delta \mathbf{x}^T J \left(-\frac{1}{2} \dot{H} + S \right) \dot{p} - \Delta \mathbf{x} J H \dot{p} - \dot{p}^T J^T J H \dot{p} \quad (14)$$

と置いた。以下では $\alpha = 1.0$ として，

$$W(k; \Delta \mathbf{x}, \dot{p}) = \frac{1}{2} (\dot{p} + k J^T \Delta \mathbf{x})^T H (\dot{p} + k J^T \Delta \mathbf{x}) + \frac{k}{2} \Delta \mathbf{x}^T \left\{ 2I_2 - k J H J^T \right\} \Delta \mathbf{x} \quad (15)$$

と定義しよう。また，次のような式の変形が成立することにも注意する。

$$\begin{aligned} -\|\dot{p}\|^2 - k^2 \|J^T \Delta \mathbf{x}\|^2 &= -\gamma \left\{ \frac{1}{2} \dot{p} H \dot{p} + k \|\Delta \mathbf{x}\|^2 + k \Delta \mathbf{x}^T J H \dot{p} \right\} - \dot{p}^T \left(I_4 - \frac{\gamma}{2} H \right) \dot{p} \\ &\quad - k \Delta \mathbf{x}^T (k J J^T - \gamma I_2) \Delta \mathbf{x} + \gamma k \Delta \mathbf{x}^T J H \dot{p} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\gamma k \Delta \mathbf{x}^T J H \dot{p} \leq \gamma k \Delta \mathbf{x}^T J H J^T \Delta \mathbf{x} + \frac{\gamma k}{4} \dot{p}^T H \dot{p} \quad (17)$$

これらより，式

$$\begin{aligned} -\|\dot{p}\|^2 - k^2 \|J^T \Delta \mathbf{x}\|^2 &\leq -\gamma W(k; \Delta \mathbf{x}, \dot{p}) - \dot{p}^T \left(I_4 - \frac{\gamma}{2} H - \frac{\gamma k}{4} H \right) \dot{p} \\ &\quad - k \Delta \mathbf{x} (k J J^T - \gamma I_2 - \gamma J H J^T) \Delta \mathbf{x} \end{aligned} \quad (18)$$

が成立する。こうして，式 (13) は，式 (15)，(18) を参照して，次のように表されることが判る。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W(k; \Delta \mathbf{x}, \dot{p}) &= -\|\dot{p}\|^2 - k^2 \|J^T \Delta \mathbf{x}\|^2 - k h(\Delta \mathbf{x}, \dot{p}) \\ &\leq -\gamma W(k; \Delta \mathbf{x}, \dot{p}) - k h(\Delta \mathbf{x}, \dot{p}) - f(k; \Delta \mathbf{x}, \dot{p}) \end{aligned} \quad (19)$$

ここに

$$f(k; \Delta \mathbf{x}, \dot{p}) = \dot{p} \left(I_4 - \frac{\gamma}{2} H - \frac{\gamma k}{4} H \right) \dot{p} + k \Delta \mathbf{x}^T (k J J^T - \gamma I_2 - \gamma J H J^T) \Delta \mathbf{x} \quad (20)$$

と置いた。図 3 の初期手先位置と初期姿勢にあるときの慣性行列 $H(q(0))$ は Mathematica を使って計算してみると，表 5 のようになっている。式 (20) の f や式 (14) の h の中の H, S, J はすべて式 (9) のようにダンピング行列 C で変換しているが，実は C は実正定行列であり， $H(q(0))$ の平方根行列の 3 倍を十分に越えるように取っている（運動中も $C \geq 3H^{1/2}(q)$ であることを保証すべきであるが，その議論は省略する。シミュレーションでは確かめている）。しかも， $J(p) = \bar{J}(p) = J(q)C^{-1/2}$ であることから $JHJ^T =$

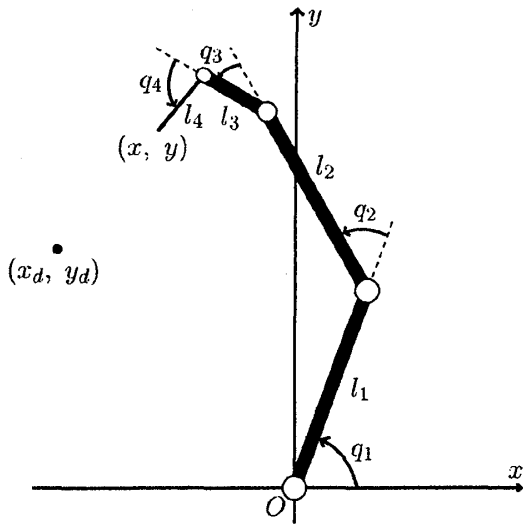


図 3: 4 自由度のモデルによるリーチング運動. 目標点は $x_d = (x_d, y_d)$.

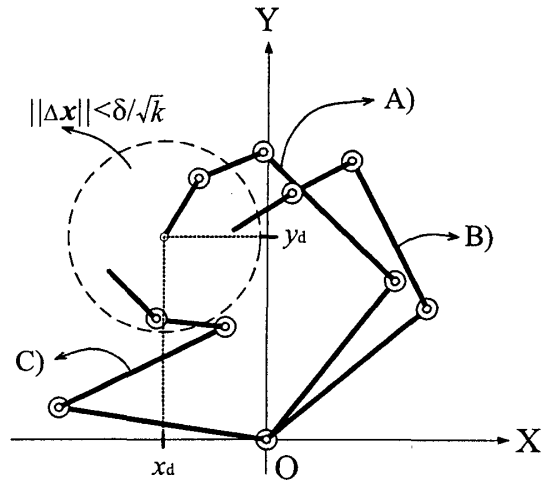


図 4: 4 自由度のハンド・アームの姿勢. A) は参照姿勢 q^0 を表す. B) は手先が目標位置を中心とする半径 δ/\sqrt{k} 姿勢も参照姿勢 q^0 の近くであり, $\|q(0) - q^0\| < r$ を満たす. C) の姿勢は q^0 の近傍 $N^8(\delta, r)$ の中に入らない.

$J(q)C^{-1}H(q)C^{-1}J^T(q)$ はほぼ $(1/9)J(q)J^T(q)$ のオーダーになるが, 厳しくして, $(1/6)J(q)J^T(q)$ 以下と見積もれる. このような詳細な吟味を行った上で, 定数を

$$k = 10.0, \quad \gamma = 2.5 \quad (21)$$

に取ってみると, $\|\Delta x(t)\| < 12.75$ [cm] である限り,

$$\begin{cases} \Delta x^T (kJJ^T - \gamma I_2 - \gamma JHJ^T) \Delta x \geq 0 \\ \dot{p} \left(I_4 - \frac{\gamma}{2}H - \frac{\gamma k}{4}H \right) \dot{p} \geq \frac{1}{2}\|p\|^2 \end{cases} \quad (22)$$

となることが判る (付録 A を参照). このとき, 付録 B から,

$$\begin{aligned} & -kh(\Delta x, \dot{p}) - f(k; \Delta x, \dot{p}) \\ & \leq -\frac{2}{5}\|\dot{p}\|^2 - k \left\{ \Delta x^T J \left(-\frac{1}{2}\dot{H} + S \right) \dot{p} - \Delta x JH\dot{p} - \dot{p}J^T JH\dot{p} \right\} \leq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

となることも言える. この不等式を式 (19) に代入することにより, 不等式

$$\frac{d}{dt}W(\Delta x, \dot{p}) \leq -2.5W(\Delta x, \dot{p}) \quad (24)$$

が示された. ここに, $k = 10.0$ としたときの $W(k; \Delta x, \dot{p})$ を $W(\Delta x, \dot{p})$ と書いた. 式 (24) から

$$W(\Delta x(t), \dot{p}(t)) \leq e^{-2.5t}W(\Delta x(0), \dot{p}(0)) \leq e^{-2.5t}k\|\Delta x(0)\|^2 \quad (25)$$

であり、さらに付録Cで論じるように、

$$W(\Delta \mathbf{x}(t), \dot{p}(t)) \geq \frac{2}{3}k\|\Delta \mathbf{x}(t)\|^2 \quad (26)$$

であるから、式(25)、(26)を合わせて、

$$\|\Delta \mathbf{x}(t)\|^2 \leq \frac{3}{2}\|\Delta \mathbf{x}(0)\|^2 e^{-2.5t} \quad (27)$$

となることが示された。

こうして、手先位置 (x, y) が指数関数的に目標位置 (x_d, y_d) に収束することが証明されたが、その途中で、各関節 q_i が大きく変動したり、変動を繰り返したりすることはないだろうか。冗長自由度系では、一部の物理変数がいつまでも動いている現象（これを self-motion と呼んでいる [14]）が起こり得るが、これが起こっていないことを証明できるであろうか。出発点 $(x(0), y(0))$ が (x_d, y_d) に非常に近いとき、例えば高々 $2 \sim 3$ [cm] の範囲にあるとき、self-motion が起こり得ないことは簡単に示せる。しかし、5歳児の標準で $\|\Delta \mathbf{x}(0)\|$ が 12.75 [cm] のような “short-range reaching” で “self-motion” が起こり得なかったことを証明する必要がある。それは、図4に示すように、 $r = 12.75$ [cm] に取ったとき、途中で記号B) で表したような姿勢はあり得ても、記号C) の姿勢のように、初期姿勢から大きく変動することが起こり得ないことを理論的に保証しておくことが必要になる。

そこで、self-motion が起こらないことを示すために、式(10)を区間 $[0, t]$ で積分すると、

$$p(t) - p(0) = -k \int_0^t J^T(p(\tau)) \Delta \mathbf{x}(\tau) - H(p(t)) \dot{p}(t) - \int_0^t \left(\frac{1}{2} \dot{H} + S \right) \dot{p}(\tau) d\tau \quad (28)$$

となる。付録Bと式(4)から

$$\begin{aligned} \left| - \int_0^t \left(\frac{1}{2} \dot{H} + S \right) \dot{p}(\tau) d\tau \right| &\leq \int_0^t \left| \left(\frac{1}{2} \dot{H} + S \right) \dot{p}(\tau) \right| d\tau \\ &\leq \beta \int_0^t \|\dot{p}(\tau)\|^2 d\tau = \beta \int_0^t \dot{q}^T C \dot{q} d\tau \leq \beta E(0) \end{aligned} \quad (29)$$

であり、 β は付録Aから高々 10^{-1} のオーダー ($\beta \leq 2/25$) である。また、付録Cから

$$\| -H(p(t)) \dot{p}(t) \| \leq \lambda_M \sqrt{E(t)} \quad (30)$$

となり、 λ_M は $\sqrt{0.15}$ である。こうして、ベクトル表示としての式(28)の第一成分を取り出してみると

$$\sqrt{c_1} |q_1(t) - q_1(0)| \leq k \int_0^t \frac{1}{\sqrt{c_1}} |J_1 \Delta \mathbf{x}| d\tau + \beta E(0) + \lambda_M \sqrt{E(t)} \quad (31)$$

となることが判る。ここにヤコビアン行列を $J(q) = (J_1^T, J_2^T, J_3^T, J_4^T)$ と分解して表した。ところで、簡単な計算から $J_1 = (-y, x)$ となり、 $\|\Delta \mathbf{x}\| \leq 0.1275$ であることと $(x_d, y_d) = (-0.2, 0.2)$ [m] であることから、式(27)を参照して、

$$\begin{aligned} |q_1(t) - q_1(0)| &\leq \frac{k}{c_1} \int_0^t \|J_1\| \cdot \|\Delta \mathbf{x}\| d\tau + \frac{1}{\sqrt{c_1}} (\beta E(0) + \lambda_M \sqrt{E(t)}) \\ &\leq \frac{10.0}{0.6} \times 0.4103 \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^t \|\Delta \mathbf{x}(0)\| e^{-1.25t} d\tau + \frac{1}{\sqrt{0.6}} \left(\frac{2}{25} E(0) + \sqrt{0.15} \sqrt{E(t)} \right) \\ &\leq 0.8585 + \frac{1}{2} \sqrt{E(t)} \end{aligned} \quad (32)$$

となることが判る. また, $\sqrt{E(t)} \leq \sqrt{E(0)} \leq \sqrt{5}\|\Delta x(0)\|$ であることから, また, $E(\infty) = 0$ となることから,

$$|q_1(t) - q_1(0)| \leq 1.0010 \text{ [radian]}$$

$$|q_1(\infty) - q_1(0)| \leq 0.8585 \text{ [radian]}$$

であることが示された. すなわち, 肩の関節角が運動の途中で $\pi/3 (= 60^\circ)$ も回転することではなく, 最終的には q_1 の変動は $5\pi/18 (= 50^\circ)$ 以下であり, 従って, 図に示す姿勢 C) が起こり得ないことが示された. 肘の関節角 $q_2(t)$ についても, 同様に見積もることができるが, 指の付け根の関節については, そのダンピング係数 c_4 が小さいので, 角度変化 $|q_4(t) - q_4(0)|$ を精密に見積もることは難しい. しかし, 実際には, 肘の関節のダンピングは肩のそれに, 指の関節のダンピングは手首のそれと同じにしても (すなわち, 自由度 3 をもつユニバーサル関節である肩と手首に関するダンピングを相対的に小さくし, 動きを柔らかくしたことに相当), 手先の軌跡はそれほど変動しないことが示せる. その時, 変動は $|q_4(t) - q_4(0)| < \pi/2$ と押さえ込むこともできるが, これ以上の議論は省略する.

表 1 ~ 5 に基づいて閉ループダイナミクスの微分方程式 (3) を数値積分することにより得られた結果を図 5 ~ 8 に示す. 手先位置 (x, y) は図 7 に示すように, ほぼ直線に近く, スチッフネス k を変えても, あまり変動しない. Latash[15] によると, 人のリーチング運動は, 熟練させると, 次のような特徴が現れるという.

- a) 手先の軌道はほぼ直線になる.
- b) 手先の速度プロフィールはほぼ対称で, bell-shaped 型になる.
- c) 手先の加速度は二峰性になる.
- d) 関節角については, その角度軌道, 速度, 加速度が関節によって異なる.

もう一つの特徴は, 熟練しても, 関節角に関する軌道の再現性は低い. そして, 人間の limb 系の場合, 特に冗長自由度系の場合, 関節角やその角速度の軌道が試行ごとに, または, 異なる月日ごとに, ゆらぐことが常に再現すると報告されており, これを変動性 (variability) と呼んだ [15]. この変動性こそ人間の冗長な "limb" 系の運動の特徴であり, この変動性を数学的に厳密に取り扱い易くするために, 多様体上の安定性や部分多様体への可遷移性の概念の導入が自然になるであろう. その理由は, 多自由度の指の複数本を用いた物体操作の解析力学からより明らかになる.

表 3: 初期条件

$q_1(0)$	70.0 [deg]
$q_2(0)$	50.0 [deg]
$q_3(0)$	30.0 [deg]
$q_4(0)$	80.0 [deg]
$x(0)$	-0.1157 [m]
$y(0)$	0.2957 [m]

表 4: ダンピングゲイン（粘性係数）と手先目標位置

Time	Sampling-Time for Runge-Kutta		0.25 [ms]
Gain	P-gain on task-space	k	changed [-]
	D-gain for joint1	c_1	0.60 [-]
	D-gain for joint2	c_2	0.24 [-]
	D-gain for joint3	c_3	0.036 [-]
	D-gain for joint4	c_4	0.0078 [-]
Desired Position	x-component	x_d	-0.200 [m]
	y-component	y_d	0.200 [m]

表 5: 初期姿勢の慣性行列の値

$$H(0) = \begin{bmatrix} 2.8112640e-02 & 9.9067910e-03 & 5.4228169e-04 & -2.5192563e-05 \\ 9.9067910e-03 & 5.7745657e-03 & 4.8854899e-04 & -1.1000662e-06 \\ 5.4228169e-04 & 4.8854899e-04 & 1.2002391e-04 & 7.4183440e-06 \\ -2.5192563e-05 & -1.1000662e-06 & 7.4183440e-06 & 5.8919051e-06 \end{bmatrix}$$

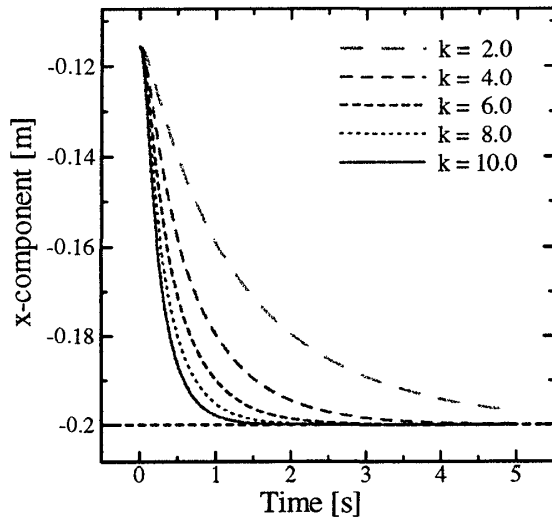


図 5: スティックネル k を変化させたときの
手先位置 (x, y) の x の過渡応答.

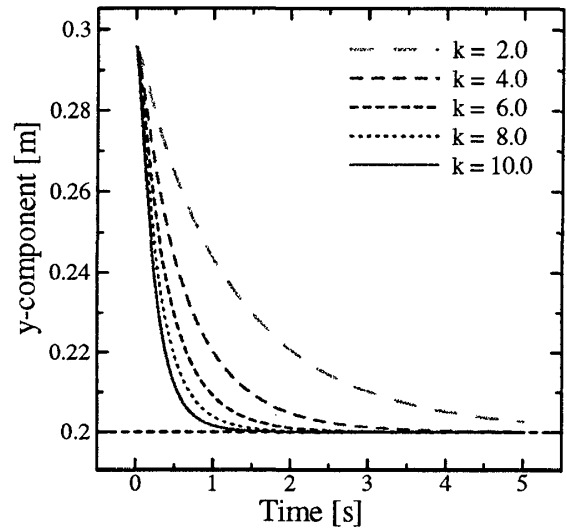


図 6: y の過渡応答.

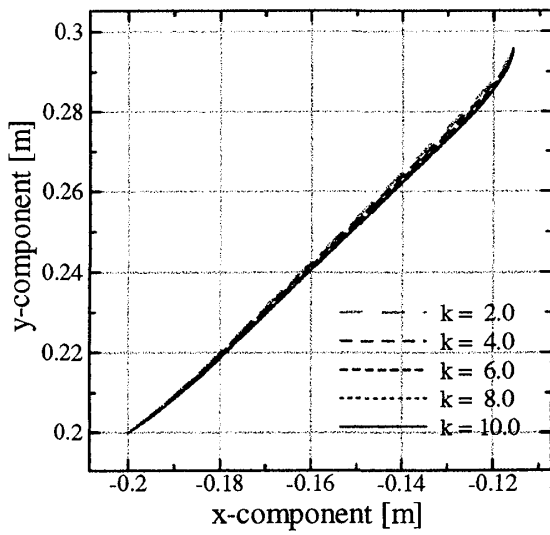


図 7: 手先位置 (x, y) の軌跡.

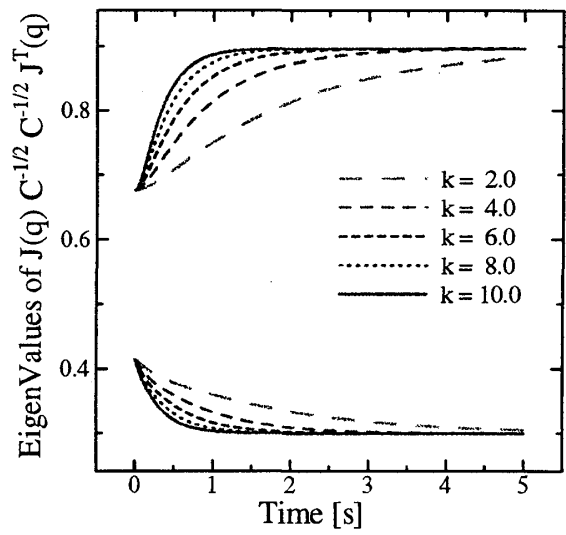


図 8: 行列 $\bar{J}(p)J^T(p) = J(q)C^{-1/2}C^{-1/2} \times J^T(q)$ の二つの固有値の過渡応答.

3. 多指ハンドによる把持と物体操作

多指ハンドを用いて物体を安定的に把持し、操作する研究は1970年代の後半から始まり、非常に多くの研究がある。実際、このことは多数の文献を調査したサーベイ論文 [16], [17] に詳しい。それらの多くは作業と運動の計画に関しており、また、把持の方法もすべての指を一斉に折り曲げて握る“反射把握”に注目していた。反射把握は新生児にも見られるが、ロボティクスではこれを“enveloping grasp”あるいは“power grasp”と呼び、指を折り曲げる形を運動計画で作り出す問題（pre-shaping）に関心が集まった。他方、安定把持は“form closure”あるいは“immobilizability”の問題に関連して研究され [18][19]、2次元や3次元の物体操作にはそれぞれ何本の指が必要であるか詳しく研究された。これらの研究では指先と対象物体は剛体点接触と仮定し、従って摩擦無しの手を用いることを前提とした。その結果、2次元物体操作についても、安定把持には3本の指（平行面をもたない多角形物体）、あるいは4本（平行面をもつ物体）が必要とすることが結論づけられた [20][21]。しかし、指先を丸くし（半球と仮定する）、物体とのころがり接触を許すと、事情が異なる。ころがり接触を許した制御の研究には、Cole et al. [22] と Paljug et al. [23] の論文があるが、そこではダイナミクスを導いているが制御は計算トルク法に従い、従って動的な安定把持は問題にされなかった。少なくとも2000年前後、著者等の論文 [24][25] を除いては、2次元運動に限ってさえも、2本指を用いるピンチング動作についてさえ、動的安定把持と物体操作を感覚フィードバックに基づいて行う研究は全く見られなかった。

ここでは、指先が半球状の剛体である場合について2002年前後に始めた研究の成果 [7][8] を冗長自由度系の問題として再吟味してみる。特に、2本の指がそれぞれ自由度2以上をもつとき、物体の安定把持と姿勢角の制御を同時に行う作業を記述する物理変数の数は、全体系の総自由度数より小さくなり、冗長自由度の問題が生ずる。それにもかかわらず、人為的な動作指標（評価関数）を導入することなく、多様体上の安定性を議論することで、逆運動学の不良設定性が自然に解消できることを示し、感覚フィードバックによって安定把持と物体の姿勢角制御が同時に実現できることを理論的に示す。勿論、これらの結果はシミュレーションや実機に基づく実験によっても裏付けられている [26][27]。

始めに、図9に示すように、自由度3の指一対から成るロボットハンドによる非平行な側面をもつ物体の把持問題を考える。ここに、指と物体の運動は2次元水平面内に限られるとして、重力の影響が無視できる場合をまず考える ($g = 0$)。指の先端の半球は物体の側面を滑ることなく転がるとして、点接触の二つの拘束条件と転がりによる二つの拘束条件と、それらに対応したラグランジュ乗数 f_1, f_2 と λ_1, λ_2 を用いて、スカラ量

$$Q = f_1 Q_1 + f_2 Q_2 \quad (33)$$

$$\begin{cases} Q_1 = -(l_1 + r_1) + (x - x_{01}) \cos(\theta - \theta_0) \\ \quad - (y - y_{01}) \sin(\theta - \theta_0) = 0 \\ Q_2 = -(l_2 + r_2) - (x - x_{02}) \cos(\theta + \theta_0) \\ \quad + (y - y_{02}) \sin(\theta + \theta_0) = 0 \end{cases} \quad (34)$$

$$R = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 \quad (35)$$

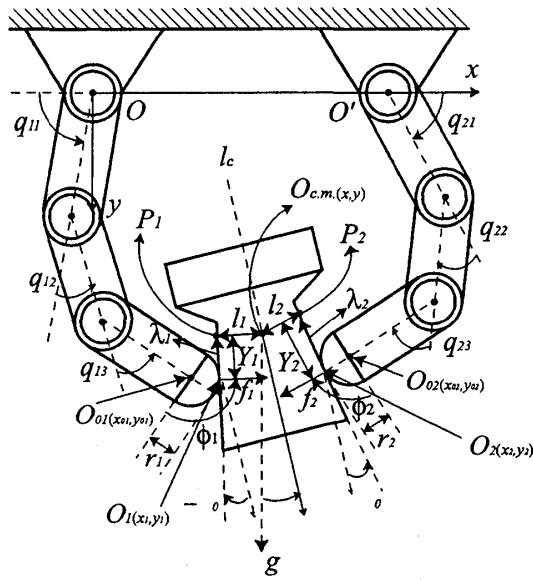


図 9: 非平行な側面をもつ物体のピンチング

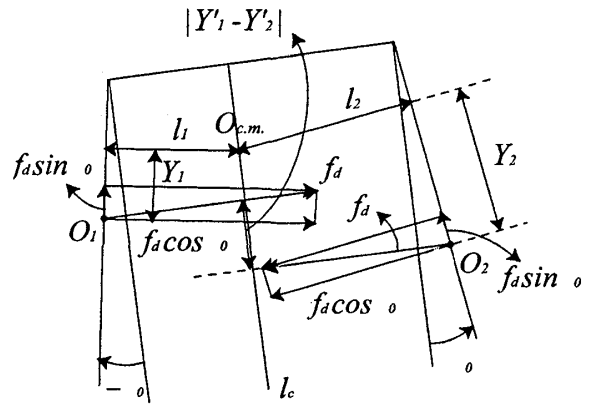


図 10: 指先と物体との接触点に関する幾何学的関係

$$\begin{cases} R_1 = (x_{01} - x) \sin(\theta - \theta_0) \\ \quad + (y_{01} - y) \cos(\theta - \theta_0) \\ \quad - c_{01} + r_1 \left(\frac{\pi}{2} + \theta - \theta_0 - \sum_{i=1}^3 q_{1i} \right) = 0 \\ R_2 = (x_{02} - x) \sin(\theta + \theta_0) \\ \quad + (y_{02} - y) \cos(\theta + \theta_0) \\ \quad - c_{02} + r_2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta - \theta_0 - \sum_{i=1}^3 q_{2i} \right) = 0 \end{cases} \quad (36)$$

を導入し、ラグランジアンを $L = K + Q + R$, $K = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \dot{q}_i^T H_i(q_i) \dot{q}_i + \frac{1}{2} (M\dot{x}^2 + M\dot{y}^2 + I\dot{\theta}^2)$ とすれば、全体系の運動方程式が導出できる。

$$\left\{ H_i \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} \dot{H}_i \right\} \dot{q}_i + S_i \dot{q}_i - f_i \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_i} \right)^T - \lambda_i \left(\frac{\partial R_i}{\partial q_i} \right)^T = u_i, \quad i = 1, 2 \quad (37)$$

$$\begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} - f_1 \begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta_0) \\ -\sin(\theta - \theta_0) \\ Y_1 \end{pmatrix} - f_2 \begin{pmatrix} -\cos(\theta + \theta_0) \\ \sin(\theta + \theta_0) \\ -Y_2 \end{pmatrix} \\ - \lambda_1 \begin{pmatrix} -\sin(\theta - \theta_0) \\ -\cos(\theta - \theta_0) \\ -l_1 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} -\sin(\theta + \theta_0) \\ -\cos(\theta + \theta_0) \\ l_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (38)$$

ここに、 $H_i(q_i)$ は指 i の慣性行列、 M と I は物体の質量と質量中心まわりの慣性モーメント

ントである．式 (37) が指に関するダイナミクスであり，式 (38) が物体のダイナミクスである．

まず，物体のダイナミクス (38) について，どのように f_i, λ_i ($i = 1, 2$) を選べば $\ddot{x} = 0, \ddot{y} = 0, \ddot{\theta} = 0$ となるかを考えよう．言い換えると，式 (38) の定常項をゼロベクトルにする f_i, λ_i ($i = 1, 2$) を求めることであり，これは力／トルク閉包 (force/torque closure) の問題である．よく知られているように，物体の質量が一様に分布している多角形の平板のとき，“form closure”の問題の解を力／トルク閉包問題の解として用いることができる．しかし，摩擦無しの指では多角形の form closure には 4 本の指を必要とする．ところが，転がり接触を用いると 2 本指で form closure 問題が解け，更に，動的な力／トルクのバランス問題を定義すると，物体のサイズや重心位置の知識を用いることなく，2 本指で力／トルクの動的バランスが達成できるのである．

このことを示すため， f_i と λ_i ($i = 1, 2$) を次のように取ってみる．

$$f_i = f_d \cos \theta_0, \quad \lambda_i = f_d \sin \theta_0$$

そのとき，式 (38) の定常項は

$$\begin{aligned} & -f_d(\cos \theta_0)\mathbf{a}_1 - f_d(\cos \theta_0)\mathbf{a}_2 - f_d(\sin \theta_0)\mathbf{b}_1 - f_d(\sin \theta_0)\mathbf{b}_2 \\ & = -f_d \{ (Y_1 - Y_2) \cos \theta_0 - (l_1 - l_2) \sin \theta_0 \} \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

となる．ここに $\mathbf{e}_\theta = (0, 0, 1)^T$ ，式 (33) の f_i にかかる 3 次元ベクトルを \mathbf{a}_i ， λ_i にかかるベクトルを \mathbf{b}_i で表す ($i = 1, 2$)．ここで，

$$Y'_1 - Y'_2 = (Y_1 - Y_2) \cos \theta_0 - (l_1 - l_2) \sin \theta_0 \quad (39)$$

とおくと，これは図 10 の図示の長さになる．もし， l_i が既知ならば（このことは質量中心が判っていることにほぼ対応），指先端の接触点を転がしてずらし，

$$Y_1 - Y_2 = (l_1 - l_2) \tan \theta_0$$

と取れば，式 (38) の定常項はゼロベクトルとなり力／トルクのバランスが実現する．このように接触点を動かして力／トルク平衡を実現することを動的力／トルク平衡と呼ぶ．

4. 感覚フィードバックと多様体上の安定性

物体のサイズや質量中心が未知でも，また，それらを測定しないままに，動的な力／トルク平衡を実現する制御入力 u_i ($i = 1, 2$) を構成することを高知能レベルの制御問題と呼ぶ．ただし，物体の側面の回転角 $\theta - \theta_0$ と $\theta + \theta_0$ は測定できると仮定する（ θ と θ_0 が測定できることと等価）．そこで，制御入力を指側の運動学パラメータと θ, θ_0 のみから計算できる信号で定めよう．

$$\begin{aligned} u_{fi} = & -c_i \dot{q}_i - (f_d \cos \theta_0) \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_i} \right)^T - (f_d \sin \theta_0) \left(\frac{\partial R_i}{\partial q_i} \right)^T \\ & + (-1)^i \frac{r_i f_d}{r_1 + r_2} (Y'_1 - Y'_2) \mathbf{e}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (40)$$

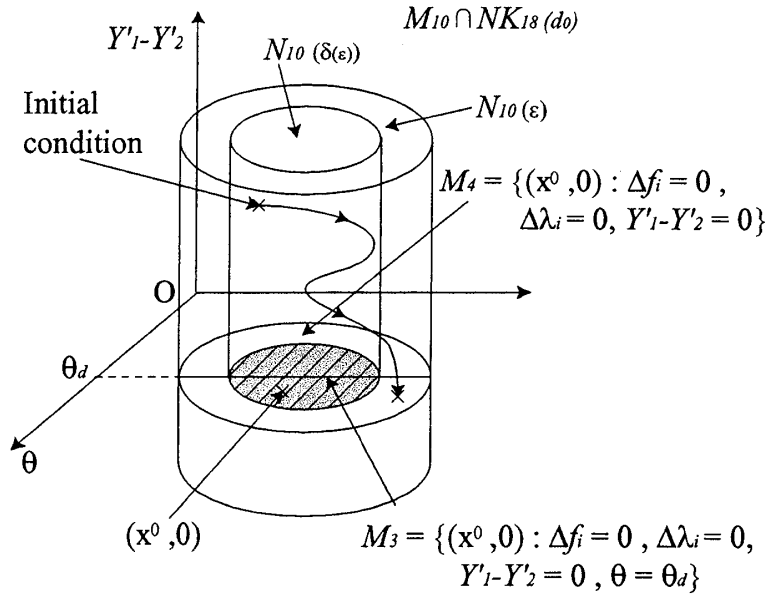


図 11: 多様体上の安定性

ここに, $e = (1, 1, 1)^T$, $Y'_1 - Y'_2$ は式 (39) ではなく,

$$Y'_1 - Y'_2 = (x_{01} - x_{02}) \sin \theta + (y_{01} - y_{02}) \cos \theta + (r_1 - r_2) \sin \theta_0 \quad (41)$$

と定める. そして, 式 (39) を式 (37) に代入して得る閉ループのダイナミクスと式 (38) について, 解のふるまいを調べる. そのために, 状態変数は $\mathbf{x} = (q_1^T, q_2^T, x, y, \theta)^T$ と $\dot{\mathbf{x}}$ から成るので 18 次元空間 R^{18} を想定するが, 四つの拘束があるので, 解軌道は 10 次元の多様体

$$M_{10} = \{(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) : R_i = 0, Q_i = 0, \dot{R}_i = 0, \dot{Q}_i = 0 \ (i = 1, 2)\}$$

の上にある. また, 動的力/トルク平衡を表す多様体は

$$M_4 = \{(\mathbf{x}, 0) : R_i = 0, Q_i = 0 \ (i = 1, 2), \dot{\mathbf{x}} = 0, Y'_1 - Y'_2 = 0\}$$

となる. そこで, 力/トルク平衡の状態にある一点 $(\mathbf{x}^0, 0) \in M_4$ を取り上げ, その近傍の任意の点 $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$ から出発する解軌道が $(\mathbf{x}^0, 0)$ と余り離れていない M_4 上の力/トルク平衡を実現する別のある点に $t \rightarrow \infty$ のとき収束するかどうか問われる (図 11 参照). 近傍を適当に定義して (後で厳密な定義を与える), この意味で $t \rightarrow \infty$ のとき $\dot{\mathbf{x}}(t) \rightarrow 0, \Delta f_i(t) \rightarrow 0, \Delta \lambda_i(t) \rightarrow 0, Y'_1(t) - Y'_2(t) \rightarrow 0$ となるとき, 閉ループダイナミクスは多様体上で安定であるという. ここに, $\Delta f_1 = f_1 - f_d \cos \theta_0, \Delta \lambda_i = \lambda_i - f_d \sin \theta_0$ である.

上で述べた把持の安定性を示すため, 式 (40) で定義した制御入力 u_{fi} を式 (37) に代入した閉ループ系を書き下しておこう.

$$\begin{aligned} & \left\{ H_i \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} \dot{H}_i + S_i + c_i I \right\} \dot{q}_i - \Delta f_i \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_i} \right)^T \\ & - \Delta \lambda_i \left(\frac{\partial R_i}{\partial q_i} \right)^T - (-1)^i \frac{r_i f_d}{r_1 + r_2} (Y'_1 - Y'_2) e_i = 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (42)$$

ここに, $e_i = (1, 1, 1)^T$ とし,

$$\Delta f_i = f_i - f_d \cos \theta_0, \quad \Delta \lambda_i = \lambda_i - f_d \sin \theta_0, \quad i = 1, 2 \quad (43)$$

である. 対象物体のダイナミクスは変わらず, 式 (38) で表されるが, ここでは後の議論の便宜のために,

$$H_0 \ddot{z} - A \Delta \lambda = f_d (Y'_1 - Y'_2) e_\theta \quad (44)$$

と書き直しておこう. ここに, $z = (x, y, \theta)^T$, $H_0 = \text{diag}(M, M, I)$, $\Delta \lambda = (\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta \lambda_1, \Delta \lambda_2)^T$, $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ である. 式 (42) と \dot{q}_i との内積をとり, 式 (43) と拘束条件を参照すると, 式

$$\frac{d}{dt} E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = - \sum_{i=1,2} c_i \|\dot{q}_i\|^2 \quad (45)$$

が成立することが判る. ここに

$$E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1,2} \frac{1}{2} \dot{q}_i^T H_i(q_i) \dot{q}_i + \frac{1}{2} \dot{z}^T H_0 \dot{z} + \frac{f_d}{2(r_1 + r_2) \cos \theta_0} (Y'_1 - Y'_2)^2 \quad (46)$$

である. スカラー関数 E は 9 個の速度変数 $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{q}_1^T, \dot{q}_2^T, \dot{z})^T$ については正定であるが, 位置変数としては $(Y'_1 - Y'_2)$ のみしか含まず, 従って R^{18} においても, また, 拘束多様体 M_{10} 上においてすら正定になっていない. このことから, 関係式 (45) からリヤプノフの安定性を直接議論することはできない. そこで, 多様体 M_{10} 上で安定性を定義する必要が起るが, そのため M_{10} 上にある部分多様体 M_4 に属する一点 $(\mathbf{x}^0, 0)$ を取り上げ, これを参照状態と呼び, その δ -近傍 $N_{10}(\delta)$ を次のように定義しよう.

$$N_{10}(\delta) = \{(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) : Q_i = 0, R_i = 0, \dot{Q}_i = 0, \dot{R}_i = 0, \text{ and } E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \leq \delta^2\}$$

同時に, M_{10} や M_4 を含む状態空間 R^{18} においても, 参照点 $(\mathbf{x}^0, 0)$ の廻りの近傍を定義しておく必要がある.

$$N^{18}(r_0) = \{(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_K + \|\dot{\mathbf{x}}\|_K \leq r_0\}$$

ここに

$$\|\dot{\mathbf{x}}\|_K^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \dot{q}_i^T H_i(q_i) \dot{q}_i + \frac{1}{2} \dot{z}^T H_0 \dot{z} = K \quad (47)$$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|_K^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} (q_i - q_i^0)^T H_i(q_i) (q_i - q_i^0) + \frac{1}{2} (z - z^0)^T H_0 (z - z^0) \quad (48)$$

であり, $\mathbf{x}^0 = (q_1^{0T}, q_2^{0T}, z^{0T})$ とした.

定義 (多様体上の安定性) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta(\varepsilon) > 0$ と ε に無関係な $\delta_1 > 0$ が存在して, $N_{10}(\delta) \cap N^{18}(r_1)$ の任意の状態 $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$ から出発した式 (42), (44) の解軌道が $N_{10}(\varepsilon) \cap N^{18}(r_0)$ 上にとどまるならば, M_4 上の参照点 $(\mathbf{x}^0, 0)$ は多様体上安定であるという.

定義 (部分多様体への可遷移性) ある $\varepsilon_1 > 0$ と $r_1 > 0$ がそれぞれあって, 参照点 $(x^0, 0)$ の近傍 $N_{10}(\varepsilon_1) \cap N^{18}(r_1)$ に属する任意の点 $(x(0), \dot{x}(0))$ から出発した式 (42), (44) の解軌道は $N^{18}(r_0)$ にとどまるとともに, 部分多様体 $M_4 \cap N^{18}(r_0)$ のある状態点に $t \rightarrow \infty$ のとき収束するならば, 参照点 $(x^0, 0)$ の近傍は M_4 の部分多様体に遷移可能であるという.

次に, 物体の安定把持と同時にその姿勢角 θ を所望の角度 θ_d にする感覚フィードバックがあり得ることを示すため, 信号

$$u_{\theta i} = -(-1)^i \left\{ \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_i} \right)^T \sin \theta_0 - \left(\frac{\partial R_i}{\partial q_i} \right)^T \cos \theta_0 \right\} \xi^{-1} \beta \Delta \theta, \quad i = 1, 2 \quad (49)$$

を導入しよう. ここに

$$\xi = (x_{01} - x_{02}) \cos \theta - (y_{01} - y_{02}) \sin \theta - (r_1 + r_2) \cos \theta_0 \quad (50)$$

であり, $\beta > 0$ は適当なゲインである. ξ は

$$\xi = (l_1 + l_2) \cos \theta_0 + (Y_1 + Y_2) \sin \theta_0 \quad (51)$$

と表すこともできるが, 感覚フィードバックに用いるときは, 指の運動学パラメータと関節角および物体の回転角 θ の測定値から容易に計算できる式 (50) を用いる. なお, 凸多角形から成る対象物体に対しては, ξ は指先が物体に接触した点 O_1, O_2 の中心線 l_c までの距離の和に相当し, 零にならないことが示せる [7].

安定把持と同時に物体の姿勢を所望の角度 θ_d に制御する感覚フィードバック信号は, 式 (40) の信号に式 (49) の信号を線形的に重ね合せた

$$u_i = u_{f_i} + u_{\theta i} \quad (52)$$

と構成する. これを式 (37) に代入すれば, 閉ループのダイナミクスは

$$\begin{aligned} \left\{ H_i \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} \dot{H}_i + S_i + c_i I \right\} \dot{q}_i - \Delta f'_i \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_i} \right)^T \\ - \Delta \lambda'_i \left(\frac{\partial R_i}{\partial q_i} \right)^T - (-1)^i \frac{r_i f_d}{r_1 + r_2} (Y'_1 - Y'_2) e_i = 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (53)$$

となる. ここに

$$\begin{cases} \Delta f'_i = f_i - f_d \cos \theta_0 - (-1)^i \xi^{-1} \beta \Delta \theta \sin \theta_0 \\ \Delta \lambda'_i = \lambda_i - f_d \sin \theta_0 + (-1)^i \xi^{-1} \beta \Delta \theta \cos \theta_0, \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (54)$$

である. このとき, 物体のダイナミクス (38) についても, 次のように書き換えておくと, 後で議論しやすくなる.

$$H_0 \ddot{z} - A \Delta \lambda' = \{ f_d (Y'_1 - Y'_2) - \beta \Delta \theta \} e_\theta \quad (55)$$

ここに, $\Delta \lambda' = (\Delta f'_1, \Delta f'_2, \Delta \lambda'_1, \Delta \lambda'_2)^T$ である. なお, この場合, 多様体 M_4 と同様に, 3次元の多様体

$$M_3 = \{(\mathbf{x}, 0) : R_i = 0, Q_i = 0, \dot{\mathbf{x}} = 0, Y_1' - Y_2' = 0, \Delta\theta = 0\} \quad (56)$$

を定義し，その上の参照点 $(\mathbf{x}^0, 0) \in M_3$ の M_{10} 上の近傍を

$$\bar{N}_{10}(r) = \{(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) : Q_i = 0, R_i = 0, \dot{Q}_i = 0, \dot{R}_i = 0 \text{ and } \bar{E}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \leq r^2\}$$

と定義しよう．ここに

$$\bar{E}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \frac{\beta}{2}\Delta\theta^2 \quad (57)$$

であり，閉ループダイナミクス (53) と \dot{q}_i との内積を取ることににより，式 (45) の関係式と同様に，式

$$\frac{d}{dt}\bar{E}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = - \sum_{i=1,2} c_i \|\dot{q}_i\|^2 \quad (58)$$

が成立することが示せる．この場合も， $\bar{E}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ は R^{18} においても，また， M_{10} 上においても，正定にならないことに注意しておく．このことは，リヤプノフの方法による安定解析が適用できないことを意味する．

最後に，次節の便宜のために，式 (38) の物体のダイナミクスについて，物理的次元の違い（力とトルクの単位の違い）から来る質量 M と慣性モーメント I の数値をそろえるため， $r = 0.02$ のスケール変換

$$\bar{\mathbf{x}} = r^{-1}\mathbf{x}, \quad \bar{\mathbf{y}} = r^{-1}\mathbf{y}, \quad \bar{M} = r^2M$$

を施し， $\bar{H}_0 = \text{diag}(r^2M, r^2M, I)$ とすれば，式 (44) は

$$\bar{H}_0\ddot{\bar{\mathbf{z}}} - R\Delta\lambda = f_d(Y_1' - Y_2')$$

と書き直せる．ここに $R = \text{diag}(r, r, 1)$ ， $\bar{\mathbf{z}} = (\bar{x}, \bar{y}, \theta)$ である．そこで

$$R\mathbf{a}_i = \bar{\mathbf{a}}_i, \quad R\mathbf{b}_i = \bar{\mathbf{b}}_i$$

とおき， $\bar{\mathbf{x}} = (q_1^T, q_2^T, \bar{z}^T)^T$ を改めて \mathbf{x} と書き直し，次のようなヤコビアン行列

$$J^T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\right)^T & 0 & \left(\frac{\partial R_1}{\partial q_1}\right)^T & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\right)^T & 0 & \left(\frac{\partial R_2}{\partial q_2}\right)^T \\ \bar{\mathbf{a}}_1 & \bar{\mathbf{a}}_2 & \bar{\mathbf{b}}_1 & \bar{\mathbf{b}}_2 \end{pmatrix} \quad (59)$$

を定義しよう．このとき，式 (53) と (54) は合わせて，

$$H\ddot{\mathbf{x}} + \left(\frac{1}{2}\dot{H} + S + C\right)\dot{\mathbf{x}} - J^T\Delta\lambda' + f_d(Y_1' - Y_2')\mathbf{e} + \beta\Delta\theta\mathbf{e}_\theta = 0 \quad (60)$$

と表される．ここに

$$\left\{ \begin{array}{l} H = \begin{pmatrix} H_1(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & H_2(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{H}_0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} S_1(q_1, \dot{q}_1) & 0 & 0 \\ 0 & S_2(q_2, \dot{q}_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ C = \begin{pmatrix} c_1 I_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} \frac{r_1}{r_1 + r_2} e_1 \\ \frac{-r_2}{r_1 + r_2} e_2 \\ -e_\theta \end{pmatrix}, e_\theta = \begin{pmatrix} 0_3 \\ 0_3 \\ e_\theta \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (61)$$

と置いた。\$H\$ の固有値はすべて \$10^{-5}\$ 以下のオーダーで揃えられていることに注意されたい。

5. 多様体上の安定性と可遷移性の証明

大人の指，例えば人差指の長さは，フィボナッチ数列に従っている [28]。すなわち，先端から第1関節，第1関節から第2へ，第2から第3の根元の関節へ，長さは2，3，5 [cm] の定数倍になっている。長さがセンチメートルのオーダーのとき，そのリンクを丸棒としたときの慣性モーメントを \$ml^2/3\$ として計算すると（比重は \$1 \text{ [g/cm}^3\text{]}\$ とする），それは \$10^{-6} \sim 10^{-7} \text{ [kgm}^2\text{]}\$ となる（表1参照）。上腕（二の腕）や前腕のようにデカセンチメートルの世界になると，慣性モーメントは \$10^{-2} \text{ [kgm}^2\text{]}\$ となり，指の運動と腕の運動は本質的に異なる。実際，二本指によるピンチングのダイナミクスが式 (37)，(38) で表されるのに比べ，リーチング運動のダイナミクスは式 (1) のように非線形ではあるが比較的簡明である。閉ループダイナミクスについても，ピンチングのそれは式 (42) や (53) のように複雑きわまりないが，リーチング運動のそれは式 (3) のように非常に簡明になる。それにもかかわらず，安定性の証明はリーチング運動の方がむしろ困難をきわめた。ここでは，表1に示したサイズのロボットの指と対象物体について，安定把持と姿勢制御が同時に可能であることを，次の定理で示そう。

定理 表1の一对の指と対象物体に関する閉ループダイナミクス (53) と (54) について，参照点 \$(x^0, 0) \in M_3\$ の近傍 \$N^{18}(r_0)\$ において \$9 \times 6\$ の行列 \$(J^T, e, e_\theta)\$ は non-degenerated であるとする。このとき，\$f_d\$ を \$Mg\$ (\$g\$ は重力定数) のオーダーにとり，ダンピング係数を \$c_1 = c_2 = c\$，\$c/2f_d(r_1 + r_2) = 0.1 \sim 0.3\$，\$\beta = O(10^{-1})\$ にとるとき，参照点 \$(x^0, 0) \in M_3\$ は多様体 \$M_{10}\$ 上で安定である。このとき，参照点 \$(x^0, 0)\$ の廻りにある近傍 \$N_{10}(\delta_1)\$ が存在して，それは \$M_3\$ 上に可遷移である。ただし，\$|\theta_0| < \pi/6\$ と仮定し，また，指先は対象物体の表面でスリップしないと仮定する。

証明の概略を述べる。式 (57) で定義した \$\bar{E}\$ に次のような項を加えてみる。

$$V = \bar{E}(x, \dot{x}) + \alpha \dot{x}^T H \{ P_e (Y'_1 - Y'_2) e / (r_1 + r_2) + \gamma P_\theta \Delta \theta e_\theta \} \quad (62)$$

ここに，\$\gamma > 0\$ は \$O(1)\$ のパラメータ，

$$\begin{cases} P_e = I_9 - J_e^+ J_e, & J_e^T = (J^T, e_\theta), & J_e^+ = J_e^T (J_e J_e^T)^{-1}, \\ P_\theta = I_9 - J_\theta^+ J_\theta, & J_\theta^\theta = (J^T, e), & J_\theta^+ = J_\theta^T (J_\theta J_\theta^T)^{-1} \end{cases} \quad (63)$$

とおいた。明らかに

$$P_e J_e^T = 0, P_e e_\theta = 0, P_\theta J_\theta^T = 0, P_\theta e = 0 \quad (64)$$

である。そこで V を時間 t で微分し、式 (60), (64) を参照すると、

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{E} + \alpha \dot{\mathbf{x}}^T H \{ P_e (Y'_1 - Y'_2) \mathbf{e} / (r_1 + r_2) + \gamma P_\theta \Delta \theta \mathbf{e}_\theta \} \\ &\quad + \alpha \dot{\mathbf{x}}^T \{ (\dot{H} P_e + H \dot{P}_e) (Y'_1 - Y'_2) + H P_e (\dot{Y}'_1 - \dot{Y}'_2) \} \mathbf{e} / (r_1 + r_2) \\ &\quad + \alpha \dot{\mathbf{x}} \{ (\dot{H} P_\theta + H \dot{P}_\theta) \Delta \theta + H P_\theta \dot{\theta} \} \gamma \mathbf{e}_\theta \\ &= - \sum_{i=1,2} c_i \|\dot{q}_i\|^2 - \alpha \frac{f_d}{r_1 + r_2} (\mathbf{e}^T P_e \mathbf{e}) (Y'_1 - Y'_2)^2 \\ &\quad - \alpha \gamma \beta (\mathbf{e}_\theta^T P_\theta \mathbf{e}_\theta) \Delta \theta^2 - \alpha \dot{\mathbf{x}}^T C P_e \mathbf{e} (Y'_1 - Y'_2) / (r_1 + r_2) \\ &\quad - \alpha \gamma \dot{\mathbf{x}}^T C P_\theta \mathbf{e}_\theta \Delta \theta + \alpha h(\dot{\mathbf{x}}) \end{aligned} \quad (65)$$

となる。ここに

$$\begin{aligned} h(\dot{\mathbf{x}}) &= \dot{\mathbf{x}}^T \{ (\dot{H} P_e + H \dot{P}_e) (Y'_1 - Y'_2) + H P_e (\dot{Y}'_1 - \dot{Y}'_2) \} \mathbf{e} / (r_1 + r_2) \\ &\quad + \dot{\mathbf{x}}^T \{ (\dot{H} P_\theta + H \dot{P}_\theta) \Delta \theta + H P_\theta \dot{\theta} \} \gamma \mathbf{e}_\theta \\ &\quad - \dot{\mathbf{x}}^T \left(\frac{1}{2} \dot{H} + S \right) \{ P_e (Y'_1 - Y'_2) \mathbf{e} / (r_1 + r_2) + \gamma P_\theta \Delta \theta \mathbf{e}_\theta \} \end{aligned} \quad (66)$$

と置いた。この $h(\dot{\mathbf{x}})$ は $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{q}_1^T, \dot{q}_2^T, \dot{z}^T)^T$ について見ると、その2次形式であることが判り、しかも、すべてに行列 H あるいはその微分がかかっていることが判る。更に、式 (58) から $(Y'_1 - Y'_2)^2$ と $\Delta \theta^2$ は、初期条件を参照点に近づければいくらでも小さくでき、式 (58) から指定した値で頭打ちになるので、結局、

$$|h(\dot{\mathbf{x}})| \leq \gamma_0 K(\dot{\mathbf{x}}) \quad (67)$$

で押さえられることが判る。ここに

$$K(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \dot{q}_i^T H_i(q_i) \dot{q}_i + \frac{1}{2} (\bar{M} \dot{\mathbf{x}}^2 + \bar{M} \dot{y}^2 + I \dot{\theta}^2) \quad (68)$$

であり、 γ_0 は $O(1)$ から高々 $O(10^1)$ のオーダーである。また、拘束条件の式 (34), (36) から

$$\frac{1}{2} (M \dot{\mathbf{x}}^2 + M \dot{y}^2 + I \dot{\theta}^2) = \frac{1}{2} (\bar{M} \dot{\mathbf{x}}^2 + \bar{M} \dot{y}^2 + I \dot{\theta}^2) \leq \gamma_1 \sum_{i=1,2} c_i \|\dot{q}_i\|^2 \quad (69)$$

であり、 γ_1 は 10^{-3} のオーダーになる。更に不等式

$$\begin{aligned} & - \dot{\mathbf{x}}^T C P_e \mathbf{e} (Y'_1 - Y'_2) / (r_1 + r_2) - \dot{\mathbf{x}}^T C P_\theta \mathbf{e}_\theta \gamma \Delta \theta \\ & \leq \frac{c_1^2 \|\dot{q}_1\|^2 + c_2^2 \|\dot{q}_2\|^2}{2 f_d (r_1 + r_2)} + \frac{f_d \mathbf{e}^T P_e \mathbf{e}}{2 (r_1 + r_2)} (Y'_1 - Y'_2)^2 \\ & \quad + \frac{c_1^2 \|\dot{q}_1\|^2 + c_2^2 \|\dot{q}_2\|^2}{2 \beta / \gamma^2} + \frac{\beta}{2} (\mathbf{e}_\theta^T P_\theta \mathbf{e}_\theta) \Delta \theta^2 \end{aligned} \quad (70)$$

が成立することに注意すると、式(65)は

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -c \left\{ 1 - \alpha \left(\frac{\gamma_0}{2} \lambda_M + \gamma_0 \gamma_1 \right) - \frac{\alpha c}{2f_d(r_1+r_2)} - \frac{\alpha \gamma^2 c}{2\beta} \right\} \\ & (\|\dot{q}_1\|^2 + \|\dot{q}_2\|^2) - \frac{\alpha f_d e^T P_e e}{2(r_1+r_2)} (Y'_1 - Y'_2)^2 - \frac{\alpha \beta e_\theta^T P_\theta e_\theta}{2} (2\gamma - 1) \Delta\theta^2 \end{aligned} \quad (71)$$

に帰着できる。ここに λ_M は $H_i(q_i)$ の q_i を変えつつ、かつ $i=1, 2$ としたときの最大固有値とした。 λ_M が 10^{-5} のオーダーであり、 γ_1 が 10^{-3} のオーダー、 $c/2f_d(r_1+r_2) = 0.1 \sim 0.3$ であり、 $\beta = O(10^{-1})$ 、 c が $10^{-3} \sim 10^{-2}$ のオーダーであることから、 α が $0 \leq \alpha \leq 3$ の範囲で不等式

$$\dot{V} \leq -\frac{c}{10} (\|\dot{q}_1\|^2 + \|\dot{q}_2\|^2) - \frac{\alpha \zeta_e f_d}{2(r_1+r_2)} (Y'_1 - Y'_2) - \frac{5\alpha \zeta_\theta \beta}{2} \Delta\theta^2 \quad (72)$$

が成立する。ここに、 $\gamma = 3.0$,

$$\zeta_e = e^T P_e e, \quad \zeta_\theta = e_\theta^T P_\theta e_\theta \quad (73)$$

と置いた。

さて、式(72)の右辺と $\bar{E}(x, \dot{x})$ を比較してみると、式(69)が成立するので、 $\bar{E}(x, \dot{x})$ に含まれる項はすべて式(72)の右辺にマイナス符号がかかって登場している。従って、 ζ_e, ζ_θ の $N^{18}(r_0)$ の infimum をそれぞれ $\zeta_{em}, \zeta_{\theta m}$ とおき、 r_1 が 10^{-3} のオーダー、 $\alpha \leq 3.0$ であることを考慮し、そして

$$\sigma = \min\{5\zeta_{\theta m}, \zeta_{em} \cos \theta_0\} \quad (74)$$

とおくと、不等式

$$\dot{V} \leq -\alpha \sigma \bar{E}(x, \dot{x}) \quad (75)$$

が成立することが判る。他方、

$$\begin{aligned} & \alpha \left\{ \dot{x}^T H \{P_e(Y'_1 - Y'_2)e/(r_1+r_2)\} + \gamma P_\theta \Delta\theta e_\theta \right\} \\ & \leq \frac{\alpha}{2} \left\{ \frac{\dot{x}^T H^2 \dot{x}}{\eta_0(r_1+r_2)} \cos \theta_0 + \frac{\eta_0 e^T P_e e}{(r_1+r_2) \cos \theta_0} (Y'_1 - Y'_2)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{\gamma^2 \dot{x}^T H^2 \dot{x}}{\eta_0 \beta} + \eta_0 \beta e_\theta^T P_\theta e_\theta \Delta\theta^2 \right\} \end{aligned} \quad (76)$$

が成立する。そこで P_e と P_θ が射影行列であることから $e^T P_e e \leq \|e\|^2 \leq \sqrt{10}/2$ 、 $e_\theta^T P_\theta e_\theta \leq 1$ であり、 H の最大固有値は高々 10^{-5} のオーダーであるから、 $\eta_0 = 5.0 \times 10^{-3}$ に選ぶと、式(76)の右辺は上から $\alpha \eta \bar{E}(x, \dot{x})$ で押さえられることが判る。こうして、式

$$(1 - \eta \alpha) \bar{E} \leq V \leq (1 + \eta \alpha) \bar{E} \quad (77)$$

が成立し、 η は 10^{-1} のオーダーである。こうして、不等式

$$\dot{V} \leq -\alpha \sigma \bar{E} \leq \frac{-\alpha \sigma}{1 + \alpha \eta} V \quad (78)$$

が成立し、これより $V(t) \leq V(0) \exp\{-\alpha\sigma/(1+\alpha\eta)\}$ となり、

$$\begin{aligned} \bar{E}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) &\leq \frac{1}{1-\alpha\eta} V(t) \leq \frac{V(0)}{1-\alpha\eta} e^{-\alpha\{\sigma/(1+\alpha\eta)\}t} \\ &\leq \bar{E}(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0)) \frac{1+\alpha\eta}{1-\alpha\eta} \exp\left\{-\frac{\alpha\sigma}{1+\alpha\eta}t\right\} \end{aligned} \quad (79)$$

となることが判る。

以上の結果から、すべての速度変数 \dot{q}_i, \dot{z} は指数関数的に 0 に収束し、従って、 q_i, z もすべて有限の範囲にとどまり、その範囲は、 $(\mathbf{x}^0, 0)$ の近傍 $N_{10}(\delta_1)$ の δ_1 を小さくすれば、いくらでも小さくできることが判る（ここから先の厳密な証明は論文 [6] の Appendix を参照）。

6. シミュレーション結果と筋肉特性

表 1 のデータに基づいて得られたシミュレーション結果を図 12~15 に示す。ただし、 $\theta_0 = 0[\text{deg}]$, $c = 0.004[\text{Nms}]$, $f_d = 1.0[\text{N}]$, $\beta = 0.3$ とした。ほぼ理論的に予測された指数関数的な収束性が示されている。ここでは $f_d = 5\text{Mg}$ と選び、 $c = 0.1 \times 2f_d(r_1 + r_2)$ とした。図 14 や図 15 に見られるように、 ζ_θ は ζ_e より小さいが、 ζ_θ の 5 倍である $5\zeta_\theta$ は ζ_e より大きく、 σ は $\zeta_{em} \cos \theta_0$ と考えてよい。なお、 c の選び方の基本となった関係式 $c/2f_d(r_1 + r_2) = 0.1 \sim 0.3$ は筋肉収縮の力/速度特性（force/velocity characteristics）として知られる Hill のモデル [29] から定められることに注意しておく [30]。逆に、 c や β の選び方はエネルギー関数 $\bar{E}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ の指数関数的減衰の速さを決める指数部（exponent）に影響を与えることは、前節の証明で見た通りである。Hill のモデルは、蛙の足の筋肉特性から始まり、後には人間の主として腕の筋肉について多くの実験的観察から得られたが、指については、生理学的データがあるかどうか、筆者等は詳らかにしない。Hill のモデルが成立するように関節のダンピングを調節することにより、ロボットの手指がうまく働くが、このことは、逆に、生体の筋肉特性が地球上の物体や環境との物理的相互作用を通じて、ニュートン力学の法則に最も適するように進化した、とも言えるのではないだろうか。

なお、図 12, 13 で見られるように、制御開始時の応答はかなり振動的であるが、 θ の測定値から数値微分した値をフィードバックに用いると、すなわち、式 (49) に代えて

$$u_{\theta i} = -(-1)^i \left\{ \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_i} \right)^T \sin \theta_0 - \left(\frac{\partial R_i}{\partial q_i} \right)^T \cos \theta_0 \right\} \xi^{-1} (\beta \Delta \theta + \alpha \dot{\theta}), \quad i = 1, 2 \quad (80)$$

とすれば、過渡応答は滑らかになる。実際、 $\alpha = 0.08$ としたときのシミュレーション結果を図 16 に示す。

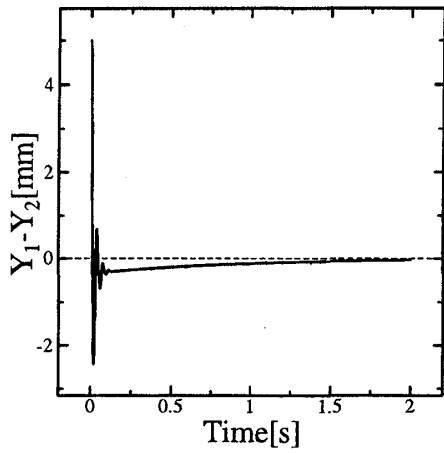


図 12: $Y_1 - Y_2$ の過渡応答

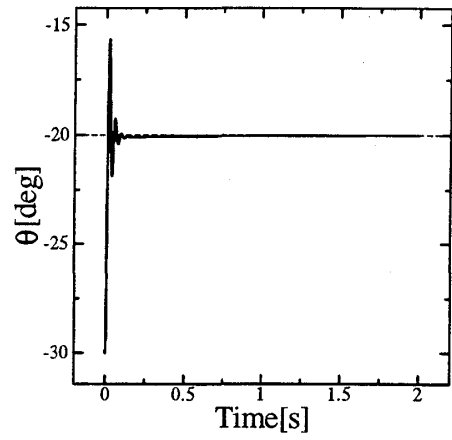


図 13: θ の過渡応答

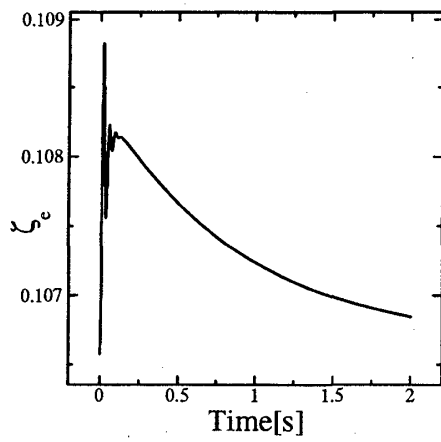


図 14: 式 (47) の ζ_e の応答

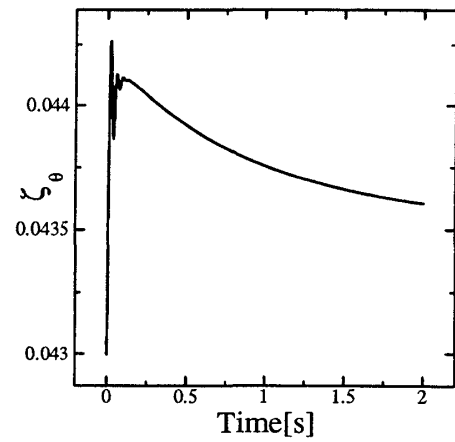


図 15: 式 (47) の ζ_θ の応答

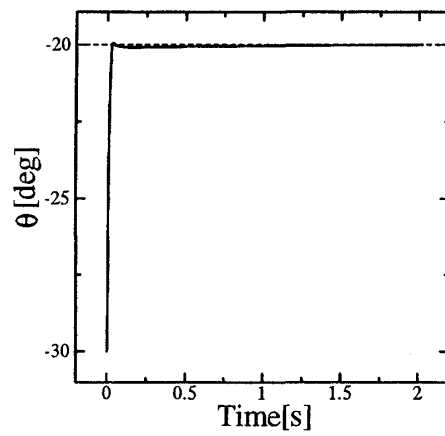


図 16: θ の過渡応答

7. 身体運動の巧みさは解析力学で表現できるか

身体運動の巧みさは冗長自由度系を通して発現されることは半世紀以上も前に、ベルンシュタインが指摘したが [34]、それは長い間、物理科学的なメスが入ることをこぼんで来た。ここでは、多様体上の安定性と呼ぶ新しい概念を導入することにより、冗長自由度系が創発する身体運動の巧みさの本質を解析力学的に取り扱い得ることを示した。すなわち、冗長自由度の関節空間には“variability”を許容させ、作業空間では目標をきっちり達成させることに運動の巧みさが発揮されることを腕と手を一体としたリーチング運動や、多関節の指一対によるピンチング作業で解析してみせた。

リーチング運動では、ことさらに数学的定理として与えはしなかったが、多様体上の安定性や部分多様体への可遷移性を厳密に証明し得ることは第二節の議論から明らかであろう。なお、運動生理学では、リーチング運動について、関与する筋肉群のトルク生成が手先の目標までの距離に比例することを実験的に観察し、大脳の1次運動野からの信号によって筋肉収縮が起こるプロセスを説明しようとしたEP仮説（Equilibrium-Point Hypothesis）がよく知られている [32] [33] [34]。ここでは、ロボットがそうであるように、筋肉モデルを介在させず、各関節を直接駆動するモデル（式 (1) と (2)）を用いたが、第二節の議論が示すように、各筋肉の収縮の総体をもつポテンシャルエネルギーが、作業座標で表したとき、2次形式 $(1/2)k\|\Delta\boldsymbol{x}\|^2$ の形に近いものであれば、運動が創発し得ることを示している。しかし、巧みさは、むしろ、目標点に近接しつつ、目標点で止めることのできるダンピング係数の選定の方が微妙に効く。人間のリーチング運動の場合、筋肉のもつ受動的な粘弾性的性質に加えて、その“relaxization”に移るときのダイナミクス特性（これが更に粘性力を付加的に生成すると仮定して）、重要な働きをしていると思える。粘性力の調整は筋紡錘終末からの投射を受けて脊髄が関与するのであろうが、スキルの向上に小脳がどのようにかわるか、生理学の世界ですら未だ答えは出ていない。Latash[15]は、生理学的研究以前に、ベルンシュタインの冗長性問題は誰もが受け入れるような形で定式化され得ていない、とさえ断定している。ここでは、多様体上に安定性を定義することで一つの定式化の可能性を示唆し、そこから筋肉群によるポテンシャル場生成時の互いの“synergy”とともに、目標への収束時の粘性力の“synergy”が重要な働きをして、冗長自由度系のリーチングが実現できることを示した。

手指の創り出す器用で巧みな動作を解析するためには、任意形状の3次元物体を3本指で取り扱える力学モデルを作る必要がある [35]。他方、3次元的なころがり接触は非ホロノミック拘束になることは解析力学の世界では良く知られており、物体操作の解析は困難なものとなるかもしれないが、不可能ではない。

手指の器用さや巧みさは、指の自由度数とともに、具体的な作業に付随した式 (59) のヤコビアン行列の列ベクトルと式 (61) に示す作業ベクトル \boldsymbol{a} , \boldsymbol{b} の間の互いの独立性の度合いが左右している [36]。また、指の先端が柔軟な場合、多様体上の安定性の取り扱いはずっと複雑になり、慎重な解析が必要になる [37]。驚くべきことに、安定把持に限れば、物体情報は全く無くても、そして、物体の回転角 θ を知らなくても、指の関節角情報（体性感覚）だけで安定把持が実現できることが、ごく最近、示されている [38] [39]。

8. おわりに

身体運動と巧みさの科学には、相対性原理や量子力学のように大きな原理的な発見によって進展させるアプローチはあり得そうにない。それは、個々の身体運動の物理的背景に依存した文脈依存的な観察、解析、実験、推論を着実に読み重ねて進展されるべきものである。しかし、この巧みさの科学を発展させることで、脳科学に残された謎のいくつかを解く糸口が見えてくるかもしれない。

付録 A

2×2 の行列 $J(p)J^T(p) = J(q)C^{-1}J^T(q)$ の最小固有値は $q(0)$ が与えられると、コンピュータで簡単に計算できる。行列 $J(q)C^{-1}J^T(q)$ が非正則になるのは $q_2 = q_3 = q_4 = 0$ のときのみであり、上下の腕、掌、指の四つのリンクが真直ぐになった状態に対応する。手先が図 3 のように与えられた中心 $x_d = (x_d, y_d)$ の半径 $r = 12.75$ [cm] の円内にある限り、三つの角度 q_2, q_3, q_4 がすべて 0 となることはあり得ないので（むしろ、この特異な状態から遠く離れているので）、手先がその円内にある限り $J(q)C^{-1}J^T(q)$ の最小固有値はかなり大きな正の値の下限をもつ。厳密に数学的な議論を進めるには、この下限を幾何学的に求める必要がある。しかし、ここでは物理的考察を進めたいので、 $J(q)C^{-1}J^T(q)$ の最小固有値の下限として実際にコンピュータシミュレーションしたときのデータを使う。図 5 ~ 7 のシミュレーション結果が得られたとき、 $J(q)C^{-1}J^T(q)$ の二つの固有値は図 8 のように推移している。これより、 $1.0I_2 \geq J(p)J^T(p) = J(q)C^{-1}J^T(q) \geq 0.28$ としてよいであろう。次に慣性行列 $C^{-1/2}H(q)C^{-1/2} = H(p)$ について評価したいが、 C が $3.0 \times H^{1/2}(q)$ を越えるように選んでいることから、 $H(p)$ は $(1/3)H^{1/2}(q)$ のオーダーになる。また、 $J(q)J^T(q)$ の最大固有値は 0.2 を越えることはない。こうして、

$$kJJ^T - \gamma I_2 - \gamma JHJ^T \geq \left(0.28 \times 10.0 - 2.5 - 2.5 \times \frac{1}{6} \times 0.2\right) I_2 \geq 0.21I_2 > 0 \quad (\text{A-1})$$

$$I_4 - \frac{\gamma}{2}H - \frac{\gamma k}{4}H = I_4 - 7.5H \approx I_4 - 2.5H^{1/2}(q) \geq \frac{1}{2}I_4 \quad (\text{A-2})$$

となる。

付録 B

慣性行列 $H(q)$ は q に依存するが、その (1, 1) 成分である $H_{11}(q)$ は q_1 に依存しない。また、ラグランジュの方程式の性質から

$$\left(-\frac{1}{2}\dot{H}(p) + S(p, \dot{p})\right) \dot{p} = \left[\frac{\partial}{\partial p} \left\{\frac{1}{2}\dot{p}^T H(p)\dot{p}\right\}\right]^T = \left\{\frac{\partial K}{\partial p}\right\}^T \quad (\text{B-1})$$

と書ける。 $\partial K/\partial p$ の各成分は $\dot{p}_i \dot{p}_j$ の線形和で記述されるが、その係数の大きさは $H_{ij}(p)$ のオーダーであり、しかも \dot{p}_1^2 は出現しない。そして、 $\dot{p}_j = \dot{q}_j/\sqrt{c_j}$ であるから、 $\partial K/\partial p_i$

の大きさは高々

$$\left| \frac{\partial K}{\partial p_i} \right| \leq \frac{1}{25} \|\dot{p}\|^2 \quad (\text{B-2})$$

と見積もることができる。また、 $J(p)$ は付録Aで述べたように、 $JJ^T \leq 1.0I_2$ であるから

$$\begin{aligned} \left| \Delta \mathbf{x}^T J \left(-\frac{1}{2} \dot{H} + S \right) \dot{p} \right| &\leq 1.0 \|\Delta \mathbf{x}\| \cdot \left\| \left(-\frac{1}{2} \dot{H} + S \right) \dot{p} \right\| \\ &\leq 1.0 \times 0.1275 \times \frac{2}{25} \|\dot{p}\|^2 \leq 0.0102 \|\dot{p}\|^2 \end{aligned} \quad (\text{B-3})$$

他方、

$$\left| \Delta \mathbf{x}^T J H \dot{p} - \dot{p}^T J^T J H \dot{p} \right| \leq \|\Delta \mathbf{x}\| \cdot \|J(q)C^{-1}H(q)\dot{q}\| + \left| \dot{q}^T J^T(q)J(q)C^{-1}H(q)\dot{q} \right| \quad (\text{B-4})$$

と表されるが、 C^{-1} を $(1/3)H^{1/2}(q)$ のオーダーに選んだことから $C^{-1}H(q)$ は $(1/6)C$ のオーダーを越えないことになり、また、 $J(q)/\partial q_i$ のスペクトル半径が $1/3$ のオーダーであり、 $J^T(q)J(q)$ のスペクトル半径が 0.15 以下（シミュレーション結果）であることから、

$$\left| \Delta \mathbf{x}^T J H \dot{p} - \dot{p}^T J^T J H \dot{p} \right| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} \|\Delta \mathbf{x}\| \cdot \|\dot{p}\|^2 + 0.15 \times \frac{1}{6} \|\dot{p}\|^2 \leq 0.0391 \|\dot{p}\|^2 \quad (\text{B-5})$$

となる。こうして、(B-3)と(B-5)より

$$\begin{aligned} k \left| \Delta \mathbf{x}^T J \left(-\frac{1}{2} \dot{H} + S \right) \dot{p} - \Delta \mathbf{x}^T J H \dot{p} - \dot{p}^T J^T J H \dot{p} \right| \\ \leq 10.0 \times \{0.0102 + 0.0391\} \|\dot{p}\|^2 \leq \frac{1}{2} \|\dot{p}\|^2 \end{aligned} \quad (\text{B-6})$$

となり、式(23)が成立することが示された。

付録C

式(15)から

$$W(\Delta \mathbf{x}, \dot{p}) \geq \frac{k}{2} \Delta \mathbf{x}^T \{2I_2 - 10.0 J H J^T\} \Delta \mathbf{x} \quad (\text{C-1})$$

であるが、付録で述べたように $H(p) = C^{-1/2} H(q) C^{-1/2}$ は $(1/3)H^{1/2}(q)$ のオーダーであり、これはまた $(1/9)C$ のオーダーである。 C のスペクトル半径は 0.6 であり、 $J(p)J^T(p) (= J(q)C^{-1}J^T(q))$ のそれは最大でも 1.0 以下であるから、 $J H J^T$ のスペクトル半径は約 $1/20$ であり、決して $1/15$ を越えることはないであろう。その結果、

$$W(\Delta \mathbf{x}, \dot{p}) \geq \frac{k}{2} \Delta \mathbf{x} \left\{ 2I_2 - 10.0 \times \frac{1}{15} I_2 \right\} \Delta \mathbf{x} = \frac{2}{3} k \|\Delta \mathbf{x}\|^2 \quad (\text{C-2})$$

となる。

次に、 $H(p) = C^{1/2} H(q) C^{-1/2}$ であることと、 C を $3.0 \times H^{1/2}(q)$ 以上のオーダーで選んだことより、 $H(p)$ のスペクトル半径は $(1/3)H^{1/2}(q)$ のスペクトル半径のオーダーになり、それはほぼ $0.2/3 \leq 0.075$ に見積もることができる。こうして

$$\| -H(p)\dot{p} \| \leq \sqrt{2 \times 0.075} \cdot \sqrt{(1/2)\dot{p}^T H(p)\dot{p}} \leq \sqrt{0.15} \cdot \sqrt{E(t)} \quad (\text{C-3})$$

と見積もることができた。

参考文献

- [1] E. Thelen and L.S. Smith, *A Dynamic Systems Approach to the Development of Cognition and Action*, The MIT Press, Cambridge, MA (1993).
- [2] H.T.A. Whiting (ed.), *Human Motor Actions-Bernstein Reassessed*, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, The Netherlands (1984).
- [3] G. Hinton, Some computational solutions to Bernstein's problems, in the *book* cited above as [2], pp. 413–438 (1984).
- [4] J.M. Hollerbach and K.C. Suh, Redundancy resolution of manipulators through torque optimization, *IEEE J. of Robotics and Automation*, Vol. RA-3, pp. 308–316 (1987).
- [5] S. Arimoto, J.-H. Bae, and K. Tahara, Dynamic stable pinching by a pair of robot fingers, *Proc. of 2nd IFAC Conf. on Mechatronic Systems*, Dec. 9–11, 2002, Verkeley, CA, pp. 731–736 (2002).
- [6] S. Arimoto, K. Tahara, J.-H. Bae, and M. Yoshida, A stability theory of a manifold: concurrent realization of grasp and orientation control of an object by a pair of robot fingers, *Robotica*, Vol. 21, pp. 163–178 (2003).
- [7] S. Arimoto, M. Yoshida, J.-H. Bae, and K. Tahara, Dynamic force/torque balance of 2D polygonal objects by a pair of rolling contacts and sensory-motor coordination, *J. of Robotic Systems*, Vol. 20, pp. 517–537 (2003).
- [8] S. Arimoto, Intelligent control of multi-fingered hands, to be published in the Spring Issue of *Annual Review in Control* (2004).
- [9] D.E. Whitney, Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses, *IEEE Trans. Man-Machine Syst.*, Vol. MMS-10, pp. 47–53 (1969).
- [10] T. Flash and N. Hogan, The coordination of arm movements: An experimentally confirmed mathematical model, *J. Neurosci.*, Vol. 5, pp. 1688–1703 (1985).
- [11] Y. Uno, M. Kawato, and R. Suzuki, Formation and control of optimal trajectory in human multijoint arm movement, *Biol. Cybern.*, Vol. 61, pp. 89–101 (1989).
- [12] M. Kawato, Y. Maeda, Y. Uno, and R. Suzuki, Trajectory formation of arm movement by cascade neural network model based on minimum torque-change criterion, *Biol. Cybern.*, Vol.62, pp.275–288 (1990).
- [13] T. Yoshikawa, Manipulability of robotic mechanisms, *Int. J. Robotics Res.*, Vol. 4, pp. 3–9 (1984).
- [14] H. Seraji, Configuration control of redundant manipulators: Theory and Implementation, *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol.5, pp. 472–490 (1989).
- [15] M.L. Latash, *Neurophysiological Basis of Movement*, Human Kinetics Pub., New York (1998).
- [16] K.B. Shimoga, Robot grasp synthesis algorithms: A survey, *Int. J. Robotics Research*, Vol. 13, pp. 230–266 (1996).
- [17] A. Bicchi, Hands for dexterous manipulation and robust grasping: A difficult road toward simplicity, *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, Vol. 16, pp. 652–662 (2000).
- [18] V. Nguyen, Constructing force-closure grasps, *Int J. Robotics Research*, Vol. 7, pp. 3–16 (1988).

- [19] E. Rimon and J.W. Burdick, New bounds on the number of frictionless fingers required to immobilize 2D objects, *Proc. of the 1999 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Nagoya, Japan, pp. 751–757 (1995).
- [20] J. Czyzowics, I. Stojmenovic, and J. Urrutia, Immobilizing a polytope, *Lecture Notes in Computer Science*, Springer 519, Springer, New York, pp. 214–227 (1991).
- [21] B. Mishra, J.T. Schwartz, and M. Sharin, On the existence and synthesis of multifinger positive grips, *Algorithmica*, Vol. 2, pp. 541–548 (1987).
- [22] A.B.A. Cole, J.E. Hauser, and S.S. Sastry, Kinematics and control of multi-fingered hands with rolling contact, *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-34, pp. 398–404 (1989).
- [23] E. Paljug, X. Yun, and V. Kumar, Control of rolling contacts in multi-arm manipulation, *IEEE Trans. Robotics and Automation*, Vol. 10, pp. 441–452 (1994).
- [24] S. Arimoto, P.T.A. Nguyen, H.-Y. Han, and Z. Dougeri, Dynamics and control of a set of dual fingers with soft tips, *Robotica*, Vol. 18, pp. 71–80 (2000).
- [25] S. Arimoto, K. Tahara, M. Yamaguchi, P.T.A. Nguyen, and H.-Y. Han, Principle of superposition for controlling pinch motions by means of robot fingers with soft tips, *Robotica*, Vol. 19, 21–28 (2001).
- [26] 田原健二, 山口光治, 有本 卓, 最小自由度をもつ柔軟2本指ロボットによる安定把持および姿勢制御のためのセンソリーフイーディングバック, *日本ロボット学会誌*, Vol. 21, pp. 763–769 (2003).
- [27] S. Nakamura, K. Tahara, J.-H. Bae, M. Sekimoto, and S. Arimoto, Experiments of grasping and object-manipulation by a pair of multi-degrees of freedom robot fingers, *Proc. of 2003 IEEE Int. Symp. on Comp. Intell. in Robotics and Automation*, July 16–20, Kobe, Japan, pp. 1162–1167 (2003).
- [28] Y. Youm, M. Holden, and K. Dohrmann, Finger ray ratio study, *Technical Report on Wrist Project*, No. 10, The Univ. of Iowa, Iowa City, Iowa (1977).
- [29] L. Stark, *Nuerological Control Systems: Studies in Bioengineering*, Plenum Press, New York (1968).
- [30] J.-H. Bae and S. Arimoto, Important role of force/velocity characteristics in sensory-motor coordination for control design of object manipulation by a multi-fingered robot hand, to be published in *Robotica*, Vol. 22 (2004).
- [31] ニコライ・A・ベルンシュタイン（著）；工藤和俊, 佐々木正人（訳）, デクステリティ：巧みさとその発達, 金子書房 (2003).
- [32] A.G. Feldman, Functional tuning of the nervous system with control of movement or maintenance of a steady posture, III. Mechanographic analysis of the execution by man of the simplest motor tasks, *Biophysics*, Vol. 11, pp. 766–775 (1966).
- [33] A.G. Feldman, Once more on the equilibrium-point hypothesis (λ model) for motor control, *J. of Mat. Behav.*, Vol. 18, pp. 17–54 (1986).
- [34] E. Bizzi, A. Ploliti, and P. Morasso, Mechanisms underlying achievements of final head position, *J. Neurophysical*, Vol. 39, pp. 435–444 (1976).

- [35] S. Arimoto, M. Yoshida, and J.-H. Bae, Dynamic force/torque closure for 2D and 3D objects by means of rolling contacts with robot fingers, Proc. of the 2003 IEEE Int. Conf. on Robotics, Intell. Syst. and Signal Processing, Changsha, China, pp. 178–183 (2003).
- [36] S. Arimoto, J.-H. Bae, and R. Ozawa, Enhancement of dexterity of object manipulation by surplus DOF of robot fingers: Analysis and simulation of overall fingers-object dynamics, submitted to *J. of Robotic Systems* (2004).
- [37] S. Arimoto, Can Newtonian mechanics explicate why and how babies (or robots) acquire dexterous hand motion?, Proc. of the 8th IEEE Int. Conf. on Methods and Models in Automation and Robots, Szczecin, Poland, pp. 129–136 (2002).
- [38] R. Ozawa, S. Arimoto, M. Yoshida, and S. Nakamura, Stable grasping and relative angle control of an object by dual finger robots without sensing, *Proc. of the 2004 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, New Orleans, LA, pp. 1694–1999 (2004).
- [39] 吉田守夫, 有本 卓, 小澤隆太, 物体情報を用いない重力下における安定ピンチング, 第22回日本ロボット学会学術講演会発表予定 (2004).