

修士論文 (2003年度)

重力制御下における巨視的波束の 量子干渉効果

大阪市立大学大学院工学研究科
前期博士課程電子情報系専攻

中園 直史

目次

1	序論	819
2	BECの基本原理	819
2.1	希薄原子気体のトラップ	819
2.2	冷却の原理	820
2.3	BECの特性	821
2.4	干渉実験の例	822
2.5	Feshbach 共鳴	822
3	Gross-Pitaevski 方程式 (GPE) と無次元化	823
3.1	Gross-Pitaevskii 方程式 (GPE)	824
3.2	2次元系	824
3.3	エネルギーと初期波束の幅	825
4	モデルと計算方法	825
4.1	モデル	825
4.2	数値計算法	826
5	計算結果	829
5.1	干渉縞 (線形極限)	829
5.2	干渉縞 (非線形領域と重力制御)	833
5.3	実際のサイズと重力変化に対する考察	840
6	まとめと今後の課題	841
7	謝辞	842
8	参考文献	842

1 序論

近年、ボーズ・アインシュタイン凝縮 (BEC) の研究が盛んに行われている [1]。BEC とは固体、液体、気体、プラズマに次ぐ物質の第 5 番目の状態である。BEC は絶対零度近くでのみ見ることができ、それまで自由に動き回っていた原子が急に集団で同じ振舞いを始める特性を持つ。この BEC の研究の意義は、理論面においてはまだはっきりしない部分を持つ量子論の考察、そして実用面では原子レーザーや原子顕微鏡などが挙げられる。歴史的には約 70 年前にアインシュタインが予言をしており、それが 1995 年に実験で再現された。1997 年には BEC の生成に関する技術に対してノーベル賞が与えられ、2001 年にはこの BEC の実現に寄与した Carl Wieman, Eric Cornell, Wolfgang Ketterle にノーベル賞が送られた。その後、実験的にも理論的にも盛んに研究が行われ、渦構造や干渉問題、まだ実現されてない種類の希薄原子気体の BEC の作成などが行われている。また、宇宙論に関連した「バースト」、「ジェット」と呼ばれる現象 [2] も見られ、まだこれから研究が行われていくことが予想される。

本研究では特に干渉問題に着目する。モデルは一電子干渉の実験で周知の二重スリット [3] を用い、重力落下によりスリットで分裂した巨視的波束の干渉縞を考察した。BEC 系は Gross-Pitaevskii 方程式 (GPE) で記述され、その GPE は非線形項を持つ。それは BEC の散乱長で特徴づけられ、例えば ^{87}Rb , ^{23}Na では正の散乱長 (斥力相互作用) であり、 ^{85}Rb , ^7Li では負の散乱長 (引力相互作用) である。但し、この散乱長は Feshbach 共鳴と言われる外部磁場を調節することにより変化させることが出来る。つまり、非線形性の正負、強弱をパラメータとし、BEC の干渉を考察できる。この研究ではその非線形性が干渉縞に及ぼす影響を明らかにする。

また近年、宇宙開発プロジェクトに伴う微小重力、重力変調下における物理実験の企画立案が広く求められている。本研究では巨視的波束をスリット通過させるために重力を用いている。この重力項を地表重力に固定せず、変調させることでの干渉縞に対する影響も明らかにする。

第 2 章で BEC の基本特性について述べ、第 3 章で本研究で重要な意味を持つ Gross-Pitaevskii 方程式と数値計算の準備としての無次元化を説明する。第 4 章で数値計算法、本研究の内容について話し、第 5 章で得られた結果とその考察について言及する。第 6 章でまとめを述べる。

2 BEC の基本原理

この章は BEC そのものの基本原理を説明する。具体的には原子のトラップの原理、冷却の原理、BEC の特性、干渉実験の例、さらに Feshbach 共鳴についてを説明する。

2.1 希薄原子気体のトラップ

BEC の実現には大きな 2 つの技術が必要である。それは原子集団を希薄気体のままの状態を保つこと、その原子集団を絶対零度付近まで冷却することである [1]。ここでは、磁

場により希薄気体のまま保つ技術を説明する。

2.1.1 レーザー冷却

レーザー冷却とはドップラー効果を用いた冷却方法である。レーザー振動数を ν_{laser} とし、原子の共鳴振動数よりも低くなるようにする。その時、原子がレーザー光と対向する方向に運動すれば原子から見たレーザー光の振動数はドップラー効果により高くなり、原子が光子を吸収する割合は高くなる。逆に原子がレーザー光と同方向に運動する場合は原子から見たレーザー光の振動数は低くなり、原子が光子を吸収する割合は低くなる。よって2つのレーザー光に沿って原子が運動した場合、対向するレーザーの光子をより多く吸収し、その反跳によって減速される（原子は吸収したエネルギーを自然放出する時にも反跳を受けるがそれは等方的なので減速も加速もしない）。これをドップラー冷却という。この原理を用いれば、例えば6本のレーザービームを x, y, z 座標の原点に向かうように x, y, z 軸上に配置するとその原点（レーザー光の交差点）に原子が集まることになり、3次元的に原子の閉じ込めが出来る。また、この冷却方法では冷却できる最低温度が励起原子の自然幅で決まり、例としてはナトリウムで $240\mu K$ 、セシウムで $125\mu K$ である。しかし、極低温に冷却された原子は重力のためにレーザービームの交差点から落下してしまう。冷却原子を研究するためにはこれを捕獲する必要がある。そこで考案されたのが磁気光学トラップ (MOT) である。

2.1.2 磁気光学トラップ

上記のレーザー光の交差点で磁場が極小となるようにしてゼーマン効果の光吸収の偏光選択性を利用して原子に復元力を与えることが出来る。それにより原子を捕獲することが出来る。

原理のみを簡単に述べるとコイルなどを用いて中心から外側に行くほど磁場が強くなるようにする。スピンをもった原子に磁場をかけると上向きと下向きのスピンのゼーマン分裂が生じ、ゼーマン分裂は中心から外に行くにつれて大きくなっていく。上向きスピンは外に行くほどエネルギーが高くなり中央に留まることになる。逆に下向きスピンは外側のほうがエネルギーが低いため外に逃げていく。このようにして最終的に上向きスピンのみが中央にトラップされることになる。図1にこの概略図を示した。このようにして原子集団を希薄気体に保つことができる。この後、原子集団を冷却することにより BEC を生成することができる。冷却方法については次で述べる。

2.2 冷却の原理

2.1.1 で述べたレーザー冷却では BEC に到達する温度より高く、さらに冷却をする必要がある。そのために蒸発冷却と呼ばれる方法を用いる。この方法は文字通りお湯が蒸発して冷却されていく過程に似ている。図2に概略図を示す。まず原理はエネルギーの高い原子だけをトラップから除く。しばらくすると残った原子だけでボルツマン分布に従った分

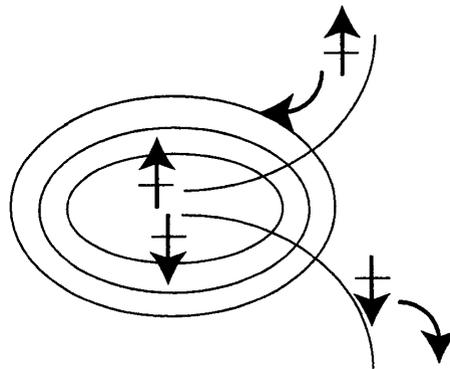


図 1: 磁気トラップの概念図

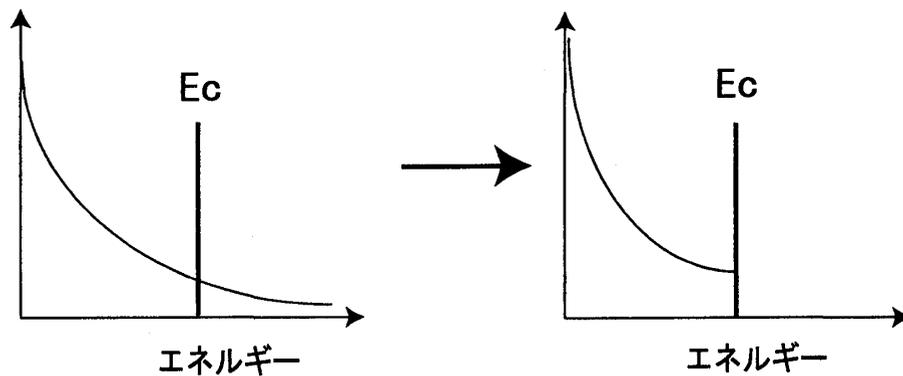


図 2: 蒸発冷却の概念図。左図から右図になり温度が下がる。

布となる。これを繰り返すことで温度を下げていく。デメリットとして温度を下げるたびに原子数が減少していくこと、平衡状態になるまでの時間が必要なため冷却に時間がかかることが挙げられる。しかし、これで温度を絶対零度から数ナノ度まで冷却でき、BECの生成が可能になる。高エネルギーの原子を除く方法は、凝縮状態の表面にある高エネルギー原子にrf(ラジオ周波数)磁場を当てることにより、スピンを反転させる。反転させられたスピンは磁場によりトラップからはじき出される。このようにして高エネルギーの原子を除き、温度を下げBECを生成する。次にBECの特性について述べる。

2.3 BECの特性

BECはGross-Pitaevskii方程式(GPE)で記述される。

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = H_0 \phi + u_0 |\phi|^2 \phi \quad (1)$$

ここで、 $u_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} N_0$ 、 a は散乱長、 N_0 は原子数であり、 H_0 はハミルトニアンである。前述したように散乱長 a には正負(斥力と引力)がある。具体的には

斥力相互作用 ^{87}Rb : 5.7nm、 ^{23}Na : 2.75nm

引力相互作用 ${}^7\text{Li} : -1.45\text{nm}$

という物質により決まった値を持つ。BEC の特性をまとめると、

1. BEC は散乱長で特徴付けられる弱い相互作用を持った系である。
 2. 散乱長は物質により決まっており、斥力相互作用と引力相互作用の 2 種類がある。
 3. 散乱長は Feshbach 共鳴という外部磁場を調節することにより斥力から引力へ変化させることが出来る。
 4. 閉じ込めポテンシャルは微視的な凹凸や不純物、欠陥を含まず理想的な形をとることが出来る。
- となる。上記の点から巨視的量子状態を得ることが出来る。

引力相互作用について

引力相互作用は準安定状態である [1]。引力相互作用には斥力相互作用のときには無かった原子数の上限が存在する。閉じ込めポテンシャルを放物型 ($V_{\text{trap}} = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$) とすれば、この原子数の上限は次のように理解できる。BEC の大きさを R とすれば V_{trap} は R^2 に比例し、運動エネルギーは不確定性関係より $1/R^2$ に比例する。引力相互作用のエネルギーは負で N_0/R^3 に比例する。全エネルギーはこの 3 つの和となる。これより N_0 が臨界値 N_c よりも小さければ全エネルギーは極小値 ($R = R_c$) をもちこの点で BEC が生成されると考えられる。臨界値を超えると極小値がなくなり、安定な BEC は生成されないことになる。

その具体的な原子数の上限を考えてみる。安定な BEC の存在条件が零点エネルギー ($\sim \hbar\omega$) $>$ 引力相互作用エネルギー ($\frac{4\pi\hbar^2 a}{mR^3} N_0$) なので、臨界値 N_c は $R \simeq d$ ($d = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$) であることから $N_c \simeq \frac{d}{|a|}$ となる。

2.4 干渉実験の例

ここでは、本研究の主題となる BEC の干渉について説明する。簡単に MIT で行われた実験方法 [4,8] を紹介する。手順は次の通り。

1. single well ポテンシャルに BEC を生成する。
2. 中央にレーザーを当て double well ポテンシャルにして BEC を二つに分ける。
3. トラップポテンシャルを切って重力落下させ、2 つの BEC が広がって重なり合ったところでの干渉を見る。

概略図を図 3 に示した。この実験で干渉縞を観測した MIT グループは 2001 年にノーベル賞を受賞した。本研究との関係の強い実験の一つである。

2.5 Feshbach 共鳴

BEC における散乱長は物質により決まっているが、Feshbach 共鳴を使ってその散乱長を変化させることが出来る。ここでは、Feshbach 共鳴について述べる。Feshbach 共鳴とは原子同士の衝突時に一時的に束縛状態が形成される状態である。衝突前のエネルギーと

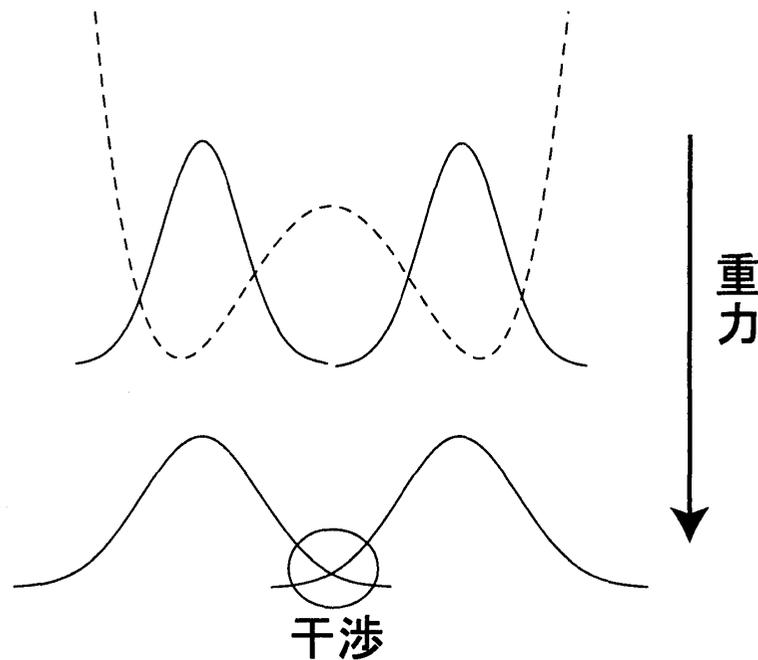


図 3: MIT の実験の概略図

束縛エネルギーが等しくなる近傍では Feshbach 共鳴が起こり、散乱長が変化する。式で書くと

$$a(B) = a_0 \left(1 - \frac{\Delta}{B - B_F} \right)$$

となる。ここで、 a_0 は非共鳴時の散乱長、 Δ は共鳴の幅、 B_F は共鳴磁場である。散乱長が変化可能であることは斥力から引力への変化も可能になり、新しい考察が出来るようになる。例えば、斥力相互作用の BEC から引力相互作用における原子数の臨界値を超えたまま引力へ変化させ、その BEC の崩壊を調べることもできる。実際にこれらは実験的にも数値シミュレーションでも行われている。この BEC の崩壊で一部の原子が高いエネルギーで BEC の周囲に放出される「バースト」と呼ばれる現象 [2] が起きる。これは超新星爆発に例えられて「Bosenova」と呼ばれることもある。また、崩壊途中で再び斥力相互作用にすることで「ジェット」と呼ばれる非等方的な原子の密度パターンになる現象もある。このように Feshbach 共鳴により様々な実験、考察が可能になる。

本研究においても Feshbach 共鳴を用いて GPE における非線形性の正負、強弱に注目し、干渉縞への影響を明らかにしていく。

3 Gross-Pitaevski 方程式 (GPE) と無次元化

この章では BEC を記述する GPE の説明と無次元化の方法、初期波束の設定について述べる。本研究に沿った方法で説明していく。

3.1 Gross-Pitaevskii 方程式 (GPE)

BEC 系は GPE により記述される。ここでは GPE について述べる。絶対零度付近では N_0 の粒子が同じ 1 粒子量子状態を占めている。単純な描像では系の多体波動関数は 1 粒子の波動関数の N_0 重積として書ける。これはハートリー多体波動関数である。もし、原子の相互作用が無ければ波動関数は 1 原子の時間依存シュレーディンガー方程式を満たす。しかし、BEC では原子が 2 体衝突により相互作用している。原子は極低温のため正面衝突つまり s 波衝突が重要となる。そして BEC は希薄気体のため、相互作用はデルタ関数的で、強さが s 波散乱長 a で与えられるポテンシャルで近似できる。各原子はそれ以外の原子の存在による平均場で付加的なポテンシャルを感じる。局所的な原子密度に比例するこのポテンシャルはシュレーディンガー方程式に取り込まれて原子-原子相互作用を表す。その結果 GPE は次の式になる。

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi + V_{trap} \phi + u_0 |\phi|^2 \phi \quad (2)$$

ここで、 $u_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} N_0$ であり、 a は散乱長、 m は原子の質量。実験の再現などを通して GPE の正当性は確かめられている。

3.2 2次元系

2次元系の GPE は次式。

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) \phi + u_0 |\phi|^2 \phi \quad (3)$$

ここで、 $u_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m l_z} N_0$ は 2次元の相互作用であり、トラップポテンシャルは等方的とした。ここで N_0 は原子数であり、 $l_z = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ は特長的長さである。本研究では 2次元系で重力を用いるので式 (3) に $mg y \phi$ (y 方向への重力落下) の項を加えて考察する。 $l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ の長さ (トラップの大きさ) を用いて無次元化する [9,10]。

$$t' = \omega t, x' = \frac{x}{l}, y' = \frac{y}{l}, \phi' = l \phi$$

上の関係を式 (3) に代入し無次元化を行う。

$$i \frac{\partial \phi'}{\partial t'} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \phi' + \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) \phi' + u'_0 |\phi'|^2 \phi' + g' y' \phi' \quad (4)$$

ここで、 $u'_0 = 4\pi N_0 \frac{a}{l_z}$ 、 $g' = \frac{g}{l\omega^2}$ である。また、重力はトラップを切った後の時間発展のときに加えるので初期波束の生成には寄与しないとする。

初期波束は次式で与えられる。

$$\phi'_{ini} = \sqrt{\frac{1}{\pi \Delta}} \exp\left(-\frac{1}{2\Delta} (x'^2 + y'^2)\right) \quad (5)$$

Δ についても後の subsection で議論する。

3.3 エネルギーと初期波束の幅

まず、初期波束の式 (5) が成り立つと仮定する。初期波束がわかっているので無次元化されたエネルギーを次式より求めることが出来る [13,14,17]。

$$E' = \int d^2\vec{r}' \left[\frac{1}{2} |\nabla\phi'|^2 + V'_{trap} |\phi'|^2 + \frac{u'_0}{2} |\phi'|^4 \right] \quad (6)$$

式 (6) に式 (5) を代入する。

$$E' = \frac{1}{2\Delta} + \frac{\Delta}{2} + \frac{u'_0}{4\pi\Delta} \quad (7)$$

エネルギー最小の初期波束が実現されていると仮定する。この時、波束の幅を決定する条件は

$$\frac{\partial E'}{\partial \Delta} = -\frac{1}{2\Delta^2} + \frac{1}{2} - \frac{u'_0}{4\pi\Delta^2} = 0 \quad (8)$$

式 (8) より Δ は次式。

$$\Delta = \sqrt{1 + \frac{u'_0}{2\pi}} \quad (9)$$

この初期波束を用いて、本研究の考察を行う。

4 モデルと計算方法

この章では本研究のモデルと計算方法について説明する。本研究では BEC の干渉問題を考察することを目的とする。干渉を考察する上で最も有名な一電子干渉の 2 重スリットを用いることにした。BEC は巨視的量子状態であり、通常の量子力学と違い観測しても波束の収縮が生じない非破壊の測定が出来るメリットがある。また、GPE は非線形シュレディンガー方程式とも呼ばれ線形シュレディンガー方程式にはない非線形項を持っている。この非線形性は Feshbach 共鳴によりある程度自由に変化させることができる。つまり、系に対する非線形性の影響の考察に適している。本研究では干渉縞にこの非線形性がどのように影響を及ぼすのかを明らかにする。また、重力制御下での考察も行う。

4.1 モデル

モデルは 2 次元の重力系で、BEC を重力落下させ 2 重スリットを通過させることで 2 つに分かれた BEC が互いに干渉する様子を考察する。系が従う GPE と用意する初期波束を再び記述する。

$$i \frac{\partial \phi'}{\partial t'} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \phi' + \frac{1}{2} (x'^2 + y'^2) \phi' + u'_0 |\phi'|^2 \phi' + g' y' \phi' \quad (10)$$

$$\phi'_{ini} = \sqrt{\frac{1}{\pi\Delta}} \exp\left(-\frac{1}{2\Delta} (x'^2 + y'^2)\right) \quad (11)$$

ここで、 $u'_0 = 4\pi N_0 \frac{a}{l_z}$ 、 $g' = \frac{g}{\omega^2}$ 、 $\Delta = \sqrt{1 + \frac{u'_0}{2\pi}}$ である。ここで g は重力加速度。

式 (10)、式 (11) を用いて計算を進めていく。ここで注目したいのは干渉縞に対する非線形性の効果と重力の影響である。式 (11) を見てもわかるように非線形項により初期波束の大きさが異なってくる。初期波束の大きさが変わることによる影響、つまり初期波束と 2 重スリットの大きさの関係が異なる影響を取り除きたい。そのために閉じ込めポテンシャルの振動数を変化させ初期波束の大きさが一定になるようにする。

具体的には閉じ込めポテンシャルの振動数 ω を非線形項 u'_0 に対応して調節し、 $\omega \rightarrow \omega\Delta$ にする ($u'_0 = 4\pi N_0 \frac{a}{l_z}$ における l_z は 2 次元の閉じ込めポテンシャルに関与しないため不変)。変数変換 (長さ、時間などに対して) 行いまとめると GPE と初期波束は次式になる。

$$i \frac{\partial \phi'}{\partial t'} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \phi' + \frac{\Delta^2}{2} (x'^2 + y'^2) \phi' + u'_0 |\phi'|^2 \phi' + g' y' \phi' \quad (12)$$

$$\phi'_{ini} = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)\right) \quad (13)$$

時間発展に際して閉じ込めポテンシャル (式 (12) の右辺第 2 項) を取り除いて重力落下させるので計算上は非線形項 u'_0 に依存して特別なことは起こらない式になっている。

初期波束を時間発展させるため、2 次元平面を grid に分け、式 (12) を差分方程式にする。具体的な数値計算の方法については次の subsection で述べる。

4.2 数値計算法

数値計算は式 (12) の差分方程式を解いていくこと中心に行う。まず、数値計算の方法を概念図を用いて説明し、具体的な差分方程式、計算する量などを示していく。差分方程式は陰解法で、値が収束するまで繰り返し計算を行うことになる。差分方程式には Crank-Nicolson 法や ADI 法などがある。ADI 法の利点は 2 次元においては精度を大きく落とすことなく比較的高速な点である。本研究では両方の方法で計算を行い同様の結果を得た。

最初に用意する計算領域に対して説明する。図 4 にこのモデルの計算領域を描いた。 $x' - y'$ 平面で考察を行う。 y' 方向に重力がかかっている系である。初期の位置 (0,0) に波束の中心を置き、重力落下させる。 $y' = 5$ の位置に 2 重スリットを設定し、スリットの幅を 1、スリットの中心間の距離を 4 とした。また、干渉縞を観測する位置、つまりスクリーンは $y' = 18 (= L_{sc})$ に設置する。このスクリーンは 2 重スリットとは違い波束には影響は与えず、単に測定する位置のみを表すものになっている。数値計算は時刻 0 で初期波束を (0,0) に用意し、式 (12) からトラップポテンシャルを切ったもの、つまり

$$i \frac{\partial \phi'}{\partial t'} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) \phi' + u'_0 |\phi'|^2 \phi' + g' y' \phi' \quad (14)$$

に従う時間発展を考察する。初期波束は u'_0 に依存せず、式 (13) で与えられる。

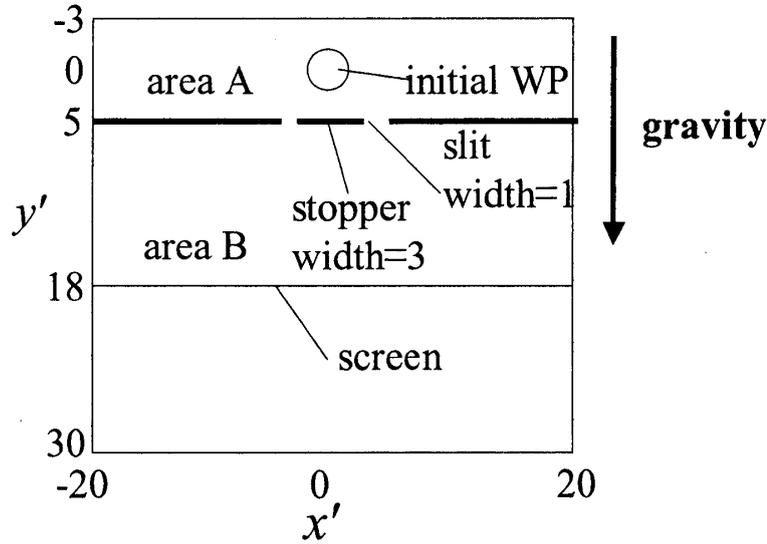


図 4: 数値計算を行う領域の図

4.2.1 差分方程式 (Crank-Nicolson 法)

ここでは差分方程式の Crank-Nicolson 法について説明する。まず、Crank-Nicolson 法の考え方を示す。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi^{l+1}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^l}{\partial t} \right) \quad (15)$$

ここで、 l は時間の index である。上式が Crank-Nicolson 法の考え方であり、 $l+1$ と l の差分の平均を求める式になっている。差分化すると次式を得る。

$$\begin{aligned} i \frac{\phi_{m,n}^{l+1} - \phi_{m,n}^l}{\delta t} = & \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2\delta x^2} (\phi_{m+1,n}^{l+1} + \phi_{m-1,n}^{l+1} - 2\phi_{m,n}^{l+1}) \right. \\ & -\frac{1}{2\delta x^2} (\phi_{m+1,n}^l + \phi_{m-1,n}^l - 2\phi_{m,n}^l) \\ & -\frac{1}{2\delta y^2} (\phi_{m,n+1}^{l+1} + \phi_{m,n-1}^{l+1} - 2\phi_{m,n}^{l+1}) \\ & -\frac{1}{2\delta y^2} (\phi_{m,n+1}^l + \phi_{m,n-1}^l - 2\phi_{m,n}^l) \\ & + u'_0 (|\phi_{m,n}^{l+1}|^2 \phi_{m,n}^{l+1} + |\phi_{m,n}^l|^2 \phi_{m,n}^l) \\ & \left. + g' n \delta y (\phi_{m,n}^{l+1} + \phi_{m,n}^l) \right) \quad (16) \end{aligned}$$

ここで、 l は時間方向、 m, n はそれぞれ x, y 方向の index である。時間発展のための式は次式。

$$\begin{aligned}
 \phi_{m,n}^{l+1} = \phi_{m,n}^l - i\delta t \frac{1}{2} & \left(-\frac{1}{2\delta x^2} (\phi_{m+1,n}^{l+1} + \phi_{m-1,n}^{l+1} - 2\phi_{m,n}^{l+1}) \right. \\
 & -\frac{1}{2\delta x^2} (\phi_{m+1,n}^l + \phi_{m-1,n}^l - 2\phi_{m,n}^l) \\
 & -\frac{1}{2\delta y^2} (\phi_{m,n+1}^{l+1} + \phi_{m,n-1}^{l+1} - 2\phi_{m,n}^{l+1}) \\
 & -\frac{1}{2\delta y^2} (\phi_{m,n+1}^l + \phi_{m,n-1}^l - 2\phi_{m,n}^l) \\
 & \left. + u'_0 (|\phi_{m,n}^{l+1}|^2 \phi_{m,n}^{l+1} + |\phi_{m,n}^l|^2 \phi_{m,n}^l) \right. \\
 & \left. + g'n\delta y (\phi_{m,n}^{l+1} + \phi_{m,n}^l) \right) \quad (17)
 \end{aligned}$$

式(17)により差分解が得られる。陰解法なので値が収束するまで繰り返し計算が必要になる。新しく計算できた左辺の $\phi_{m,n}^{l+1}$ は随時右辺の $\phi_{m,n}^{l+1}$ に代入し続ける。これを Crank-Nicolson 法という。

4.2.2 差分方程式 (ADI 法)

ここでは ADI 法について説明する。まず、式(14)を x 方向に対しては陰解法、 y 方向に対しては陽解法として差分化する。

$$\begin{aligned}
 i \frac{\phi_{m,n}^{l+1} - \phi_{m,n}^l}{\delta t} = & -\frac{1}{2\delta x^2} (\phi_{m+1,n}^{l+1} + \phi_{m-1,n}^{l+1} - 2\phi_{m,n}^{l+1}) \\
 & -\frac{1}{2\delta y^2} (\phi_{m,n+1}^l + \phi_{m,n-1}^l - 2\phi_{m,n}^l) \\
 & + \frac{1}{2} u'_0 (|\phi_{m,n}^{l+1}|^2 \phi_{m,n}^{l+1} + |\phi_{m,n}^l|^2 \phi_{m,n}^l) \\
 & + \frac{1}{2} g'n\delta y (\phi_{m,n}^{l+1} + \phi_{m,n}^l) \quad (18)
 \end{aligned}$$

ここで、 l は時間方向、 m, n はそれぞれ x, y 方向の index である。時間発展のための式は次式。

$$\begin{aligned}
 \phi_{m,n}^{l+1} = \phi_{m,n}^l - i\delta t & \left(-\frac{1}{2\delta x^2} (\phi_{m+1,n}^{l+1} + \phi_{m-1,n}^{l+1} - 2\phi_{m,n}^{l+1}) \right. \\
 & -\frac{1}{2\delta y^2} (\phi_{m,n+1}^l + \phi_{m,n-1}^l - 2\phi_{m,n}^l) \\
 & \left. + \frac{1}{2} u'_0 (|\phi_{m,n}^{l+1}|^2 \phi_{m,n}^{l+1} + |\phi_{m,n}^l|^2 \phi_{m,n}^l) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} g'n\delta y (\phi_{m,n}^{l+1} + \phi_{m,n}^l) \right) \quad (19)
 \end{aligned}$$

上式の値が収束するまで繰り返し計算を行う。新しく計算できた左辺の $\phi_{m,n}^{l+1}$ は随時右辺の $\phi_{m,n}^{l+1}$ に代入し続ける。これをステップ 1 として、次にステップ 1 とは逆の x 方向に対

して陽解法、 y 方向にに対して陰解法の差分方程式をを解く。ステップ 1 の後の時間で次式を得る。

$$\begin{aligned} \phi_{m,n}^{l+2} = & \phi_{m,n}^{l+1} - i\delta t \left(-\frac{1}{2\delta x^2} (\phi_{m+1,n}^{l+1} + \phi_{m-1,n}^{l+1} - 2\phi_{m,n}^{l+1}) \right. \\ & - \frac{1}{2\delta y^2} (\phi_{m,n+1}^{l+2} + \phi_{m,n-1}^{l+2} - 2\phi_{m,n}^{l+2}) \\ & + \frac{1}{2} u'_0 (|\phi_{m,n}^{l+2}|^2 \phi_{m,n}^{l+2} + |\phi_{m,n}^{l+1}|^2 \phi_{m,n}^{l+1}) \\ & \left. + \frac{1}{2} g' n \delta y (\phi_{m,n}^{l+2} + \phi_{m,n}^{l+1}) \right) \end{aligned} \quad (20)$$

この式も値が収束するまで繰り返し計算を行う。これをステップ 2 とする。ステップ 1 とステップ 2 により時間 $l \rightarrow l+2$ の発展を行う。これを ADI 法という。ADI 法は Alternating Direction Implicit Method の略でこのように各ステップごとに交互に格子線の方法を変えていく方法である。これは著者の名前から Peaceman-Rachford 法とも呼ばれている。

5 計算結果

この章ではこれまでに説明してきた方法により得られた結果を考察していく。最初に線形極限での結果（通常のシュレーディンガー方程式）を示す。その後、非線形項を持つ場合 (GPE) の結果を示す。干渉縞に注目し、非線形項、重力の影響を明らかにしていく。

また、本研究を実際のサイズに対応させた時の考察を行う。

5.1 干渉縞（線形極限）

ここでは、線形極限 ($u_0 = 0$) での結果、つまり通常のシュレーディンガー方程式にしたがう波束の結果を示す。ここでの重力は $g' = 1$ で計算した。この結果を示しながら、どのような量を計算するのかを説明していく。

まず、これからの計算結果の見方を説明する。第 4 章で示したようにこのモデルのスクリーンは $L_{sc} = 18$ に設定している。最終時刻は波束の重心が重力落下し、スクリーン位置に到達した際の値を参考にした。最終時刻 T_{max} は $T_{max} = \sqrt{\frac{2L_{sc}}{g'}}$ となる。また、 $\delta x_s = \delta y_s = 0.1, \delta t = 0.002$ で計算を行った。

5.1.1 時間発展ダイナミクス（線形極限）

線形極限での時間発展のダイナミクスを図 5 に示した。巨視的波束が重力落下し、2 重スリットを通過した後、2 つに分かれ干渉する様子を示した。これが線形極限 ($u_0 = 0$) で重力 $g' = 1$ の干渉縞パターンである。スリットの上部には、スリットの通過に失敗した波束の一部が残留し、それ自体がスリットに平行な方法に干渉縞を作っている。非線形領域や重力制御の系でも同様な計算過程で求めている。これからの議論は最終時刻 T_{max} で行うことになる。

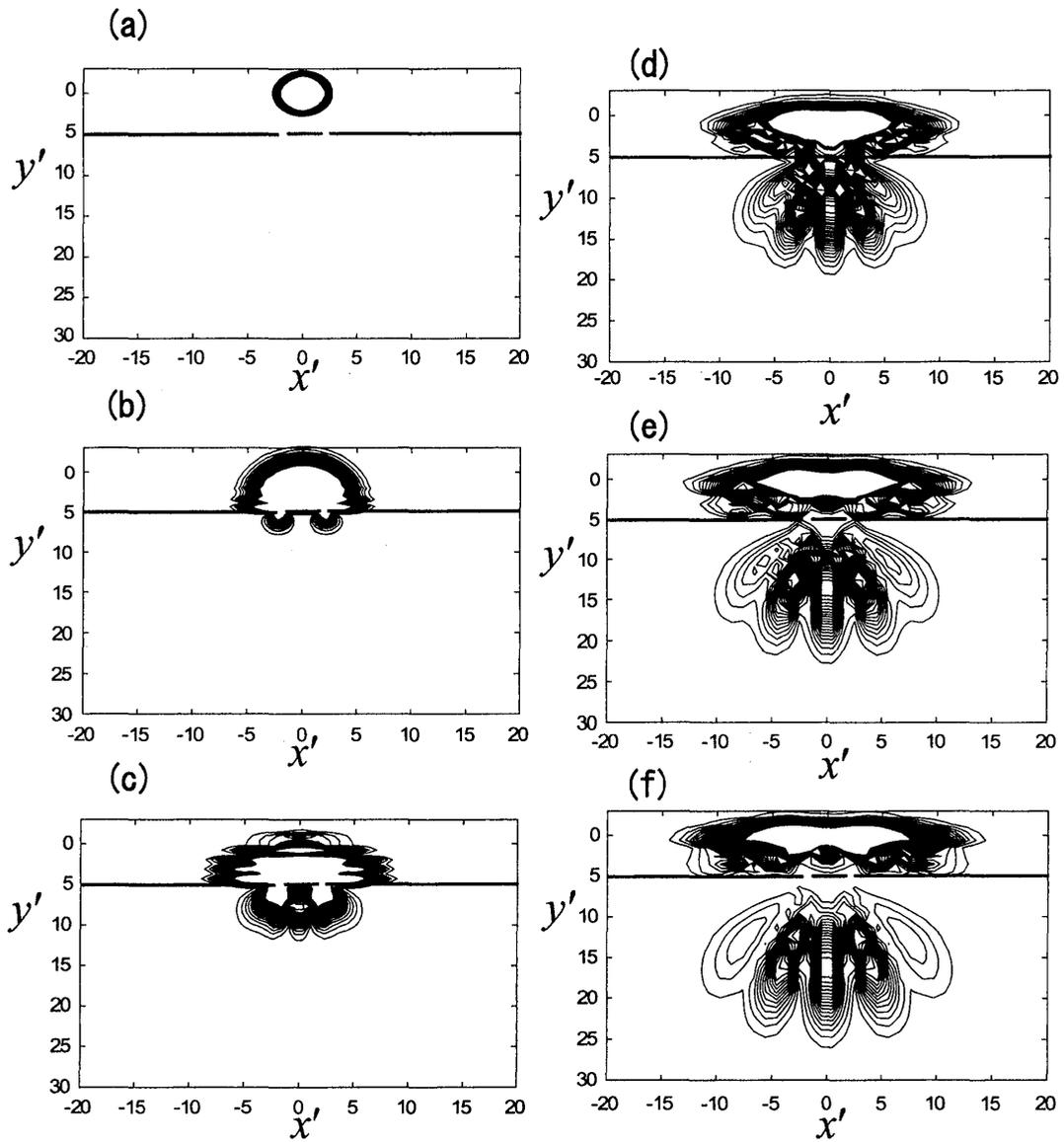


図 5: $u'_0 = 0, g' = 1$ の場合。2重スリットの等高線図。 $t = \sqrt{\frac{2L}{g'}}$ でのスナップショット。
 (a)-(c) は $L = 0, 3, 6$ 、(d)-(f) は $L = 12, 15, L_{max}$ に対応。等高線の刻みは一定にしている。

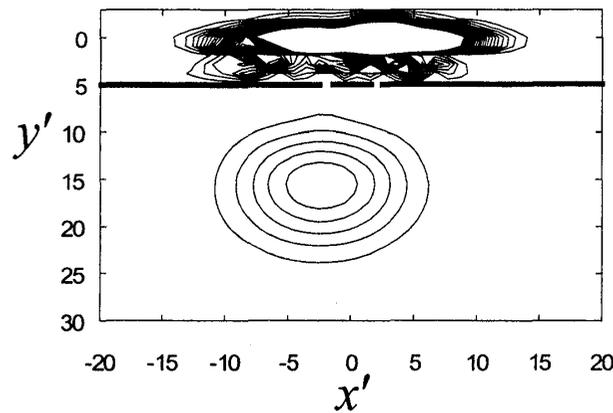


図 6: $u'_0 = 0, g' = 1$ の場合。右のスリットを閉じた時の等高線図

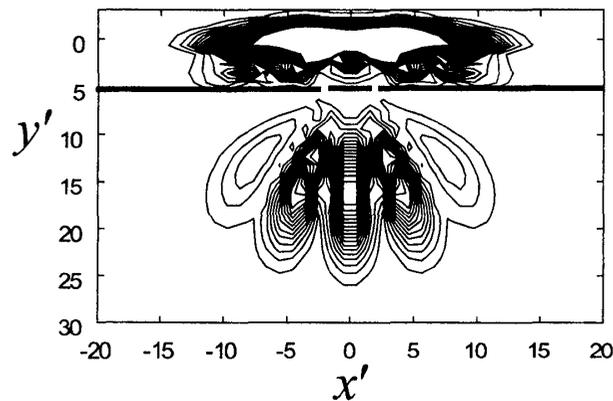


図 7: $u'_0 = 0, g' = 1$ の場合。2重スリットの等高線図

5.1.2 スリットの開閉

Young の 2 重スリットで議論されるようにスリットの片方を閉じた場合との比較図を図 6、図 7 に示す。さらに、その時のスクリーン上での干渉縞パターンを図 8、図 9 に示した。これらは最終時刻での値である。明らかにスリットの片方を閉じた場合には干渉していないことがわかる。よって干渉には 2 つのスリットが必要であることが確認できた。

今後は 2 重スリットのみ議論し、最終時刻での等高線図とスクリーン上での干渉縞パターンを用いることにする。

5.1.3 波束の 2 重スリットに対する透過確率

スリットを通過した量と通過していない量を求めて、波束の何%が通過しているかを確認する。閉じ込めポテンシャルを切った後から 2 重スリットに到着するまでに非線形性の違いにより透過する確率も異なることが予想される。この量を求める方法は図 4 に示している areaA (非通過領域) と areaB (通過領域) のそれぞれの領域での確率を計算すること

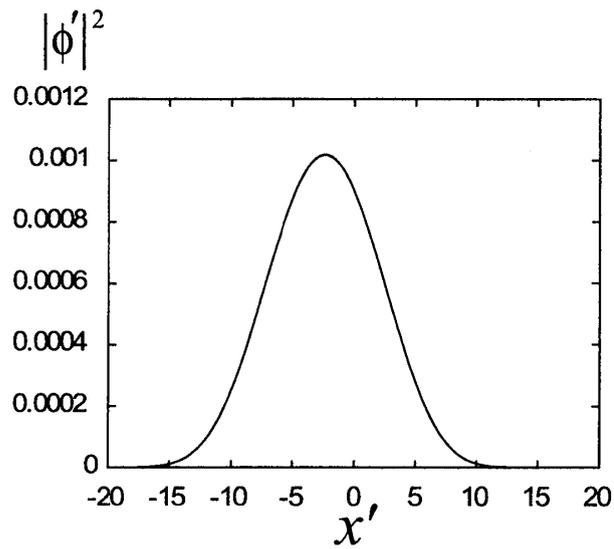


図 8: $u'_0 = 0, g' = 1$ の場合。右のスリットを閉じた時のスクリーン上での干渉縞パターン

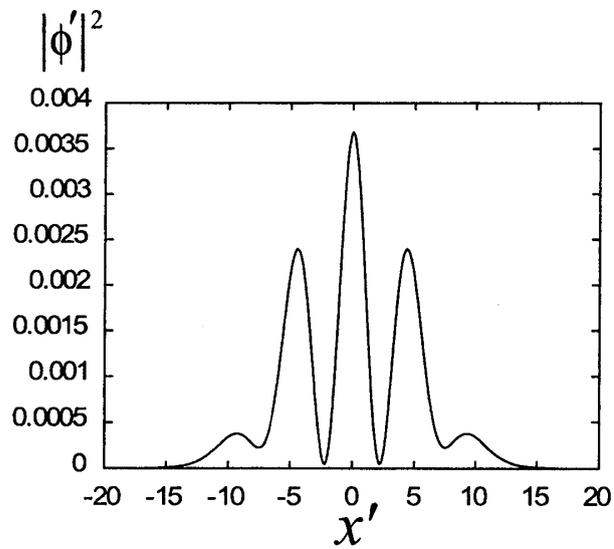


図 9: $u'_0 = 0, g' = 1$ の場合。2重スリットのスクリーン上での干渉縞パターン

である。式で書くと

$$Pr(AorB) = \int \int_{AorB} dx' dy' |\phi'|^2 \quad (21)$$

となる。 $Pr(A) + Pr(B) = 1$ で確率保存されているので、 $Pr(B)$ が通り抜ける割合そのものになっている。詳細を図10に示した。図6に対しては $Pr(B) = 0.137(13.7\%)$ であり、図7に対しては $Pr(B) = 0.278(27.8\%)$ であった。これからの結果にはこの $Pr(B)$ の結果も同時に示していく。

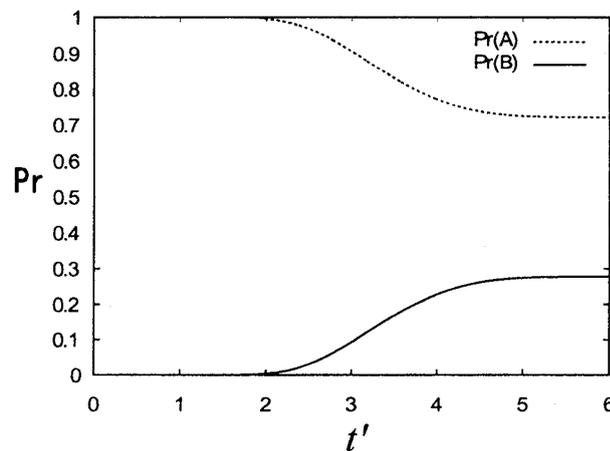


図10: $u_0 = 0, g' = 1$ の場合。スリット通過に関する確率

5.2 干渉縞（非線形領域と重力制御）

線形極限での結果を基準とし、非線形性と重力の影響について議論する。求める量は前の subsection で示したように最終時刻 $Tmax = \sqrt{\frac{2L_{sc}}{g'}}$ での等高線図とスクリーン上での干渉縞パターンである。

ここでは非線形項を $u_0 = -3, 0, 20$ の3パターン、重力を $g' = 1, 3, 5$ の3パターンとし、全体として9パターンの計算を行った。等高線図とスクリーン上での干渉縞パターンより非線形性の効果、重力の影響を明らかにする。非線形性は波束の粒子性、波動性に関係し、重力はスクリーン上に到達した時の波束の速度を変化させる（deBroglie 波長の変化に対応）効果があると考えられる。これらがどのように干渉縞に影響を与えるのかを明らかにする。

5.2.1 等高線図とスクリーン上での干渉縞パターン

結果を図11に示す。さらにスクリーン上での干渉縞パターンを図12に示す。考察しやすくするため図12はスクリーン上で干渉縞パターンを規格化した値を用いている。縦軸は0-0.2で統一している。重力に注目した場合、干渉縞のピーク間隔が重力が増えるに

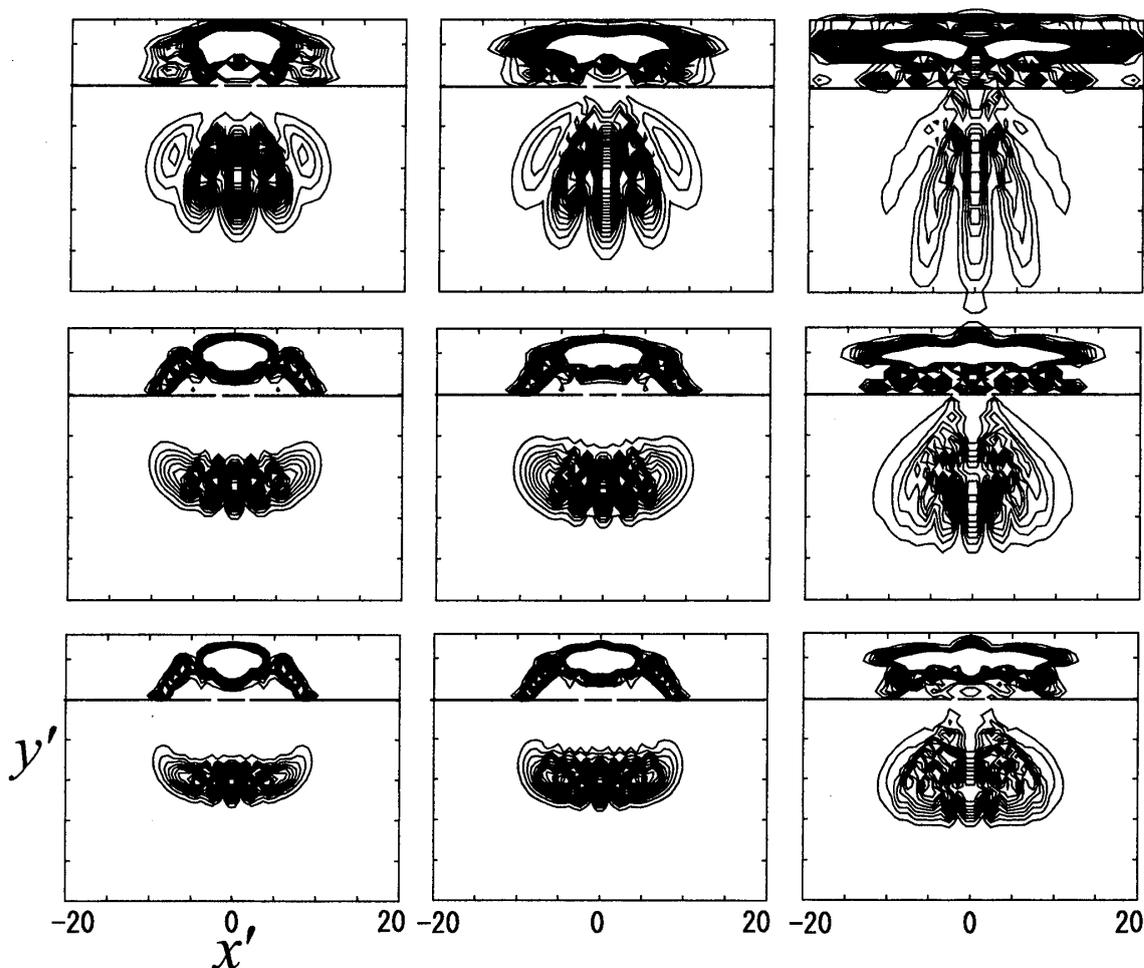


図 11: 等高線図。上から下へは重力の違い $g' = 1, 3, 5$ 。左から右へは非線形項の違い $u'_0 = -3, 0, 20$ 。

つれて狭くなってきているのがわかる。これはスクリーン到達時の波束の速度が異なることにより、*deBroglie* 波長の変化が影響していると考えられる。次に、非線形性に注目すると波束が非線形項 u'_0 が大きいほど広範囲に広がっていることが確認できる。非線形性が負または小さいと波束が広がりにくい、つまり粒子性の性質を反映していると考えられる。また逆に非線形性が大きいと波束が広がりやすい、つまり波動性の性質を反映していると考えられる。次の 5.2.2 でスクリーン上の干渉縞パターンを用いて具体的な考察を行う。また、非線形項 $u'_0 = 50, 100$ に対しては重力 $g' = 5$ のみの結果を図 13 に示す

5.2.2 干渉縞パターンに対する非線形性と重力の影響

ここでは得られたスクリーン上での干渉縞パターンを用いて考察を行っていく。まずは非線形項一定とし、重力の影響を考察する。図 12 から干渉縞ピークの間隔を求める。結果を図 14 に示す。各 u'_0 に対して重力が干渉縞ピークの間隔を狭くしていることがわかる。

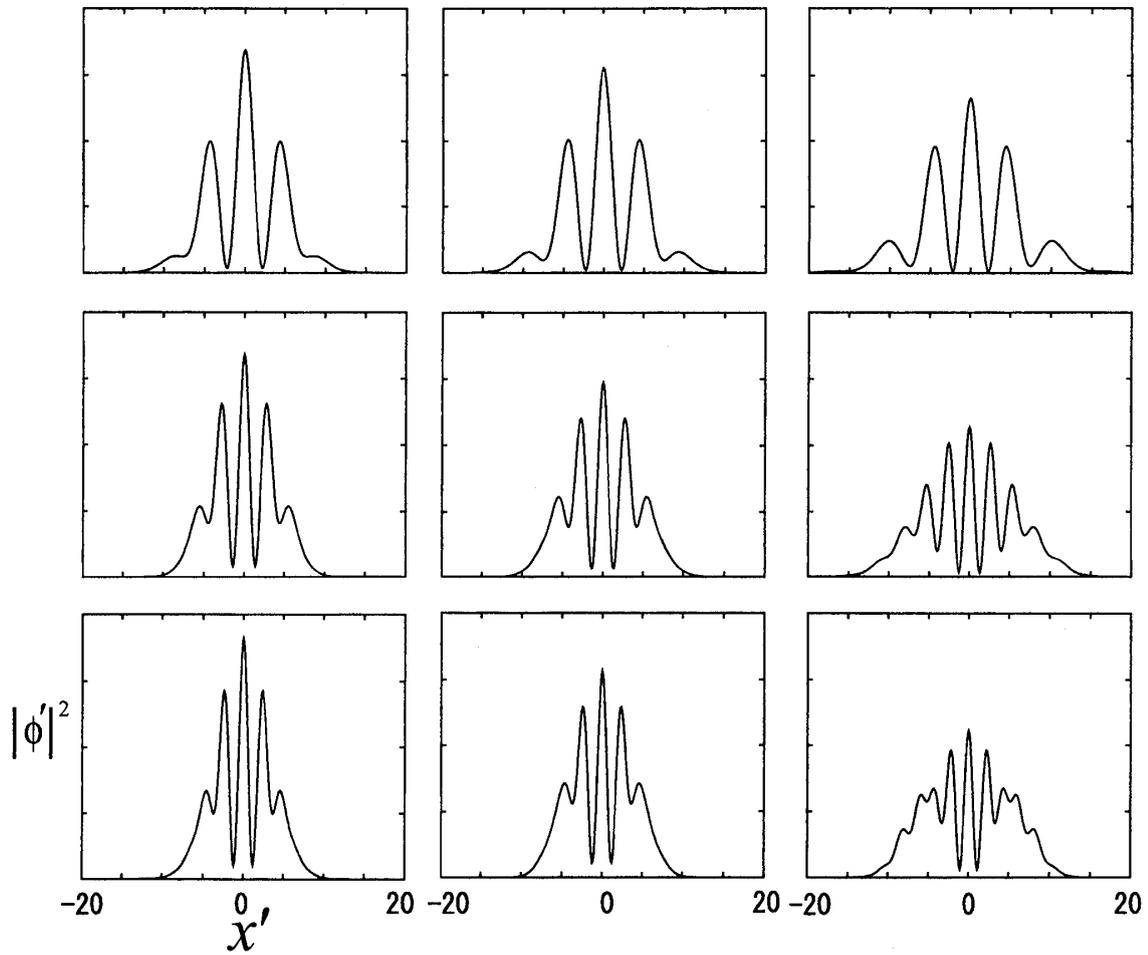


図 12: スクリーン上での干渉縞パターン。上から下へは重力の違い $g' = 1, 3, 5$ 。左から右へは非線形項の違い $u_0 = -3, 0, 20$ 。

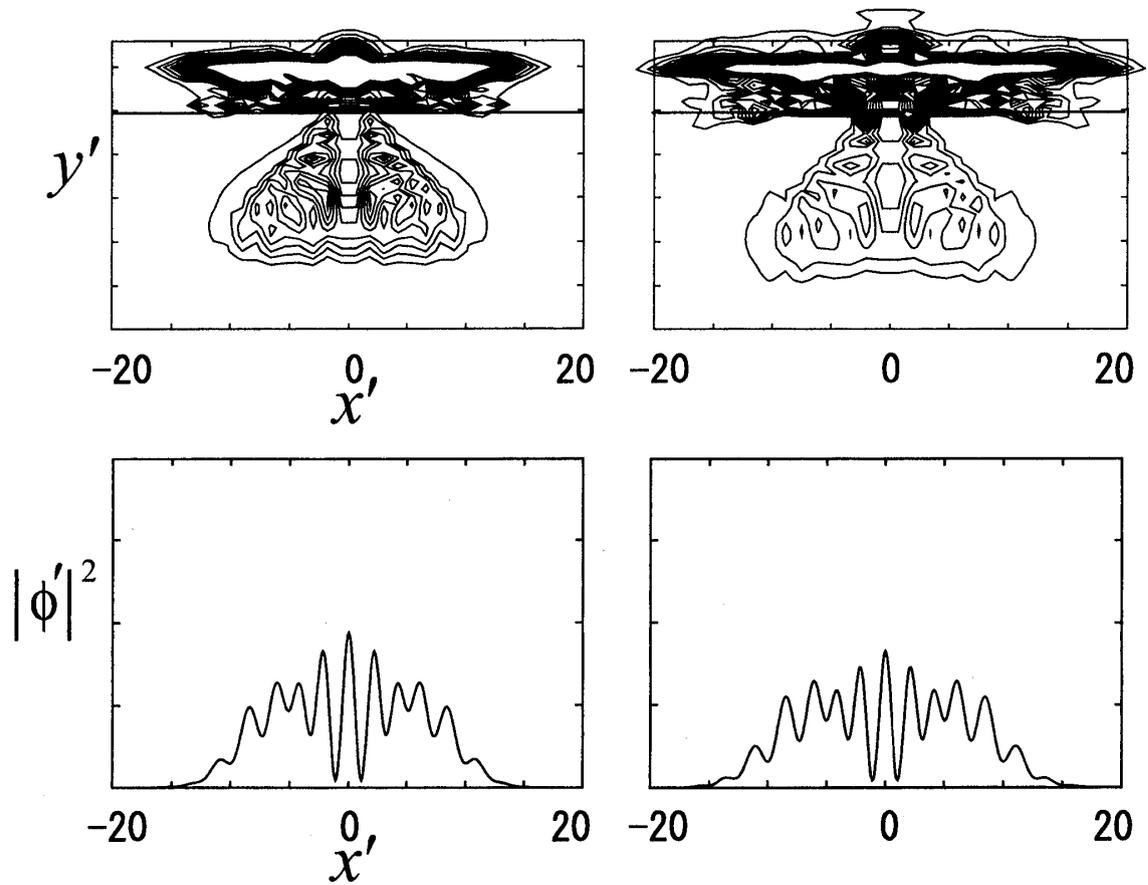


図 13: 等高線図とスクリーン上での干渉縞パターン。重力 $g' = 5$ の場合。左は $u_0 = 50$ であり、右は $u_0 = 100$ 。

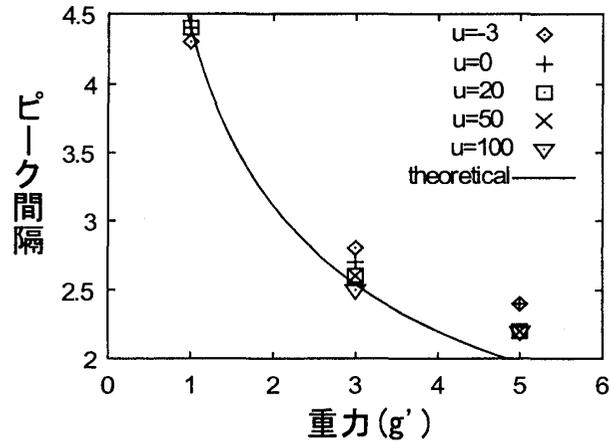


図 14: 中央とその隣のピーク間隔の図

これが干渉縞に対する重力の影響である。重力は波束の速度に影響を与える。重力制御下ではこの速度変化 (*deBroglie* 波長の変化) に対応した違いのある干渉が見られると考えられる。

干渉縞ピーク間隔は *deBroglie* 波長に比例する。具体的には最終時刻で *deBroglie* 波長が $\lambda' \equiv \frac{2\pi}{p'}$ であり、運動量 p' として波束の中心の「古典運動」の運動量を採用すると、 $p' = V_{max} = g'T_{max} = g'\sqrt{\frac{2L_{sc}}{g'}} = \sqrt{2g'L_{sc}}$ となる。よって $\lambda' = \frac{2\pi}{\sqrt{2g'L_{sc}}}$ となる。 g' が増大すれば λ' が小さくなる。図 14 より、 $\lambda' \propto \frac{1}{\sqrt{g'}}$ の関係が成立していることが読み取れる。

次に非線形性について着目する。非線形性は波束の広がりに関係している。つまり干渉の影響を受ける範囲の拡大を意味している。図 12 を見てもそれを理解することが出来る。また、ピーク数に着目すると $g' = 1$ ではピーク数の変化が見られない。これはピーク間隔が大きく、非線形性による波の広がりが起きても次のピークまで波が到達しないためであると考えられる。逆に $g' = 3, 5$ ではピーク数に変化が見られる。これは $g' = 1$ の場合と異なり、非線形性による波の広がりの影響で次のピークに波が到達するためピーク数が増加していると考えられる。

まとめると重力の増加は干渉縞ピーク間隔を狭める効果があり、非線形性の増大は波束の広がりを強める効果があることが明らかになった。これらの影響により、干渉縞が影響を受け、干渉縞ピーク数の増加 (図 15) などの現象を見ることが出来た。表 1 はピーク数の重力 (g') と非線形性 (u'_0) への依存性を示したものである。

5.2.3 ピーク数の推測

この subsection ではピーク数の推測を行う。波の広がりとピーク間隔が非線形性と重力にどのように依存しているかを明らかにすることにより、ピーク数の推測を行う。

最初に波の広がりに対する推測を行う。ここでは波の広がり方だけに注目するので 2 次元波束を平面状円柱で近似 ($\phi = AR^{-1}$) する。GPE (閉じ込めポテンシャル、重力項は除

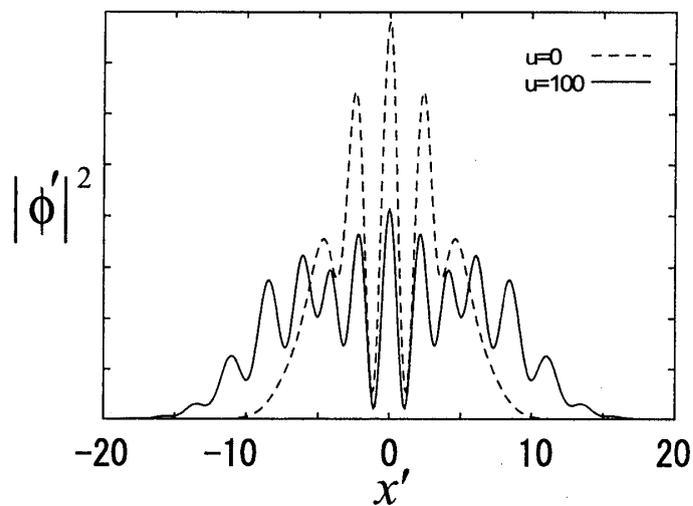


図 15: 重力 $g' = 5$ に対する非線形項 $u_0' = 0, 100$ のピーク数比較

		u_0'				
		-3	0	20	50	100
g'	1	5	5	5	/	/
	3	5	5	9	9	11
	5	5	5	9	11	13

表 1: ピーク数の変化

く)は次式。

$$i\dot{\phi} = \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + u_0 |\phi|^2 \right) \phi \quad (22)$$

この式に ϕ を代入する。

$$i(-R^{-2}\dot{R}) = -R^{-3} + A^2 u_0 R^{-3} = A^2 \left(u_0 - \frac{1}{A^2} \right) R^{-3} \quad (23)$$

$$\dot{R} = iA^2 \left(u_0 - \frac{1}{A^2} \right) R^{-1} \quad (24)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} R^2 \right) = iA^2 \left(u_0 - \frac{1}{A^2} \right) \quad (25)$$

t が大きな場合、波の広がりには次の関係になる。

$$R \approx \sqrt{u_0 - \frac{1}{A^2}} \sqrt{t} \quad (26)$$

ピーク数の考察は最終時刻 ($T_{max} = \sqrt{\frac{2L_{sc}}{g'}}$) で行うので、 $t = T_{max}$ として計算すると波の広がりには次のように推測される。

$$R_{sc} \propto \sqrt{\frac{u_0 - \frac{1}{A^2}}{\sqrt{g'}}} \quad (27)$$

次にピーク間隔の推測を行う。ピーク間隔には *deBroglie* 波長 λ' が大きく関係している。5.2.2で示した結果から、 $\lambda' \propto \frac{1}{\sqrt{g'}}$ の関係がわかっている。ピーク間隔 x'_{peak} は波長に比例しているので、 $x'_{peak} \propto \frac{1}{\sqrt{g'}}$ となる。

ピーク数 = $\frac{\text{波の広がり}}{\text{ピーク間隔}}$ より、ピーク数が推測できるので上で得た R_{sc} と x'_{peak} を用いると次式の関係を得る。

$$\text{ピーク数} = \frac{R_{sc}}{x'_{peak}} \propto \sqrt{\left(u_0 - \frac{1}{A^2} \right) \sqrt{g'}} \quad (28)$$

非線形性と重力が増大することでピーク数の増大が起こることがこの関係より推測される。本研究では、この推測に沿った結果 (表 1) を得ることが出来た。

5.2.4 最終時刻での透過確率の比較

最終時刻での透過確率について述べる。表 2 に結果を示した。各 u'_0, g' に対しばらつきが見られる。これは閉じ込めポテンシャルを切った直後から非線形性が効き始め、2重スリット到達時にその影響が無視できないからだと思われる。具体的に言えば、非線形性 u'_0 が大きい場合、広がりが強められる。重力 g' が大きい場合、2重スリットまでの到達時間が短くなる。従って、 $u'_0 = -3, 0$ に対しては重力が大きいと波束が広がらないまま (中央付近に大きな密度を持ったまま) 2重スリットに到達してしまうため透過確率が重力の増大とともに減少してしまう。 u'_0 に対しては $g' = 1$ では2重スリットに到達するまでの時間がかかりすぎるため波束が広がりすぎて透過確率が低くなってしまう。 $g' = 3, 5$ では

波束がちょうど良い大きさになる時に2重スリットに到達するため透過確率が大きくなっている。

透過確率は干渉に大きな違いはもたらさないと考えているが、透過確率に対するさらなる議論の必要もあるだろう。これは今後の課題としたい。

		u'_0				
		-3	0	20	50	100
g'	1	26.0%	27.8%	19.5%	/	/
	3	14.5%	21.6%	24.3%	19.3%	14.9%
	5	10.2%	17.0%	25.4%	21.7%	17.0%

表 2: 最終時刻での透過確率 $Pr(B)$

5.3 実際のサイズと重力変化に対する考察

これまではスケールされた時間と長さについて考察を行ってきた。この subsection では本研究のモデルが実際にはどの程度の大きさに対応するのかを示す。また、重力変化（微小重力）における長さのスケール変化についても述べる。

まず物質固有の質量で決定される次の値を定義する。

$$\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{m}} \tag{29}$$

本研究では g' の値により、 ω が決定される。 $l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ 、 $g' = \frac{g}{l\omega^2}$ より

$$\omega = \left(\frac{g}{g'}\sqrt{\frac{m}{\hbar}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{g}{g'}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{30}$$

この ω を用いて l を表す。

$$l = \alpha^{\frac{4}{3}}\left(\frac{g}{g'}\right)^{-\frac{1}{3}} \tag{31}$$

これが閉じ込めポテンシャルの大きさを表し、ほぼ初期波束のサイズと言って良い。具体的な数値での例を示す。物質を ^{87}Rb とし、 $g' = 1$ とする。地上での重力加速度は $g =$

9.80665[m/s]である。この場合 $\alpha = 2.726 \times 10^{-5}$ となることから式(31)より $l = 0.383[\mu\text{m}]$ となる。

重力制御下で微小重力 ($\hat{g} = \frac{g}{1000}$) の場合、新しい長さのスケール \hat{l} は式(31)より次の関係を得る。

$$\frac{\hat{l}}{l} = \left(\frac{\hat{g}}{g}\right)^{-\frac{1}{3}} = 10 \quad (32)$$

これは重力のスケール変化に対し、長さのスケール変化は3桁小さいことがわかる。つまり重力変化に長さのスケールは鈍感であり、実際に微小重力で実験が行われる場合でも極端なサイズの変更をする必要が無いことを意味している。具体的な数値で示すと上と同じように ^{87}Rb の場合で $g' = 1$ 、 $\hat{g} = \frac{9.80665}{1000}$ ならば $\hat{l} = 3.83[\mu\text{m}]$ となる。

6 まとめと今後の課題

本研究では巨視的波束の干渉縞に対する非線形性と重力の影響を明らかにした。結論としては重力の増加は BEC の *deBroglie* 波長を短くし、干渉縞ピークの間隔を狭めるといふ影響を与え、非線形性の増大は波束の広がりをも強める影響を与えることがわかった。それに伴い、干渉縞ピーク数の増加という現象を見ることが出来た。重力制御については、近年の宇宙開発計画で提案されている宇宙空間（宇宙ステーション、人工衛星）での実験において可能であり、非線形性の制御については、Feshbach 共鳴の技術や BEC に関与する原子数の調節で可能となる。

課題としては波束の2重スリットを透過する確率が非線形性に依存し、うまく一定値にならなかったことが挙げられる。これは閉じ込めポテンシャルを切った瞬間から非線形性が効き始めるため一定とならなかった。これも一種の非線形性の効果だが、さらに議論する必要があると思われる。Young の干渉実験に対応する考察を行なう場合は、2次元の2重井戸ポテンシャルによって2つの BEC を準備して落下のシミュレーションを行なうことになる。しかし、この場合、干渉縞の形成は自明である。これに対し、一電子干渉の2重スリット通過の具体的な挙動は自明ではない。2重スリットにより分裂した波束が干渉すること無く、拡散する可能性もある。しかし、今回、数値シミュレーションでは分裂した波束が再結合し、美しい干渉縞を形成することを具体的に示すことができた。

本稿の非線形シュレーディンガー方程式は、ノルムを保存し、ガリレイ変換および同種粒子間の座標入れ替えに対して不変な形式を持っている。そこで、この非線形シュレーディンガー方程式を巨視的ではなく微視的量子論の基礎方程式とみなすと、どのようなことになるのだろうか。その場合は、非線形項は多体効果によるものではなく、例え一個の自由電子の場合でもあらわれ、電子のサイズを決定する本質的な項となる。非線形シュレーディンガー方程式を、ヘノン-ハイレス系やキックを受ける回転子など古典論でカオスを生成する系に適用し、長時間ダイナミクスを考察すると、古典カオスの性質が回復するのではないだろうか。これは、最も根源的で歴史貫通的な基礎的テーマといえよう。

7 謝辞

本研究のテーマの紹介をして頂き、さらに研究方針などのご指導をしてくださいました大阪市立大学工学研究科数理工学研究室の中村勝弘教授に厚くお礼申し上げます。同研究室の寺井章助教授、加藤岳生講師には貴重なアドバイスを幾度となく頂き大変参考になりました。同講座の先輩 Agung Budiyo 氏、谷本健一氏には日頃より助言を頂くことも多く大変お世話になりました。私が修士課程在籍中に頂きました多くの方々からの御厚情に深く感謝申し上げます。

8 参考文献

BEC 一般と 2 重スリットについて

- 1) パリティ編集委員会 (勝本信吾 責任編集): レーザー冷却がひらく原子波の世界 (丸善株式会社 2003 年)
- 2) 斎藤弘樹、上田正仁: 引力相互作用するボースアインシュタイン凝縮体の動的振舞い (日本物理学会誌 2003 年 8 月号)
- 3) Physics World 2002 年 9 月号
- 4) Eddy M. E. Timmermans : Atom-Trap BECS (Los Alamos Science Number 27 2002)
- 5) M.R.Andrews, C.G.Townsend, H.J.Miesner, D.S.Durfee, D.M.Kurn, and W.Ketterle, Science **275**, 637(1997)
- 6) C.C.Bradley, C.A.Sackett, J.J.Tollett, and R.G.Hulet, Phys. Rev. Lett **75**, 1687(1995)
- 7) K.B.Davis, M.-O.Mewes, M.R.Andrews, N.J.van Druten, D.S.Durfee, D.M.Kurn, and W.Ketterle, Phys. Rev. Lett **75**, 3969(1995)
- 8) M.R.Andrews, D.M.Kurn, H.-J.Miesner, D.S.Durfee, C.G.Townsend, S.Inouye, and W.Ketterle, Phys. Rev. Lett **79**, 553(1997); **80**, 2967(1998)

無次元化、初期波束、重力、ソリトンなど

- 9) Gordon Baym and C.J.Pethick, Phys. Rev. Lett **76**, 6(1996)
- 10) M.Holland and J.Cooper, Phys. Rev. A **53**, R1954(1996)
- 11) L.D.Carr and Y.Castin, Phys. Rev. A **66**, 063602(2002)
- 12) M.M.Cerimele, M.L.Chiofalo, F.Pistella, S.Succi, and M.P.Tosi, Phys. Rev. E **62**, 1382(2000)

- 13) Víctor M.Pérez-García, J.I.Cirac, M.Lewenstein, and P.Zoller, Phys. Rev. Lett **77**, 27(1996)
- 14) Víctor M.Pérez-García, Humberto Michinel, J.I.Cirac, M.Lewenstein, and P.Zoller, Phys. Rev. A **56**, 1424(1997)
- 15) Juan J. García-Ripoll, Víctor M.Pérez-García, and Vadym Vekslerchik, Phys. Rev. E **64**, 056602(2001)
- 16) Víctor M.Pérez-García and Vadym Vekslerchik, arXiv:nlin.PS/0209036 v1(2002)
- 17) Gaspar D.Montesinos, Víctor M.Pérez-García, and Pedro Torres, arXiv:nlin.PS/0305030 v1(2003)
- 18) A.D.Jackson, G.M.Kavoulakis, and C.J.Pethick, Phys. Rev. A **58**, 2417(1998)

1次元干渉

- 19) William Hoston and L.You, Phys. Rev. A **53**, 4254(1996)
- 20) Wu-Ming Liu, Baio Wu and qian Niu, Phys. Rev. Lett **84**, 11(2000)
- 21) L.Pitaevskii and S.Stringari, Phys. Rev. Lett **83**, 21(1999)
- 22) A.Röhrl, M.Naraschewski, A.Schenzle and H.Wallis, Phys. Rev. Lett **78**, 22(1997)