

特異連続スペクトルをもつ Friedrichs モデル

早稲田大学理工学部

藤吉正人, 田崎秀一

1 序

一次元準結晶や乱れた系において、特異連続スペクトルがあらわれることが知られており、このような系では、特異連続スペクトルに起因する新しい物理現象が存在することが期待されている。本研究では、特異連続スペクトルが存在することで、不安定量子状態の緩和過程がどのような時間発展を示すのかを、Friedrichs モデルを用いて調べた。

2 Friedrichs モデルと局所 Hölder 指数

Friedrichs モデルは、環境と結合し不安定化した量子状態を記述する最も簡単なモデルの一つで、ハミルトニアンは

$$H = \Omega|1\rangle\langle 1| + \int \omega_\mu |\mu\rangle\langle \mu| d\mu + \lambda \int v(\omega_\mu) \{ |1\rangle\langle \mu| + h.c. \} d\mu \quad (1)$$

で与えられる。ただし、環境との結合は非常に弱いとした。環境系のもつスペクトルが絶対連続スペクトルのとき、不安定状態の生存確率は $\lambda^2 t = \tau$, $\lambda \rightarrow 0$ とスケーリングされた時間領域で、指数関数的に減衰することが知られている。

特異連続スペクトルを以下のようにして導入する。 $\omega = \omega_\mu$ は μ に関して単調増加とし、逆に $\mu = \mu(\omega)$ も単調増加とする。ここで $\mu(\omega)$ を Lebesgue の特異関数 (ω に関して至る所で微分係数が 0) と定めることで、特異連続スペクトルをもつ Friedrichs モデルが構成できる。

ここで、Lebesgue の特異関数を特徴づける量として局所 Hölder 指数 κ

$$|\mu(\omega \pm \delta) - \mu(\omega)| \leq C_\pm \delta^{\kappa_\pm} \quad (2)$$

を導入する。 κ_\pm はそれぞれ、右・左極限での局所 Hölder 指数である。

3 数値・理論計算

Lebesgue の特異関数を関数方程式

$$\mu_\alpha(\omega) = \begin{cases} \alpha \mu_\alpha(2\omega) & \omega \in [0, \frac{1}{2}] \\ (1 - \alpha) \mu_\alpha(2\omega - 1) + \alpha & \omega \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (3)$$

で与え、生存確率の時間発展を数値的に計算した。 α は関数の形を決めるパラメータである。時間発展は、指数緩和とは異なる結果を示しており、スケーリング則 ($\lambda^\eta t = \tau$) を満たしていることが分かった。

また、スケーリング則の成立と局所 Hölder 指数を用いた近似により、生存確率を理論的な計算を行った。このとき、スケーリング指数 η は積分方程式が $\lambda \rightarrow 0$ で極限を持つように定めた。理論から導出される生存確率 $P(\tau)$ は

$$P(\tau) = E_{2-\kappa} \left(\frac{-\pi C \kappa}{\sin \pi \kappa} e^{-i \frac{\pi \kappa}{2}} \right), \quad E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} \quad (4)$$

と表される。 $E_\alpha(z)$ は Mittag-Leffler 関数と呼ばれる。ただし、このときの κ は 1 未満である。

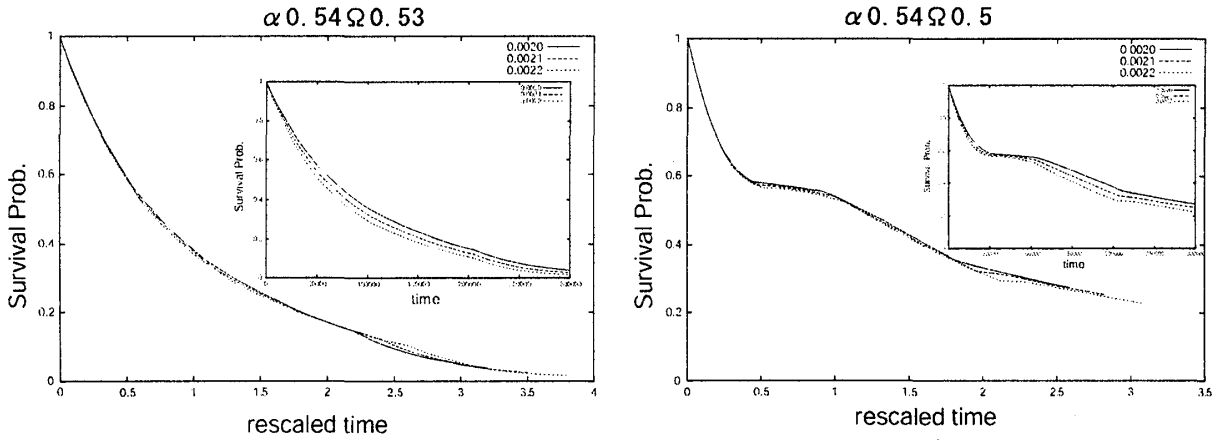


図 1: 生存確率の時間発展 (中の図はスケールを揃える前の図)

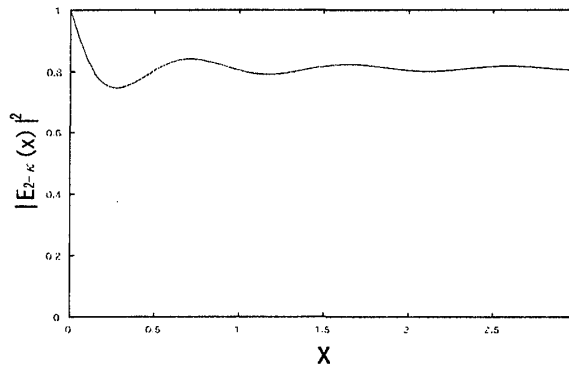


図 2: Mittag-Leffler 関数型の緩和過程

4 考察

数値による生存確率の計算結果と、理論による予想とを比較する。初期状態のエネルギーが $\omega = \Omega$ で 1 よりも小さい Hölder 指数を持つとき、指数緩和とはことなる過程が現れることが数値計算からも確かめられた。このときの数値計算のグラフは、折り返しのような特徴が見られるが、理論予想においても折り返しは現れている。また、指数 α を変化させたときの η の振る舞いも理論からの予想と同じ傾向を示していた。しかし相違点も見られる。数値計算では、初期状態のエネルギーをどのようにとっても、最終的に 0 へと減衰しているが、理論予想では一定値へと飽和するか全く減衰しないことが予想されており、これらの不一致点は今後の課題となっている。

謝辞

本研究は文部科学省による 21 世紀 COE プログラムからの援助を受けています。