

## 量子カオス系の有効場理論とアンサンブル平均

— Possible to eliminate the ensemble averaging or not? —

筑波大学物理学系 谷口 伸彦<sup>1</sup>

### はじめに

乱れた電子系や不規則境界ビリヤード系などの閉じた量子カオス系でエネルギー準位統計を調べると、ダイナミクスの詳細によらず、十分カオス的な領域では、一般的 (generic) に Wigner-Dyson 相関が普遍的挙動としてあらわれる。この Bohigas-Giannoni-Schmit (BGS) conjecture[1] は多くの量子カオス系において数値的に実証されてきた。しかし、量子カオス系の根幹にかかわる問題でありながら、どのような条件を満たした時に厳格に BGS conjecture を正当化できるかという点は依然未解決である。少し考えれば明らかのように、BGS conjecture は実に強い主張であると同時に、とらえどころのない主張にも聞こえる。世の中にある系はほとんど「一般的には」全てのモデルが非可積分系といえるため、ナイーブにはほとんど全ての系で Wigner-Dyson 的挙動が期待されることを意味しかねない。

本研究の目的は、BGS conjecture が真に意味するところを、有効場理論の立場から考え、「量子カオス系」をどのように特徴づけるべきかを調べることにある。

**有効場理論とアンサンブル平均** 乱れた電子系を考察するには、 $\delta$  関数型 (短距離型) の乱数ポテンシャルでモデル化し、物理量の急冷平均を定義する「急冷 (アンサンブル) 平均理論」を使うことが標準的である。このような系に対し、相関関数の急冷平均を記述する低エネルギー理論を作ると、拡散型超行列非線形  $\sigma$  模型と呼ばれる有効場理論を得ることができる [2]。特に、BGS conjecture に関しては、この枠組のもとで 0 次元近似として、

$$F_{0D}[Q] = \frac{\pi}{4\Delta} \text{STr} [-i\omega^+ \Lambda_3 Q]; \quad Q^2 = I \quad (1)$$

が得られ、これより得られる相関関数は Wigner-Dyson 相関に一致することが示される。つまり乱数ポテンシャルをもつ乱れた電子系では BGS conjecture を証明する事ができる。逆にいえば、拡散系に限らず広く一般的な「量子カオス系」に対し、 $F_{0D}$  が妥当であることを示すことができれば、BGS conjecture の証明したことになる。

<sup>1</sup> E-mail: taniguch@cm.ph.tsukuba.ac.jp

上述した有効場理論の導出は、急冷 (=アンサンブル) 平均という処方箋と密接に結び付いている。そのため、バリステック系を含むより一般的な系に対し  $F_{0D}$  の正当性を主張するため、種々のアンサンブル平均が提案されてきた [3]。

- アンサンブル平均 + 乱れ  $\rightarrow 0$  の形式的極限 [4]
- スペクトル平均 [5]
- 一連のユニタリ等価なハミルトニアン族についてのパラメータ平均 [6])

拡散系のように自己平均性が期待できれば、アンサンブル平均理論を系の intrinsic な性質と読み替えることも可能であろうが、バリステック系では不適切である。本来、アンサンブル平均はデータ解析であり、系の intrinsic な性質と分離すべきであるし、有効場理論の導出の際にも両者を区別すべきである。

このような観点から、筆者は、可能な限りアンサンブル平均や付加的な粗視化の手続きを排除して量子カオス系の有効場理論を構築する試みを行って来た [7]。これらの結果とともに、現在直面している困難がどのように解決されるかの筆者なりの考えを含め報告する。基本となる考え方は、アンサンブル平均の操作は、粗視化されたダイナミクスを得るための便法であり、有用ではあるがその操作は副次的な役割にすぎないというものである。

最近、Efetov らにより、ボゾン化法と半古典近似を用いてバリステック系の有効場理論を定式化する方法が提案された [8]。計算の詳細は異なるが、基本的な考え方として本研究と共通点も多く、興味深い<sup>2</sup>。

## Exact Green 関数による有効場理論

**有効場理論の不変性: Generic SUSY** 有効場理論を構築するため、(平均化していない) 系に特有の相関関数  $G_{\omega/2}^R G_{-\omega/2}^A$  を書き換える。通常の場合の理論と異なり、場の演算子はエネルギー殻で定義された等エネルギー殻に射影した理論を考えているため、正しい規格化因子を再現するためには、超対称的取り扱いが必要となる。

$$G_{\omega/2}^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G_{-\omega/2}^A(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = \int D[\bar{\Psi}, \Psi] b_R(\mathbf{r}_1) b_R^\dagger(\mathbf{r}_2) b_A(\mathbf{r}_3) b_A^\dagger(\mathbf{r}_4) e^{iS}$$

$$S_\omega = \int d\mathbf{r} \bar{\Psi}(\mathbf{r}) \left( \frac{\omega^+}{2} \Lambda_3 - H \otimes I \right) \Psi(\mathbf{r}); \quad \begin{aligned} \Psi &= (b_R, f_R, b_A^*, f_A^*)^T \\ \bar{\Psi} &= (b_R^*, f_R^*, -b_A, f_A) \end{aligned}$$

$S_\omega$  は超対称空間および RA 空間に関するグローバルなカノニカル変換  $T: \Psi \mapsto \Psi' = T\Psi$  に対し不変である。閉じた有限系では対称性の破れは起きず、このような零モードの積分は非摂動的効果を与えることが知られている。  $\Phi$  から陽にこの零モードの自由度を抜き出せば次のようにかける。

$$S_\omega = \int d\mathbf{r} \bar{\Psi} \left( \frac{\omega^+}{2} T \Lambda_3 T^{-1} - H \otimes I \right) \Psi.$$

<sup>2</sup> ただし、論文中に mode-locking の問題を解決できたとの記述があるが、筆者はこの主張には懐疑的である。

ダイナミクスを含めた有効場理論を導出するためには、カノニカル変換  $T$  の空間依存性を考慮する。その結果を系に特有の exact な Green 関数

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G^R & 0 \\ 0 & G^A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varepsilon - H + i\eta)^{-1} & 0 \\ 0 & (\varepsilon - H - i\eta)^{-1} \end{pmatrix}$$

を用いて展開することにより、少なくとも形式上は粗視化を導入すること無く有効場理論を求めることが可能となる。ダイナミクス  $\delta_T H = T^{-1} H T - H$  に関する展開をしていくと、

$$\begin{aligned} S_\omega &= \text{Tr} \bar{\Psi} \left( \frac{\omega^+}{2} T \Lambda_3 T^{-1} - H \otimes I \right) \Psi = -\text{Tr} \text{STr} \ln \left[ 1 + \left( \frac{\omega^+}{2} T^{-1} \Lambda_3 T - \delta_T H \right) \hat{G} \right] \\ &= S^{(0)} + S^{(1)} + S^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

ここで初項  $S^{(0)} = F_{0D}$  となり、Wigner-Dyson 相関項に当たる。

$$S^{(0)}[T] = -\frac{\omega}{2} \text{STr} \left( T \Lambda_3 T^{-1} \text{tr}[G] \right) \approx \frac{i\pi\omega}{2\Delta} \text{STr}[T \Lambda_3 T^{-1} \Lambda_3] = F_{0D}[Q]$$

ただし、“秩序パラメータ”として有限の DOS が必要となる。何の平均操作をしていない DOS は  $\delta$  関数の列にすぎず、pathological である。逆にいえば、有限な DOS を与えるような何らかの粗視化を伴う観測を行うことが必要であるという、物理的には至極もつともな要請が得られる。 $S^{(0)}$  が Wigner-Dyson 相関項に当たっていることから、仮に系のダイナミクスに依存する高次の項の影響を有限のエネルギー領域で無視することができれば、極めて「一般的に」Wigner-Dyson 相関が現れることが理解できることになる。

**高次項の寄与** 前述の truncation を正当化するためには、系特有のダイナミクスから生じる高次項を調べる必要があるが、粗視化を全く導入せずに、これらの寄与を評価することはほぼ不可能であるように思われる。以下では、粗視化として半古典近似を使う。この場合  $S^{(k \neq 0)}$  の高次の項は  $\hbar$  の高次の項に対応する。

$$S^{(1)} = \text{STr}[\hat{G} \delta_T H]; \quad S^{(2)} = -\frac{1}{2} \text{STr}[\hat{G} \delta_T H \hat{G} \delta_T H]$$

半古典近似の結果として、 $S^{(1)}$  は、バリステック非線形シグマ模型、 $S^{(2)}$  は、非局所的拡散係数をもつ非線形シグマ模型に等しくなる。

$$\begin{aligned} S^{(1)} &\approx \pi \hbar \text{STr}[\rho(H) \Lambda_3 (T^{-1} \{H, T\}_{PB})]; \quad [A, B] \approx i \hbar \{A, B\}_{PB} \\ S^{(2)} &\approx -\frac{\pi^2 \hbar^2}{2} \text{STr} \left[ \rho(H) (v \Lambda_3 T^{-1} \nabla T) \rho(H) (v \Lambda_3 T^{-1} \nabla T) \right] \end{aligned}$$

従って、これらが示すダイナミクスに有限のギャップ (=Thouless エネルギー) がある場合には、それ以下のエネルギー領域で Wigner-Dyson 相関が見える<sup>3</sup>。

<sup>3</sup> 拡散的非線形  $\sigma$  模型は、 $\rho(H)$  に比べて  $T$  がずっと遅く、 $S^{(2)}$  が局所的になる時に相当する。

## 有効場理論における mode-locking の問題と量子不可逆性

mode-locking の問題とは、導出したバリステック系の有効場理論に Wigner-Dyson 相関を与え物理的な零モードに加えて、非物理的な零モードが存在するという問題である [3]。この問題は、バリステック系に対する有効場理論の妥当性とアンサンブル平均の必要性と深くかかわっていて、現在なお論争中の問題である。バリステック系の有効場理論は、等エネルギー面上で定義された場  $Q$  により記述される。非物理的な零モードはエネルギー方向のものであり、結局、古典位相空間ではエネルギー方向に連続的な等価性があることに起因する。しかし量子論においては、離散的準位の存在が示す通り、エネルギー方向の連続対称性は存在しないはずである。そのため、mode-locking の問題は、系の量子性 (エネルギー準位の離散性) を正しく考慮していないことに起因する artifact であろうと、筆者は憶測している。

状況を把握するには、 $s = 1/2$  スピンとの類推が有用である。スピン波理論で課せられる束縛条件  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$  はスピン演算子の量子的性質  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = \frac{3\hbar^2}{4} \rho(2 - \rho)$  (ただし  $\rho = \psi^\dagger \psi$ ) に起因する。微視的にみるとスピン振幅は  $\rho = 1$  の時のみ非零であり、粗視化を導入することにより値が繰り込まれる。超行列非線形  $\sigma$  模型に現れる  $Q$  という場は、スピン演算子 (を随伴表示したもの) なので、 $\rho$  を DOS 演算子と読み替えることにより、 $Q$  に対してもスピン演算子と同様な量子的束縛条件が存在することを示唆する (これは古典論から見れば量子化条件である)。従って、mode-locking の問題とは、 $Q$  が位相空間全体では定義されていない点を考慮すれば解決できるものと考えている。それに関連し、「量子的不可逆性」の現象も、(古典的) 運動方程式が量子的束縛条件を完全には満たしていないことにより現れる、量子現象であると理解することができる。

## 参考文献

- [1] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **52** 1 (1984).
- [2] K. B. Efetov, *Adv. Phys.* **32** 53 (1983).
- [3] A. Altland *et al.* in *Supersymmetry and Trace Formulae*, eds. I. V. Lerner *et al.* NATO ASI Series B **370** (1999, Kluwer Academic); M. R. Zirnbauer, *ibid.*
- [4] B. A. Muzykantskii and D. E. Khmelnitskii, *JETP Lett.* **62** 76 (1995).
- [5] A. V. Andreev, O. Agam, B. D. Simons, and B. L. Altshuler, *Phys. Rev. Lett.* **76** 3947 (1996).
- [6] Martin R. Zirnbauer, *J. Phys. A* **29** 7113 (1996).
- [7] 谷口伸彦, 基研研究会「物性理論と場の理論」(2003年3月)講演“Wigner-Dyson correlation without ensemble averaging”; 物理学会講演(2003年3月).
- [8] K. B. Efetov, G. Schwiete, and K. Takahashi, cond-mat/0307504.