Multidimensional Friedrichs モデルの長時間挙動[1]

早稲田大学 理工学総合研究センター　　宮本 学[2]

α-崩壊を起こす放射性原子核や電磁場と相互作用している原子といった不安定量子系には, 有名な指数崩壊則が知られている. 原子系を例とした場合, 初期時刻に励起状態にある原子は, 電磁場と相互作用することで光を自然放出し, 最終的には基底状態に遷移して行く. このとき, 原子が初期状態 (励起状態) にある確率, すなわち初期状態の生存確率は指数関数的に減衰する. この事実は理論と共に実験 (例えば [1]) でも確かめられている. しかし、実は指数崩壊則が検出される時間領域の前後の短時間および長時間領域では, 崩壊則は指数則からずれる事が理論的に予言されている [2]. 短時間領域でのこのずれは、近年において実験で確認され [3], また量子 Zeno 効果において本質的な役割を果たすことが知られる. 一方, 長時間領域でのずれは、放射性原子核による実験で検証されるも, 未だ確認には至っていない [4]. その原因は, 長時間領域での生存確率の強度が非常に小さいこと, ずれの開始時刻が遅すぎること等が挙げられる. だが, 長時間領域でのずれは, 対象系の全ハミルトニアンのスペクトルが連続で下に有界であれば必ず導かれる結論であり [5], この点からも理論と実験の双方からの更なる調査が必要とされている.

電磁場と相互作用している原子系といった, 不安定量子系を記述するモデルの一つとして Friedrichs のモデルがある [6]. このモデルを用いた従来の解析では, 原子は励起準位を一つしかもたない 2 準位系 (光電離や光脱離を記述する場合は離散準位は基底準位のみ) であることがしばしば仮定される (例えば [7]). 一方, 原子をより一般的な多準位系として扱った場合, 生存確率の振る舞いの理解は各時間領域を問わず自明な問題ではない. 本研究では, 原子を多準位系として扱いつつ, 生存確率の長時間挙動の考察を試みた. また, 多準位を扱う枠組みでは, 初期状態として特定の励起準位に局在したものに限らず, 複数の励起準位にまたがった状態を選ぶことができる. そこで, 我々は長時間領域において生存確率の強度を最大にする初期状態が存在するかどうかも検証した. この考察は, 長時間でのずれの実験的検出を目指す上で重要と考えられる. 我々は以下のハミルトニアン

$$H = \sum_{n=1}^{N} E_{0,n}|n\rangle\langle n| + \int_0^\infty d\omega\ \omega|\omega\rangle\langle\omega| + \sum_{n=1}^{N}\int_0^\infty d\omega\ \ [v_n(\omega)|\omega\rangle\langle n| + v_n^*(\omega)|n\rangle\langle\omega|] \tag{1}$$

で記述される multidimensional Friedrichs モデル [6] を用いた (これらを総称して Friedrichs モデルと呼ぶ場合もある). ここで, $|n\rangle$ は原子が第 n 励起準位にあり電磁場が真空である状態を, $|\omega\rangle$ は原子が基底準位にあり電磁場が 1 光子状態にある状態を表す. $v_n(\omega)$ は第 n 励起準位から基底準位への遷移確率を決める形状因子であり, また N は原子の励起準位の数である. 2 準位系 ($N=1$) の

[1] この原稿は、京都大学基礎物理学研究所短期研究会「量子力学とカオス：基礎的問題からナノサイエンスまで」(2003 年 11 月) におけるポスター発表での公演内容である.

[2] E-mail: miyamo@hep.phys.waseda.ac.jp

場合と異なり，一般の N に対して生存確率を解析的に求めることは困難である．しかし，我々は，$v_n(\omega)$ が n に依らず一定である特別な場合には，それが可能であることを見出した．初期状態を不安定状態の重ね合わせ $|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{N} c_n|n\rangle$ とするとき，生存振幅の長時間での漸近形は最終的に，

$$\langle\psi|e^{-itH}|\psi\rangle \sim \frac{C(p,d)}{t^{d+1-p}} \frac{\lambda^2\Lambda^{1-d+p}\left|\sum_{n=1}^{N} c_n \prod_{m(\neq n)}^{N} E_{0,m}\right|^2}{\left|\prod_{n=1}^{N} E_{0,n} + s^{(+)}(0)\sum_{n=1}^{N}\prod_{m(\neq n)}^{N} E_{0,m}\right|^2} \qquad (2)$$

と求まる．ここで $C(p,d)$ は p と d にのみ依存する定数，$s^{(+)}(0)$ は自己エネルギーのゼロ点での値である．また，$v_n(\omega)^2 = \lambda^2\Lambda(\omega/\Lambda)^{d-p}/[1+(\omega/\Lambda)^b]^c$ である．特に $(p,b,c,d) = (1/2,1,1,1)$ は光脱離を，$(0,2,4,1)$ は水素原子の自然放出過程に対応する [8]．上式右辺より，長時間において生存振幅は漸近的に t の逆ベキで減衰し，そのベキ指数は形状因子 $v_n(\omega)$ のゼロ点での振る舞いで完全に決まっていることが分かる．これは 2 準位系での結果と全く同じである [7]．しかし，従来の結果と異なり長時間においても初期状態依存性 ($\{c_n\}_{n=1}^{N}$ 依存性) が残る．この依存性は，エネルギー準位分布 $\{E_{0,n}\}_{n=1}^{N}$ への依存性と共に，t の逆ベキ因子の係数にのみ現れている．さらに解析を進めると，係数を最大にする特別な初期状態が存在することを示せる．また，逆にこの係数をゼロにしてしまう特別な初期状態も存在する．この場合，漸近展開式 (2) の次の項が支配的となり，式 (2) とは異なるベキ減衰形が現れる．この意味でベキ減衰形自身も初期状態に依存しているのである [9]．

有益な助言を下さった大場一郎先生 (早稲田大学) ならびに中里弘道先生 (早稲田大学) に感謝します．また研究会会場において議論をして下さった皆様に感謝します．

参考文献

[1] E. L. Chupp, L. W. Dotchin, and D. J. Pegg, Phys. Rev. **175** (1968), 44.

[2] H. Nakazato, M. Namiki, and S. Pascazio, Int. J. Mod. Phys. B **10** (1996), 247.

[3] S. R. Wilkinson *et al.*, Nature (London) **387** (1997), 575.

[4] P. T. Greenland, Nature (London) **335** (1988), 298.

[5] L. A. Khalfin, Zh. Eksp. Theor. Fiz. **33** (1957), 1371 [Sov. Phys. JETP **6** (1958), 1053].

[6] P. Exner, "Open Quantum Systems and Feynman Integrals" (D. Reidel, Dordhrecht, 1985).

[7] K. Rzążewski, M. Lewenstein, and J. H. Eberly, J. Phys. B **15** (1982), L661.
S. L. Haan and J. Cooper, J. Phys. B **17** (1984), 3481.
H. Nakazato, in "Fundamental Aspects of Quantum Physics", editted by L. Accardi and S. Tasaki (World Scientific, New Jersey, 2003).

[8] I. Antoniou *et al.*, Phys. Rev. A **63** (2001), 062110.

[9] この依存性は自由波束の時間発展にも見られる．例えば，次の文献とその参考文献を見よ:
M. Miyamoto, Phys. Rev. A **68**, (2003), 022702.