Title	Nodal domains of an irregular oscillator
Author(s)	相場, 浩和; 鈴木, 徹
Citation	物性研究 (2004), 82(5): 694-695
Issue Date	2004-08-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/97876
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Nodal domains of an irregular oscillator

京都光華女子短大　相場　浩和，　都立大理　鈴木　徹

近年、波動関数の結節領域（nodal domain）の統計的性質が、系がカオスかどうかを測る指標になりうるのではないかということで注目を集めている [1]。特に文献 [1] では、カオス系の波動関数の結節構造は臨界点のパーコレーション模型によってシミュレートできるということが指摘された。しかし、これらの研究はビリヤード模型のみに基づいている。また、系が可積分からカオスに変化するにつれて結節領域の統計的性質がどのように変化するかも明らかではない。

そこで、次の4次振動子模型を取り上げこの問題を調べた。

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^4 + y^4) - kx^2y^2 \tag{1}$$

この模型は $k = 0.0$ のとき可積分であり、$k = 0.6$ のときほぼカオスとなる。

具体的に取り上げた統計は、レベル番号 i の波動関数の結節領域の数 $N_i^{\mathrm{n.d.}}$ と、結節領域の“面積”s の分布 $n(s)$ である。

$N_i^{\mathrm{n.d.}}$ は、可積分に近いとき、直線 $f(i) = (3\sqrt{3} - 5)/\pi i$ の上下に広く分布するが、カオスに近づくにつれこの直線上に集中するようになる。ここで、$f(i)$ はパーコレーション模型による直線である [1]。図1に $k = 0.2$ および $k = 0.6$ の場合を示す。

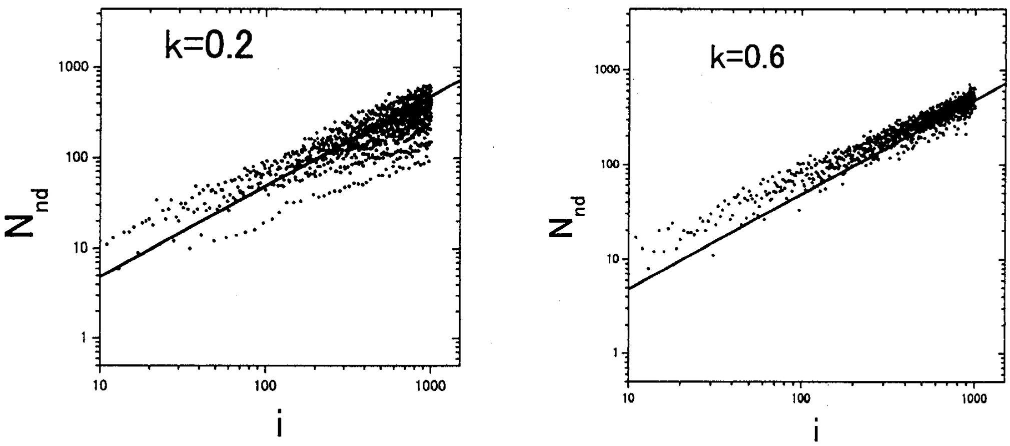

図 1: レベル番号 i の波動関数の結節領域の数 $N_i^{\mathrm{n.d.}}$。直線は $f(i) = (3\sqrt{3} - 5)/\pi i$ を表す。左：$k = 0.2$ 右：$k = 0.6$。

$n(s)$ については、$N_i^{\mathrm{n.d.}}$ が $f(i)$ より上になるレベルのみを考慮すると、系が可積分でない限り違いが現れず、すべての場合でフィッシャー指数をともなう冪関数となる。この冪関数は、2次元のパーコレーション模型の臨界点での振る舞いの特徴を表すものである。しかし、もし $f(i)$ より

下になるレベルのみを考慮すると、k の値による違いが明白に現れるようになる。すなわち、k の値が小さいときは冪関数からずれ、k が 0.6 に近づくにつれ冪関数に近づく。

実際に面積を評価するときは、波動関数によって、また場所によって、局所的な波数が変化することを考慮に入れる必要がある。さらにある面積をもった結節領域の数をカウントするときも、レベル番号に比例して結節領域の数が増えることを考慮した正規化が必要である。

図 2 に $k = 0.2$ と $k = 0.6$ の場合の例を示す。

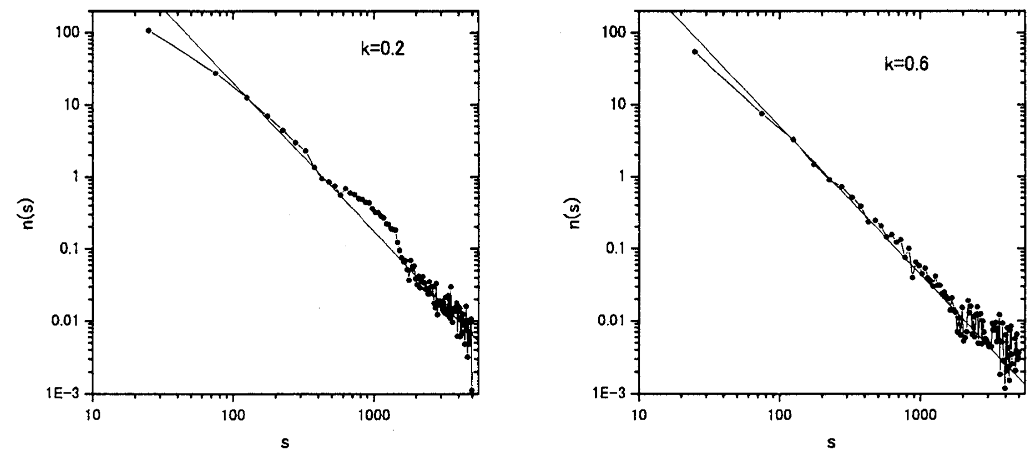

図 2: 結節領域の面積 s の分布 $n(s)$。直線はフィッシャー指数をともなう冪関数 $n(s) \propto s^{-\tau}$ ($\tau = 187/91$) を表す。左：$k = 0.2$ 右：$k = 0.6$。

以上、4 次振動子模型で調べた範囲内では、波動関数の結節領域の統計的性質は、系がカオスかどうかを測る指標となりうることがわかった。また、結節領域の統計的性質は系がカオスになるに従って波動関数がどのように変化していくのかに対して重要な情報を与えるものであることがわかる。

[1] G. Blum, S. Gnutzmann, and U. Smilansky, Phys. Rev. Lett. 88 (2002) #114101
E. Bogomolny and C. Schmit, Phys. Rev. Lett. 88 (2002) #114102