カオス的なマクロ量子系における揺らぎ、相関、エンタングルメント

京都大学 基礎物理学研究所　杉田 歩[1]
東京大学大学院 総合文化研究科　清水 明[2]

カオス的なマクロ量子系のエネルギー固有状態における揺らぎ、相関、エンタングルメントを調べる。典型的な状態は全体として強くエンタングルしているが、この強いエンタングルメントは、少数個の点の間の相関をむしろ消し去る方向に働く。その結果、状態はクラスター性を持ち、外部からの弱い摂動や局所的な観測に対して安定になる。

1 Introduction

いわゆる「量子カオス」の研究は近年盛んになされているが、その多くは少数自由度系のみを扱っており、大きい量子系のカオスについてはよく調べられていない。特に、そのような系のエンタングルメントは興味深い問題であると思われる。

最近、清水と宮寺 [1] によって、マクロなエンタングルメントを持つ状態は外部からのある種の弱い摂動や局所的な観測に対して不安定であることが示された。このことと、「カオス的なダイナミクスはエンタングルメントを生成する」という広く流布している信念を考え合わせると、マクロなカオス状態は一般的に不安定になるようにも思えるが、実はそうではない。

大きな量子系においては、一口にエンタングルメントと言っても様々なタイプのものがあり、単純に強弱を比較するわけにはいかない。実際、カオス状態のエンタングルメントは、measure の取り方によって「非常に強い」とも言えるし、「ほとんどない」と言うことも出来る。以下で詳しく見ていこう。(さらに詳細については、[2] を見てください。)

2 2点相関と Variance-Covariance Matrix

N 個の点からなる系を考え、その系のある純粋状態を $|\Psi\rangle$ とする。点 l における観測量のベースを $\{a_\alpha(l)\}$ とし、$\mathrm{Tr}[a_\alpha(l)^\dagger a_\beta(l)] = \mathrm{const} \times \delta_{\alpha\beta}$ となるように規格化しておく。この時、状態 $|\Psi\rangle$ の2点相関に関する全ての情報は、次の Variance-Covariance Matrix (VCM) で記述される：

$$V_{\alpha l,\beta l'} \equiv \langle\Psi|\delta\hat{a}_\alpha^\dagger(l)\delta\hat{a}_\beta(l')|\Psi\rangle, \tag{1}$$

ここで、$\delta\hat{a}_\alpha(l) \equiv \hat{a}_\alpha(l) - \langle\Psi|\hat{a}_\alpha(l)|\Psi\rangle$。

また、この行列は additive operator [3] の揺らぎに関する情報も含んでいる。この行列の k 番目の固有値を e_k に対応する固有ベクトルを $\{c_{\alpha l}^{(k)}\}$ とし、新しい観測量の基底を $\hat{A}_k \equiv \sum_{\alpha,l} c_{\alpha l}^{(k)}\hat{a}_\alpha(l)$

[1]E-mail:sugita@yukawa.kyoto-u.ac.jp
[2]E-mail: shmz@ASone.c.u-tokyo.ac.jp
[3]加法的 (additive) なオペレーターは、局所量の和の形をとることに注意。

で定義する。(規格化は、$\sum_{\alpha,l} |c_{\alpha l}|^2 = N$ とする。) このとき

$$\langle\Psi|\delta\hat{A}_{k'}^{\dagger}\delta\hat{A}_k|\Psi\rangle = N e_k \delta_{k'k} \tag{2}$$

が成り立ち、揺らぎが対角化されていることがわかる。熱力学では additive operator の揺らぎの大きさは $o(N^2)$ であると仮定するので、最大固有値 $e_{\max}$ は $o(N)$ でなくてはならない。この条件を満たすとき、その状態は NFS(Normally Fluctuating State) であると言う。一方、有限量子系の中には、$e_{\max} = O(N)$ であるような異常な状態も存在する。このような状態を AFS(Anomalously fluctuating state) と呼ぶ。この様な異常に大きい揺らぎは、系全体にわたる相関を表しているので，純粋状態に対しては，マクロなエンタングルメントの存在を示している．AFS は、外部からのある種の弱い摂動に対して不安定である [1]。

以下では、話を具体的にするために、スピン $\frac{1}{2}$ の量子系を考え、全粒子数を N とする。この場合、各点における観測量のベースは，付加的な定数部分を除くと，パウリ行列 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ で表される。

2.1　ランダム行列による評価

まず、量子カオス系の議論でよく行われるように、ハミルトニアンがランダム行列で与えられると仮定して、エネルギー固有状態の VCM を評価してみよう。この場合

$$\overline{\langle\delta\sigma_\alpha(l)\delta\sigma_\beta(l')\rangle} = \frac{2^N}{2^N + 1 + q}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ll'}. \tag{3}$$

(q はアンサンブルが GUE か GOE かによって 0 または 1 の値をとる) となり、VCM は $N \to \infty$ で単位行列に収束することがわかる。また、非対角要素の大きさは

$$\overline{|\langle\delta\sigma_\alpha(l)\delta\sigma_\beta(l')\rangle|^2} \le \overline{|\langle\sigma_\alpha(l)\sigma_\beta(l')\rangle|^2} = \frac{1+q}{2^N + 1 + q}, \tag{4}$$

のように評価でき、指数関数的に 0 に近づくことがわかる。従って 2 点相関はほとんど無く、これらの状態はクラスター性を持つ。(有限系におけるクラスター性の正確な定義は、[1] 参照。) クラスター性を持つ状態は、局所的な観測に対して安定であることが [1] で示されている。

この場合の VCM の最大と最小の固有値を、図 1(左) に示した。最大値、最小値ともに（つまり、全ての固有値が）系のサイズ N が大きくなるにつれて 1 に近づいていくことがわかる。これは、状態が NFS であることを示している。

GUE による固有状態のアンサンブル平均は、実はヒルベルト空間上の単なるランダムサンプリングによる平均と見做すことも出来る。従って、ここで導かれた結果は、ヒルベルト空間中の典型的な状態が持つ性質であり、別にエネルギー固有状態特有の性質というわけではない。

2.1.1　局所相互作用を持つモデル

ランダム行列モデルは、全ての行列要素が同程度の大きさで、空間的に離れたスピンの間にも強い相互作用があるので、やや不自然に見えるかもしれない。そこで、次のような局所相互作用

を持つ１次元量子スピンモデルを導入する。

$$\begin{aligned} H &= J\sum_{l=1}^{N}\{\sigma_x(l)\sigma_x(l+1)+\sigma_z(l)\sigma_z(l+1)+\sqrt{2}\cos\phi_l\,\sigma_y(l)\sigma_y(l+1)\} \\ &\quad -h\sum_{l=1}^{N}\{\sin\theta_l\,\sigma_x(l)+\cos\theta_l\,\sigma_z(l)\}. \end{aligned} \tag{5}$$

ここで、$\{\phi_l\}$ と $\{\theta_l\}$ は乱数。比較的大きい J と h（例えば $J=h=1$）に対して隣接間準位の統計を取るとウイグナー型になっており、その意味でこのモデルはカオス的であることがわかる。

図1(左)に、このモデルの 2^{N-1} 番目（スペクトルの中心で、カオス性が最もはっきりと現れる所）の固有状態について、VCM の最大及び最小の固有値を示してある。相互作用が局所的なこのモデルでも、結果はランダム行列の場合とよく一致していることがわかる。

3　より多くの点の間の相関

次に、系を N_A 個の点から成る部分系 A と、残り $N_B=N-N_A$ 個の点から成る部分系 B に分け、これらの間のエンタングルメントを見てみよう。（$N_A\le N_B$ と仮定する。）これは，いわゆる two-partite のエンタングルメントである．部分系のヒルベルト空間の次元は、それぞれ、$d_A=2^{N_A}$, $d_B=2^{N_B}$。２つの部分系の間のエンタングルメントの measure として、（計算の便宜のため，von Neumann entropy ではなく）purity $\mathrm{Tr}(\rho_A^2)=\mathrm{Tr}(\rho_B^2)$ を取る。（ρ_A (ρ_B) は、部分系 A (B) の密度行列。）この量が最大値１を取る時、２つの部分系の間にエンタングルメントはなく、最小値 $1/d_A$ を取る時、エンタングルメントは最大と考えられる。また、この時、A の密度行列はスカラー行列 $\rho_A=1/d_A$ になっている。

ランダム行列を使って purity を評価すると、

$$\overline{\mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}_A^2\right)}=\frac{d_A+d_B+q}{d_Ad_B+1+q}=\frac{1}{d_A}\left(1+\frac{1}{2^{N_B-N_A}}+\cdots\right), \tag{6}$$

となるので、$2^{N_B-N_A}\gg 1$ なら（つまり、N_A が $N/2$ より少し小さければ)、エンタングルメントはほぼ最大である。従って、系全体を見れば、部分系 A と B のある物理量の間には、完全な相関がある。一方、この時よい近似で $\rho_A=1/d_A$ と見做せ、A の内部では全ての相関が 0 であることが分かる。（異なる点の間のオペレータは交換するので、普通の確率論と同じようにキュムラントの母関数を定義して微分してみれば分かる。）そもそも部分系の取り方は任意だったので、この結果は、少数個の点の間の相関は全て消えてしまうことを示している。

つまり、比較的少数の点を見た時には、それらの間の点の相関は指数関数的に小さいが、観測点の個数が系の自由度の半分を超えるあたりから相関が見え始め、系全体を見ればある種の相関は最大になっている、ということである。

4　まとめと議論

以上で見たように、マクロなカオス系のエンタングルメントは、測り方によって強いとも弱いとも言える。上で見た purity 以外にも、局所的な操作による「ほどき難さ」でエンタングルメン

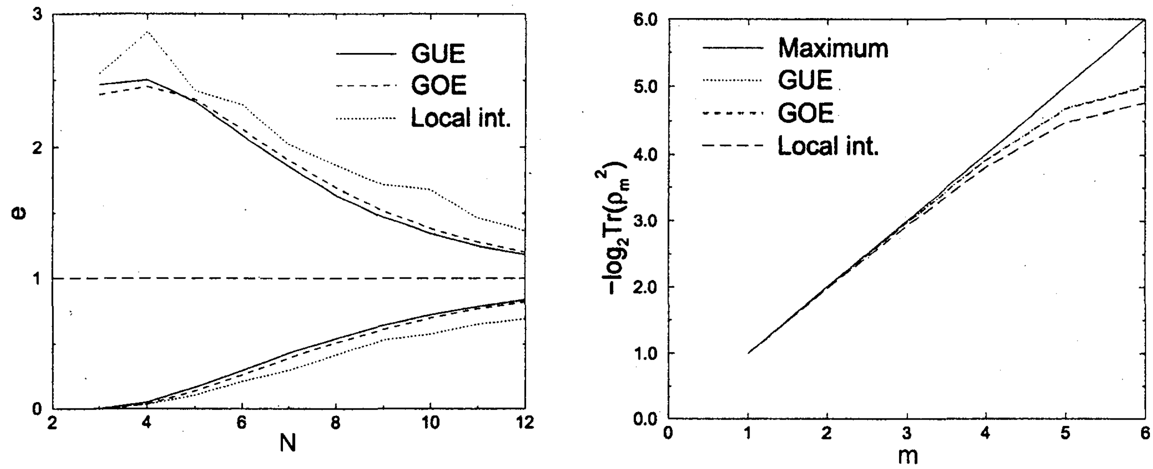

図 1: (左)VCM の最大及び最小の固有値を、システムサイズ N の関数としてプロットしたもの。ランダム行列の場合でも局所相互作用の場合でも、N が大きくなるに連れて VCM の全ての固有値が 1 に近づいていくことがわかる。(右)Purity の対数 $-\log_2 \overline{\mathrm{Tr}\,(\hat{\rho}_m^2)}$ のプロット。$N = 12$ の場合。m が小さい時には、エンタングルメントは実線で示された最大値とほとんど一致していることが分かる。$m = N/2$ の付近では、最大ではないものの、やはりエンタングルメントは大きい。どちらの図も、モデル (5) のパラメーターは $J = h = 1$。

トの強さを定義すると、カオス状態は最も強いエンタングルメントを持つということになる [2]。一方、additive operator の揺らぎやクラスター性の有無でエンタングルメントを測ると、ほとんどエンタングルメントは無いことになる。特に、$N \to \infty$ の極限では、任意の有限個の点の間の相関が消えてしまうので、実際にはエンタングルメントを見つけることも利用することもできず、この意味でエンタングルメントは無いと言ってしまって良いようにも思える。このような二面性が、カオス系のエンタングルメントの特徴である。

また、GUE の計算結果は、ヒルベルト空間の圧倒的大多数の状態はカオス状態であることを示している。このことと、カオス状態が熱力学と矛盾しない安定な状態でことを考えると、「マクロ系における熱的状態とは、実際にはここで述べた意味でのカオス状態なのではないか？」という予想がもっともらしく思えてくる[4]。この点については、今後さらに深く追及していく予定である。

参考文献

[1] A. Shimizu and T. Miyadera, Phys. Rev. Lett. **89**, 270403 (2002).

[2] A. Sugita and A. Shimizu, quant-ph/0309217

[4]統計力学で使われる各種のアンサンブル (ミクロカノニカル、カノニカル等) は、平衡状態における物理量を計算するための便利な「道具」ではあるが、このことは、熱平衡にある系の状態がこれらのアンサンブルを表す混合状態と一致しているということを意味しない。実際には、我々はマクロ系の全てのオブザーバブルの内ごく一部しか測ることが出来ない。(つまり、微視的状態を確定することはできない。) そのごく一部の物理量がアンサンブル平均とよく一致するというだけである。