京都大学	博士(文学)	氏名	佐　野　勝　彦
論文題目	Semantical Investigations into Extended Modal Languages (拡張様相言語の意味論的探求)		

（論文内容の要旨）

様相論理は、古典命題論理のレベルでは説明できない日常的推論を救うために、命題論理に様相記号を加えることで表現力を増した論理である。その研究はアリストテレスによる必然性と可能性の分析にまで遡ると言われるが、フレーゲ以降の現代的論理学の発展を踏まえて、様相論理を体系的に論じたのが、C.I. Lewis と Langford である。当初は、ほとんどが証明論による研究であり、数多くの公理体系が個別に研究されていた。

状況が一変するのは、1960 年代のクリプキによる可能世界意味論の登場によってである。彼は、様相論理に対する意味論として、可能世界の集合 W と到達可能性関係 R からなる関係構造（以下では, フレームと呼ぼう）を準備し、そのもとで、$\Box\phi$（たとえば「ϕ は必然的だ」と読まれる）という命題が現実世界で真であるのは、現実世界から到達可能なすべての可能世界において ϕ が真であるとき、そのときに限る、というように、現実世界とそこからどのような世界に到達できるか、という到達可能性関係 R とに相対的に、様相記号をもつ命題の真偽評価が可能であることを明らかにしたのである。

クリプキの研究のもう一つの貢献は、数多く存在していた公理体系のほとんどが、到達可能性関係 R に何らかの性質を課すことで扱うことができる、ということを明らかにしたことである。クリプキは、その証明論的アプローチゆえに個別になされていた様相論理研究に、意味論の側から統一的視点を持ち込み、研究分野の見通しをそれ以前に比べ格段に変えたのである。この公理と到達可能性関係（もっと一般的にいえば、フレーム）との対応関係は、たとえば、T:$\Box p \rightarrow p$ という論理式が到達可能性関係の反射性（どの世界も自分自身に到達可能であること）を表現する、というように与えられる。

到達可能性のもつ性質の中には、様相論理の式によって表現できないものも存在する。例えば、到達可能性関係の非反射性（どの世界も自分自身には関係付けられていない）が様相論理の式をつかって表現できない、ということは早い時期から知られていた。こういった事実や様相論理に対する、可能世界意味論が一般的となってきたことを背景に、到達可能性関係のうちのいったいどのような性質が様相論理の式によって表現可能となるのだろうか、という問いが生じてきた。この問いに、様相論理式の成立を変えないフレーム構造の変形操作の観点から、様相論理式の表現力を必要十分に特徴付けたのが、Goldblatt and Thomason である。

フレームを時間構造とみなしたとき、上で挙げた非反射性は推移性とともに自然に課される単純な条件である。そこで、非反射性をいかに扱うかは、時制を様相として扱う時間論理の中では重要な問題であった。これまで、おもに次の二つの仕方で非反射性は取り扱われてきた。

(i) Gabbay 流推論規則：非反射性を式とは異なる意味で推論規則によって表現する。このような推論規則を用いない場合、完全性証明の際に非反射性を満たす反例モデルを構成するためのトリック（bulldozing）を使う必要があるが、Gabbay 流推論規則によりこのようなトリックの使用を避けることができる。さらには、この推論規則のおかげで広い範囲の様相論理に対して一様に完全性が証明できる。

(ii) 言語拡張：新しい様相演算子や新しい命題変数を導入することで非反射性を式で表現可能にする。たとえば de Rijke による difference operator $[D]\phi$（現実世界とは異なったすべての世界で ϕ）を加えれば、非反射性が $\Box p \to [D]p$ で表現できる。また、たった一つの可能世界でのみ真となるノミナル i と呼ばれる新しい命題変数を加えれば(ハイブリッド論理)、$i \to \neg\Diamond i$ により非反射性が表現できる。

上で取りあげた言語拡張路線の二つの例では、非反射性以外の、「全可能世界に到達可能であること」（$R = W \times W$）あるいは「どの二つの可能世界も他方から一方へ到達可能である」（どの w, w' についても wRw' or $w'Rw$ が成立）も表現可能となる。これらの拡張は直観的にいうなら、現実世界と到達可能性関係によって有限回でたどり着けない世界にも言及できるという意味で、強い拡張だと言える。非反射性のみを表現するためにこのような強い拡張が必要なのか？これに対して既存のものよりも弱い拡張を提案し、その拡張が既存のものに劣らないメタ論理的性質を満たすことを明らかにするのが本論文の最大の貢献である。

本論文は「現実世界から到達可能ではあるが異なるすべての世界で ϕ」という読みをもつ非反射的様相 $\blacksquare\phi$ を提案する。この非反射的様相は非反射性を表現できるし、difference operator に比べて、到達可能な範囲に参照する世界を制限している点で、その真理条件が直観的に弱いことが理解できる。第四章では、非反射的様相をもつ様相論理に対して、完全性を満たす公理系を与え、その決定可能性を示す。さらには、Goldblatt-Thomason 流の特徴付けが可能なことも明らかにされる。

こういった結果は既存の結果を単にまねたものではない。上で挙げた完全性および Goldblatt-Thomason 流の特徴付けを得る際に、本論文では、realizer という概念を本質的に用いる。これは、Gabbay 流推論規則を加えない場合の完全性証明に必要な技術的トリック（bulldozing）の一般化とみなせる概念であり、本論文ではこの概念が非反射的様相をもつ言語 Goldblatt-Thomason 流の特徴付けの際にも有用であることを明らかにした。この意味で、完全性と意味論的特徴づけを両方視野に入れた場合には、Gabbay 流推論規則は本質を取り逃がしてしまうことがあるといえる。

さらには、realizer 概念が非反射的様相だけに有用な概念ではない、ということを明らかにするために、第六章では、一般的な拡張様相言語を設定したうえで、その言語に対して realizer 概念を定義することで、Goldblatt-Thomason 流の特徴付けを与える。到達可能性関係 R と等号からブール結合によって構成される二項関係を真理条件につかう様相記号をもつ言語にはすべて Goldblatt-Thomason 流の特徴付けを与えることができる。通常の様相論理、difference operator をもつ様相論理、非反射的様相をもつ様相論理への特徴づけはすべてこの結果の系として導出できる。

Goldblatt-Thomason 流の特徴付けを与えることで、difference operator をもつ様相論理と非反射的様相をもつ様相論理の、フレームに対する表現力の強さを比較できる。たとえば、第四章では、有限の推移的到達可能性関係をもつフレームのクラス全体の中では、非反射的様相のもつ表現力は、通常の様相論理と difference operator をもつ様相論理の中間にあることが明らかにされる。しかし、the global modality A ϕ（すべての可能世界で ϕ）と非反射的様相を使うと、difference operator と通常の様相記号では表現できない性質を書くことができる。この意味で、A ϕ を加える下では、非反射的様相と difference operator は異なる拡張を与えるということが分かる（第五章）。通常の様相論理に A ϕ とノミナルを加えたハイブリッド論理は、difference operator をもつ様相論理とちょうど同じ表現力をもつことが Gargov and Goranko によって明らかにされている。それゆえ、非反射的様相は difference operator をもつ様相論理の表現力を真に増やすことが分かる。また、このことから非反射的様相をもつハイブリッド論理を考察する可能性が開ける。

第五章では、非反射的様相をもつハイブリッド論理について、その完全性を満たす公理化、公理系の決定可能性、Goldblatt-Thomason 流の特徴付けを明らかにする。またこの第五章の内容は、非反射的様相に位相的解釈を与えた場合の基礎ともなる。

非反射的様相の述語拡大を考えることで、 □と■の本質的な相互作用に迫ることができる。第七章では、非反射的様相をもつ論理のバルカン式なしの述語拡大に、完全性を証明する際に、素朴な論法が通らないという難点があることを確認したのち、命題論理のレベルでは明らかにする必要のなかった□と■の本質的な相互作用を明らかにすることで、その難点が回避できることをみる。

論理は様々な意味論に対して開かれている。たとえば、様相論理は、クリプキ意味論、位相意味論、代数意味論などをもつ。位相意味論では、□の双対の◇は閉包演算子として解釈される。我々は、非反射的様相をクリプキ意味論の範囲で提案したが、驚くべきことに、その位相意味論での解釈も存在する。与えられた集合 X の集積点全体を返す演算、導集合演算 $\mathrm{d}X$ がそれに当たる。第八章では、位相的に解釈をした非反射的様相をもつハイブリッド論理について、その一般的な完全性に関する結果（pure 完全性）を確立する。

非反射性を扱うための一つ目の方法：Gabbay 流推論規則に戻ろう。Gabbay 流推

論規則は、さまざまな様相論理の完全性を一様に証明可能にしてくれるが、逆に、完全性を得るために導入された規則ともいうことができる。そのため、その規則が公理系の中でどのように振る舞うのかはそれほど明らかではない。しかし意味論を変えることは、こういったGabbay流推論規則にもよりよい意味論的理解を与えてくれる。ハイブリッド論理は洗練された形のGabbay流推論規則を二つもつ。Ten Cate and Litakは位相意味論の枠内で、そのうちの一つBGがまさにクリプキフレーム（可能世界構造）を特徴づけることを明らかにしている。この路線をさらに推し進め、第九章では、D.ルイスの反事実条件法のハイブリッド論理において、BGの対応物が、D.ルイスが拒絶していた極限仮説（the Limit Assumption, 可能な命題に対しては現実世界にもっとも近い世界の集合が選べる）を特徴づけることを明らかにする。

（論文審査の結果の要旨）

様相論理は必然性と可能性を記号論理において扱うものとして考案され、1940 年代以降発展してきた。現代では時間の分析における時制論理や、「金は王水に溶ける」といった傾向性の分析における反事実条件法の論理などの広い領域において用いられ、言語哲学・分析哲学における必須の分析ツールともいえるものである。様相論理のもつ汎用性は 1960 年代にクリプキが与えた可能世界意味論というモデル理論により可能になった。クリプキは、可能世界間に到達可能性関係の概念を持ち込み、「必然的に p 」の真理条件を、「現実世界から到達可能関係にあるすべての可能世界で p が真」と与えた。彼はさらに到達可能性関係に課される条件と特定の公理の間の対応を明らかにしたが、これが上述の汎用性を可能にした。ここで（可能世界、到達可能性）のペアを（時点、時間的順序）と読み替えるとき、時制論理の意味論が得られるが、「どの時点も自分自身の先にはない」という時間的順序の非反射性には、対応する公理が存在しないことが知られている。非反射性は推移性と並んで時間的順序に自然に課される条件であるため、非反射性の表現不可能性は、時制論理さらには様相論理における最も重要な課題の一つとして研究されてきた。本論文の貢献は、先行研究を踏まえつつ、この問題を解決するために「非反射的様相」という新たな様相概念を提案し、その様相概念をもつ拡張様相論理の意味論的射程を明らかにしたことにある。

非反射性を様相論理において扱う試みとしてはデ・レイケのものが知られている。彼の研究では、「現実世界とは異なるすべての世界で真」という真理条件をもつ様相 □（ホワイトボックス）を導入することで、非反射性が表現可能となるが、この様相概念は、現在世界から到達可能でない世界、言い換えれば現在と時間的順序関係にない時点にも言及が可能であることから非常に強い様相概念になってしまう。これに対して本論文は、参照する世界を到達可能な世界に絞った「現実世界とは異なるが、到達可能なすべての世界で真」という真理条件をもつ「非反射的様相」■（ブラックボックス）を提案している。「非反射的様相」は、時制論理の文脈では「現在とは異なるが、未来にあるすべての時点で真」という自然な真理条件をもつ。本論文では、この「非反射的様相」を、既存の様々な様相論理や様相述語論理に加えた場合の論理的性質を総合的に検討することで、「非反射的様相」という新しい様相概念の論理学的正当性を確立することを試みている。さらには、そこで得た論理学的知見を既存の拡張様相論理にも広く応用することで拡張様相論理のモデル理論研究を大きく進展させるものといえる。

本論文で、最も評価できるのは「非反射的様相」という概念の提案であるが、重要な論理学的貢献として以下の二点を記しておきたい。

第一には、公理系における定理と妥当性概念の外延的同値性を述べる完全性定理に関して総合的かつ統一的な結果を与えている点である。まず、様相命題論理に非反射的様相を加えた場合には、既存の到達可能性のさまざまな性質をカバーする公理系に

対して完全性定理が成立することを一様な仕方で証明している。一方、様相述語論理に「非反射的様相」を加えた場合には、様相命題論理の場合と同様の議論が可能でないにもかかわらず、追加した「非反射的様相」を既存の様相概念よりも基礎的にみなすという発想の転換を行うことで、完全性定理を証明している。とくに後者の結果は、様相述語論理を考えることが追加様相概念の論理学的本質に迫る具体例を提供している点で、これまで様相命題論理にその研究が集中していた拡張様相論理研究に対する非常に重要な貢献であるといえる。

第二には、「非反射的様相」という具体的様相概念を探求する中で「実現」（realization）という新たなモデル理論的手法を見出した点にある。ゴールトブラットとトマソンは、様相論理が到達可能性関係に対してどれだけの表現力をもつかについての特徴づけを与えているが、本論文では、「非反射的様相」を加えた場合のゴールトブラット＝トマソン流の特徴づけと上述の完全性定理との間に密接な関係があることを見出し、その本質を「実現」という概念として取り出している。そしてこの概念を使うことで、非反射的様相に限らない広範囲の拡張様相論理において、ゴールトブラット＝トマソン流の特徴づけが可能であることを明らかにした。このような洞察は、今までの様相論理研究ではほとんど提示されたことのないものであり、本論文の独創として高く評価できるものである。

もちろん本論文にも望まれる点がないわけではない。本論文は、「非反射的様相」に関する論理学的考察を正面から徹底的に行うことを試みた論考であるがために、その様相概念がどのような哲学的含意を生ずるのかという点についての考察が多少手薄になっていることが惜しまれる。しかし、この点は本論文がきわめて大きな論理学的課題に取り組んだことの代償であって、論者が本論文で示した力量からして、今後の研鑽によって改善していくことのできる点であると思われる。

以上、審査したところにより、本論文は博士（文学）の学位論文として価値あるものと認められる。2009 年 10 月 29 日、調査委員 4 名が論文内容とそれに関連した事柄について試問した結果、合格と認めた。