数理解析研究所講究録
510巻 1984年 33-44

Marangoni対流に対する非線形表面波の効果

和歌山高専　舟田敏雄 (Toshio Funada)

1．はじめに

気液（又は液液）界面において、表面張力が不均一なときには、Marangoni効果（表面張力勾配）が働いて対流を発生させ得る。この現象の理論的解明は、静止液層の線形中立安定性の吟味に始まった。[1),2)] しかし、自由表面の変形があると、表面張力が作用し、低波数域に顕著な影響が現われて、臨界Marangoni数 M_{Rc} が"ゼロ"になるという結果を与える事が示された。[3)] 更に、固体壁上の液層の場合には、重力をも考慮すると、低波数域は安定化されるが、反面、重力が逆向きのときは特異的な作用を及ぼし、不安定化の原因ともなり得る事が明らかになった。[4)~6)] 又、この一見奇妙とも思われる表面変形の効果は、勾配を引き起こす要因の対流機構には依存せず、変形表面の境界条件の近似によるものである事（それを"表面変位不安定"と呼んだ）が分かっている。[5),6)] そこで、本研究では、非線形理論によりこの表面変形の効果の解析を試み

る。

先に、ⓐ熱移動系の温度，ⓑ気液擬1次反応吸収系の生成物の変動に起因するMarangoni効果について、浅水近似を用いて計算し、適当な条件の下で表面変位hを支配するモデル方程式

$$\frac{\partial h}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\left(h^n \frac{\partial h}{\partial x}\right) = 0$$

（aはMarangoni数M_Rに比例する定数，n非負整数）を導いた。そして、$a<0$（$M_R<0$）のときhは時間と共に減衰$a>0$のとき増大する事を示した。[7] 但し、この式は、$|M_R|$が大きいところで成立するものであり、表面張力は無視している。又、その後、周期境界条件の下にhをFourier級数に展開し、初期値問題として振幅の時間発展を数値計算すると、極めて短時間の内に高波数成分が発生，増幅される事が分かった。しかし、高波数程増幅率が大きい為、結果は定性的傾向を指摘できるに過ぎない。

ここでは、ⓐを更に発展させ、高次の効果をも取り入れて、M_{RC}近傍においてhを記述する方程式を導く。又、それに到る過程で、固体壁の温度変化によって起こる表面変位の式を求め、特別な場合として、カオス的な解を持つ式に帰着できる事を示す。

2．問題の定式化

縮まない粘性流体の薄い液層を考える。層の厚さ方向にy軸を取り、$y=0$を固体壁，$y=h$を自由表面とする。初め液層は$h=$const. で静止しており、定常温度分布$T(y)$が実現している。そして、温度擾乱に起因する表面張力σの変化

$$d\sigma = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right) dT$$

によって対流が誘起され、表面変位が発生する。擾乱は2次元とし、x方向の変化のスケールlがy方向のh_0（平均液厚又は初期厚み）に比べ充分大きく、浅水パラメータϵ

$$\epsilon = \frac{h_0}{l} \ll 1$$

を導入できるものとする。速度場$\boldsymbol{u}(x, y, t)=(u, v, 0)$を流れ関数$\psi$で表わすと、基礎方程式は、無次元形で

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \epsilon\frac{\partial P}{\partial x} + R\epsilon\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -W - \epsilon\mathcal{L}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + R\epsilon^2\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \tag{2}$$

$$\mathcal{L}T = P_r R\epsilon\frac{DT}{Dt} \tag{3}$$

となる。但し、Pは圧力であり、

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$$

と置いた。Rは流れの代表速度u_0とh_0とを用いて定義したReynolds 数，Prは Prandtl 数である。Wは重力に対する粘性項の比であり、W>0のとき重力は−y方向に働く。尚、これ以降、添字ゼロの付いた量のみ有次元、他は全て無次元とする。この系の境界条件として

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \qquad at \quad y=0 \tag{4}$$

$$T = \hat{T}(x, t) \qquad at \quad y=0 \tag{5}$$

$$\cos 2\theta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \epsilon^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) - 2\epsilon \sin 2\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

$$= M_R \epsilon \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\cos\theta \qquad at \quad y=h \tag{6}$$

$$P - P_a + 2\epsilon \cos 2\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \sin 2\theta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \epsilon^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)$$

$$= -\frac{\epsilon^2}{N_c}\cos^3\theta \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \qquad at \quad y=h \tag{7}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}=-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \qquad at\ y=h \qquad (8)$$

$$\cos\theta\frac{\partial T}{\partial y}-\epsilon\sin\theta\frac{\partial T}{\partial x}=-\lambda(T-1)\ \ at\ y=h \quad (9)$$

$$\left(\sin\theta=\epsilon\frac{\partial h}{\partial x}\Big/\sqrt{1+\epsilon^2\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}\right)$$

を用いる。ここで、Ψは固体壁側の外部擾乱，P_aは気相側圧力である。(6)式右辺が表面張力勾配を、(7)式右辺は表面張力を示す。M_RとCrispation 数N_cとの積

$$M_R N_c=\frac{1}{\sigma_0}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)_0\Delta T_0$$

は温度による表面張力の変化率を表わす。ΔT_0は、定常状態における固体壁と気相側との温度差であり、無次元化の際に用いられている。(9)式のλは熱伝達率である。

さて、方程式と条件(1)～(9)が静止定常解

$$\left.\begin{array}{ll}\bar{\Psi}=const.=0 \quad , & \bar{h}=const.=1 \\ \bar{P}=P_a+W(1-y) \quad , & \bar{T}=\lambda y/(1+\lambda)\end{array}\right\} (10)$$

を持つ事は容易に分かる．次に擾乱をϵのベキ級数に展開し、

$$(\Psi,P,T)=\sum_{n=0}\epsilon^n(\Psi^{(n)},P^{(n)},T^{(n)}) \qquad (11)$$

とおくと、運動学的条件(8)は、

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{ \psi^{(0)} + \epsilon \psi^{(1)} + \cdots \right\}_{y=h} = 0 \qquad (8')$$

と表わされる。従って、各パラメータの大きさを規定し、逐次計算していけばhを支配する方程式が求められる。但し、扱う問題に対する解法手順としては、

$$\left.\begin{array}{lll} R = O(\epsilon), & W = O(1), & M_R\epsilon = O(1) \\ N_c = O(\epsilon^2), & P_rR = O(1), & \lambda = O(1) \end{array}\right\} \qquad (12)$$

を仮定し、先ず$\hat{T}$によって起こるhを求め、次いでM_{RC}近傍について調べる。

展開の$O(\epsilon^0)$の解は、

$$\psi^{(0)} = F(x,t)\, y^2 \qquad (13)$$

$$P^{(0)} = W(h-1) - \frac{\epsilon^2}{N_c}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \qquad (14)$$

$$T^{(0)} = \hat{T} + B(x,t)\, y \qquad (15)$$

$$B = \frac{-\lambda}{1+\lambda h}\left(\frac{\lambda(h-1)}{1+\lambda h} + \hat{T}\right) \qquad (16)$$

となるから、条件(6)を用いて、

$$F = \frac{M_R\epsilon}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\hat{T}+\lambda h}{1+\lambda h}\right) \qquad (17)$$

を得る。そして、$\hat{T}=0$について、(13), (17)式を(8')式に代入すると、既に議論した式[7]となる。

$O(\epsilon)$ の結果の内で(8)′式の計算に必要な量のみを記すと

$$(\psi^{(1)})_h = \frac{M_R\epsilon}{2} h^2 \frac{\partial}{\partial x}(T^{(1)})_{y=h} - \frac{1}{3}\frac{\partial P^{(0)}}{\partial x} h^3 \tag{18}$$

$$(T^{(1)})_h = \frac{-P_r R}{1+\lambda h}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} h^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial B}{\partial t} + 2F\frac{\partial \hat{T}}{\partial x}\right)h^3 + \frac{1}{4}\left(2F\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\lambda(\hat{T}-1)}{1+\lambda h}\right)h^4\right\} \tag{19}$$

となる。

3. 外部温度攪乱による対流

固体壁温度が $T=0$ から $T=\hat{T}$ に変化する事によって起こる Marangoni 効果を考えよう。液層と気相との伝達熱量は、通常（特に熱伝導が支配的な場合）あまり大きくはない。そこで、$\lambda \to 0$ の極限を取ると、(8)′式は、

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{M_R\epsilon}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(h^2\frac{\partial \hat{T}}{\partial x}\right) = \frac{M_R\epsilon^2}{2}P_r R\frac{\partial}{\partial x}\left\{h^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \hat{T}}{\partial t}h^2 + \frac{1}{3}M_R\epsilon\left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial x}\right)^2 h^3\right)\right\} + \frac{1}{3}W\epsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial h}{\partial x}\right) - \frac{1}{3}\frac{\epsilon^3}{N_c}\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right) \tag{20}$$

と表わされる。(20)式は、$\hat{T}$ が t 又は x のみの関数のとき、更に簡単になる。

特別な場合として $\hat{T}(x)=ax+b$ と与えると、(20)式は、

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\alpha h\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{1}{2}\epsilon\alpha^2 P_r R\frac{\partial}{\partial x}\left(h^4\frac{\partial h}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{1}{3}W\epsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial h}{\partial x}\right)-\frac{1}{3}\frac{\epsilon^3}{N_c}\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right) \qquad (21)$$

（$\alpha=M_R\epsilon a$）となる。右辺は$O(\epsilon)$の量であるが、左辺のみの式は「つっ立ち」を起こすので、右辺全体がそれを抑制する役割を果たしている。又、一般に表面張力は温度の減少関数であるから、壁が熱いとき$M_R>0$となり、$a>0$ならば擾乱はx方向に伝わる。但し、αの正負は、変換$x\to -x$によって整理できるので、$\alpha>0$として扱う。

表面変位を$h=1+\sqrt{\epsilon}\,\hat{h}$と規定し、$O(\epsilon)$迄取って置き替えると、(21)式から

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\alpha h\frac{\partial h}{\partial x}=\epsilon\beta\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}-\frac{1}{3}\frac{\epsilon^3}{N_c}\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \qquad (22)$$

$$\beta=\frac{1}{2}\alpha^2 P_r R+\frac{1}{3}W \qquad (23)$$

を得る。重力と表面張力を無視できるとき（$W=0$，$N_c\to\infty$）、(22)式はBurgers方程式となる。重力があり、且つ$W<0$（重力の向き逆転）となっても、$\beta>0$ならば右辺第1項は抑制作用を表わす。しかし、負のWは、$\beta=0$（第1項消失），更

には$\beta < 0$（増幅又は不安定化作用）を与える場合がある。尚、右辺第２項は抑制効果を表わす。

$\beta < 0$のとき、(22)式は、適当な変換（詳細は省略）を経て、

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h\frac{\partial h}{\partial x} + \beta' \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} = 0 \qquad (24)$$

（$\beta' > 0$）と表わされるから、文献8)で求められた式と同形である。(24)式を線形近似して調べると、低波数域が不安定である事が示される。尚、講演の際に示した(24)式の数値計算結果（$\beta' = 1$）は、文献9)より借用した。

4．M_{RC}近傍の表面変位

$\Upsilon = 0$のとき、(17), (18)式より、(8')式は、

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{M_R \epsilon}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{h^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1+\lambda h}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{3}W\epsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial h}{\partial x}\right) - \frac{1}{3}\frac{\epsilon^3}{N_c}\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right)$$

$$-\frac{M_R \epsilon^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{h^2\frac{\partial}{\partial x}\left(T^{(1)}\right)_{y=h}\right\} \qquad (25)$$

$$\left(T^{(1)}\right)_h = \lambda^2 P_r R\left(\frac{h}{1+\lambda h}\right)^3\left\{\frac{1}{3}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{M_R \epsilon}{8}\frac{h}{1+\lambda h}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right\} \quad (26)$$

となり、xについて偶数回微分の項のみが現われる。$\lambda < 1$（$|\lambda h| < 1$）として、$O(\lambda^2)$迄を取り込むと講演で示した

式（容易に計算できるので省略する）を得る。しかし、前節と同様にして、$h=1+\sqrt{\epsilon}\hat{h}$ を代入して $O(\epsilon)$ 迄取ると

$$\frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{M_R\epsilon}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{(a_2h^2+a_1h+a_0)\frac{\partial h}{\partial x}\right\}+\cdots \tag{27}$$

$$a_2=\frac{\lambda(1-2\lambda)}{(1+\lambda)^4},\quad a_1=\frac{6\lambda^2}{(1+\lambda)^4},\quad a_0=\frac{\lambda^2(\lambda-2)}{(1+\lambda)^4} \tag{28}$$

となり、右辺第１項が、(25)式のそれの $\lambda\sim 0$，$\lambda\gg 1$ の漸近形の両方共含む形に表わされる。

線形安定論の中立曲線の低波数域の様子（例えば文献6)を参照）は、(25)式を h について線形化して得られる。即ち、第４項は無視し、定常解 $h\propto exp(ikx)$（k 波数）を代入して、

$$M_R=\frac{2}{3}\frac{1}{a_3}\left(W+\frac{k^2}{N_c}\right)\sim\frac{2}{3}\frac{W}{a_3} \tag{29}$$

（$a_3=\lambda/(1+\lambda)^2$）となる。従って、(29)式が臨界値を与えるとき、その近傍では、(27)式から

$$\frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{1}{3}\frac{\epsilon}{a_3}W\frac{\partial}{\partial x}\left\{(a_2h^2+a_1h+a_0)\frac{\partial h}{\partial x}\right\}$$

$$-\frac{\delta M_R\epsilon}{2}a_3\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{1}{3}W\epsilon\frac{\partial}{\partial x}\left\{(h^3-(h-1)^3)\frac{\partial h}{\partial x}\right\}$$

$$-\frac{1}{3}\frac{\epsilon^3}{N_c}\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \tag{30}$$

を得る。但し、$M_R = M_{RC} + \delta M_R$と置き、$\delta M_R = O(1)$ 及び $N_c = O(\epsilon^2 W)$ として、それらの項を線形化した。(30)式の定常解は、$\partial h/\partial x$ を速度と見なすと、hの4次式で表現できるポテンシャル場の質点の運動に対応する。尚、ポテンシャルの構造（Wの符号，"振動モード" と周期境界条件との関係等）の検討，(30)式の数値計算については、目下進行中なので、追って報告する事としたい。

5、おわりに

本稿では温度変動による表面張力勾配を扱ったが、固体壁と気相に接する液層において、勾配の発生要因Zが運動方程式中には含まれず、境界条件を通してのみ流れに関与するとき、表面変位の方程式は

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{M_R \epsilon}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left\{ h^2 \frac{\partial}{\partial x}(Z)_{y=h} \right\}$$

$$+ \frac{1}{3} W\epsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 \frac{\partial h}{\partial x}\right) - \frac{1}{3}\frac{\epsilon^3}{N_c}\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right)$$

$(Z = \bar{Z} + Z^{(0)} + \epsilon Z^{(1)} + \cdots)$ と表わされる。更に4節のような問題の場合は$(Z)_h \equiv f(h)$ の形を取るので、この右辺第1項をベキ展開した式は、この種の問題の一般モデルと考えられる。実際、(B)[7] の系更に液液界面（２種の液層）の系でもそれを確かめる事ができる。

参考文献

1) J.R.A.Pearson:J.Fluid Mech. 4(1958)489.

2) C.V.Sternling and L.E.Scriven:AIChE J. 5(1959)514.

3) L.E.Scriven and C.V.Sternling:J.Fluid Mech. 19(1964)321.

4) K.A.Smith:J.Fluid Mech. 24(1966)401.

5) 舟田,坂田:数理解析研講究録 449(1982)57.

6) M.Sakata and T.Funada:J.Phys.Soc.Jpn. 50(1981)696.

7) 舟田:「乱流現象の解明と制御」理論4班合同研究会報告集(1983)25.

8) Y.Kuramoto and T.Tsuzuki:Prog.Theor.Phys. 55(1976)356.

9) G.I.Sivashinsky and D.M.Michelson:Prog.Theor.Phys. 63(1980) 2112.