

Unipotent classes : from characteristic 0 to
positive characteristic

ETH - Zürich N. Spaltenstein

(庄司俊明記)

§0. Introduction

G を代数体 k 上定義された連結, reductive
な代数群とし, $p = \text{char}(k) \geq 0$ を k の標数とする。
ここでは, 次の2つの問題を考える。

(a) G の unipotent classes (G の Lie 環の
nilpotent orbits) を分類し, その統一的な parametrization
を与える事。

(b) p が十分大きい時, unipotent classes (又は,
nilpotent orbits) の分類は, 標数 0 の場合の分類と
一致するが, p が小さい時は, 一致しない。 p を動か
す時生ずるこのずれをどの様に理解するか。

(a) に関しては、Weyl群の表現に関する Springer の理論が、満足ゆく結果を与える。即ち、 G の unipotent classes (resp. of a nilpotent orbits) は、自然な方法で W^\wedge の subset S_G (resp. S'_G) により parametrize される。但し、 W^\wedge は G の Weyl群 W の既約表現の同値類の集合である。古典群の場合には、 S_G , S'_G あるいはより一般に W の Springer 対応 (Lusztig によるその一般化も含めて) は、combinatorial にきれいに記述できる。

(b) に関しては、 S_G° を標数 0 の場合の unipotent classes に対応する W^\wedge の subset とする。 $S_G^\circ \subset S_G$ (resp. $S_G^\circ \subset S'_G$) と仮定する。 G の semi simple elements に関する考察により W^\wedge のある元は、必然的に S_G (resp. S'_G) に属する事が分り、これにより S_G (resp. S'_G) の subset \overline{S}_G (resp. \overline{S}'_G) が定義される。実際には、 $S_G = \overline{S}_G$ (resp. $S'_G = \overline{S}'_G$) とする事が確かめられる。従って、ある意味で S_G (resp. S'_G) は、semi simple classes から決まるものを含む最小の集合という事もできる。

§1. Springer の理論

1.1. G の unipotent element u に対し、 $A_G(u) = C_G(u)/C_G^\circ(u)$

とおく。但し $C_G(u)$ は G における u の centralizer, $C_G^\circ(u)$ は $C_G(u)$ の単位元を含む連結成分である。以下、一般に有限群 H に対して, H^\wedge を H の複素既約表現の同値類の集合とする。

$$X_G = \left\{ (u, \phi) \mid u \in G : \text{unipotent}, \phi \in A_G(u)^\wedge \right\} / \text{conjugate}$$

とおく。Springer [8], (更に [3], [1], [2]) により, W^\wedge から X_G への単射 $\Psi: W^\wedge \hookrightarrow X_G$ (Springer 対応) が自然に構成される。 $\rho \in W^\wedge$ に対し, $\Psi(\rho) = (u, \phi)$ (の同値類) とするとき, $\rho = \rho_{u, \phi}$ と記す。各 unipotent element $u \in G$ に対して, $(u, 1) \in \text{Im } \Psi$ となる事が知られている。

$$S_G = \left\{ \rho_{u, 1} \in W^\wedge \mid u \in G : \text{unipotent} \right\} \quad \text{とおく。}$$

1.2. Springer 対応 $W^\wedge \hookrightarrow X_G$ は Lusztig による X_G への bijection (generalized Springer 対応) に拡張された。以下 Lusztig の結果を説明する。 P は G の parabolic subgroup, $P = L \cdot U_P$ は P の Levi 分解とする。 G の unipotent element u , L の unipotent element v に対し,

$$Y_{u, v} = \left\{ g C_L^\circ(v) U_P \mid g \in G, g^{-1} u g \in U_P \right\}$$

とおく。 $\dim Y_{u, v} \leq d = \frac{1}{2} (\dim C_G(u) - \dim C_L(v))$ が

成立する。 $S_{u,v}$ を、 $Y_{u,v}$ の次元が d に等しい既約成分の集合とする。 $C_G(u)$ は left translation により自然に $Y_{u,v}$ に作用し、従って $A_G(u)$ は $S_{u,v}$ の上に置換表現を引き起す。 $\psi \in A_G(u)^\wedge$ に対し、 ψ が cuspidal とは、全ての $P (\neq G)$ と $v \in L$ に対し、 ψ が $S_{u,v}$ の置換表現に現われない時を言う。 この時、

1.3. 定理 (Lusztig [4])

$(u, \psi) \in X_G$ に対し、 3組 (L, v, ψ) を対応させる写像 Ψ で (*) を満たすものが存在する。 (Ψ を generalized Springer 対応と呼ぶ。) 但し、 L : 或る parabolic subgroup の Levi subgroup, $v \in L$, unipotent element, $\psi \in A_L(v)^\wedge$: cuspidal 表現 である。

(*) (L, v, ψ) が $J_m \Psi$ に λ, z なる時、

$$X_G \supset \Psi^{-1}((L, v, \psi)) \xrightarrow{\sim} (N_G(L)/L)^\wedge$$

bijection

注意 (i) $L = T$: maximal torus, $v = 1$, $\psi = \text{id}$ の時

(*) は本来の Springer 対応と一致する。

(ii) 全ての L が表われるとは限らない。又、 L が重複して表われることも起す。 (*) が成りたつ場合、

特に, $N_G(L)/L$ は Coxeter 群になる事が一般的に確かである。

1.4. generalized Springer 対応は, Spin 群の場合を除いて, 全ての単純群に対して決定されている。古典群に対しては, Lusztig [4] ($p \neq 2$), Lusztig-Spaltenstein [5] ($p = 2$)。又, 例外群に対しては Spaltenstein [7]。

1.5. \mathcal{O}_σ の nilpotent orbits に対しても, 2.1 と同様に Springer 対応が成立し, 従って $S'_G \subset W^\wedge$ が定義できる。又, generalized Springer 対応も成立する事が期待される。 S_G, S'_G は全ての場合に決定されている。又, Springer 対応 $W^\wedge \hookrightarrow X_{\mathcal{O}_\sigma}$ (unipotent element を nilpotent element で置き換えて X_G と同様に定義 (ただし σ)) も, $p = \text{bad}$ の場合を除いて全て決定されている。($p = \text{bad}$ の場合は, 例として [6].)

1.6. 古典群の場合, Springer 対応は Shoji ($p \neq 2$) により決定されたが, Lusztig は generalized Springer 対応の枠組みの中で, symbol を使って, より見通しの良い記述を与えた。以下, $G = \text{Sp}_{2n}$ の場合には Lusztig

(及び Lusztig - Spaltenstein) の結果を説明する。

$$r, s, n, e \in \mathbb{N}, \quad d = 2e + 1 \quad \text{とおく.}$$

$$A = \{a_i \mid 1 \leq i \leq m+d\}, \quad B = \{b_i \mid 1 \leq i \leq m\}$$

を次の条件を満たす自然数の列とする。

$$(**) \begin{cases} (1) & a_{i+1} - a_i \geq r+s \quad \text{for all } i \quad (1 \leq i \leq m+d) \\ (2) & b_{i+1} - b_i \geq r+s \quad \text{for all } i \quad (1 \leq i \leq m) \\ (3) & b_1 \geq s \\ (4) & \sum a_i + \sum b_i = n + r(m+e)^2 + s(m+e)(m+e+1) \end{cases}$$

上, 様なる ordered pair (A, B) に対し, 関係

$$(A, B) \sim (\{r\} \cup A + (r+s), \{s\} \cup B + (r+s))$$

により生成される同値関係を考える。 $X_{n,d}^{r,s}$ を

$$X_{n,d}^{r,s} = \{(**) \text{ を満たす } (A, B) \text{ の同値類} \}$$

として定義する。 (A, B) を含む同値類を又 (A, B) で表す。

$$X_n^{r,s} = \bigcup_{\substack{d \geq 1 \\ \text{odd}}} X_{n,d}^{r,s} \quad \text{とおく.}$$

$G = \text{SP}_{2n}$ に対し, W^\wedge は partition $\alpha = (\alpha_i), \beta = (\beta_i)$

で $\sum \alpha_i + \sum \beta_i = n$ とするもの組 (α, β) により

parametrize される。今, α_i, β_j に 0 を適当に加えること

により, 或る $m \geq 0$ に対して, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{m+1}$,
 $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_m$ とするものとして良い. この時 (α, β)
 に対し, $a_i = \alpha_i + (i-1)(r+s)$, $b_i = \beta_i + (i-1)(r+s) + s$
 と置いて. $A = \{a_i\}$, $B = \{b_i\}$ を定めれば, $(A, B) \in X_{n,1}^{r,s}$
 とする. この対応により, W^\wedge は $X_{n,1}^{r,s}$ と同一視出来る.

又. $(A, B) \in X_{n,d}^{r,s}$ の時, distinguished element (A, B)
 を $d=1$, $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_m \leq a_{m+1}$ を満たすもの
 として定義する. 今 $(r, s) \neq (0, 0)$ と仮定して $X_n^{r,s}$ の
 同値関係を $(A, B), (C, D) \in X_n^{r,s}$ に対し,

$(A, B) \sim (C, D) \stackrel{\text{def}}{\iff} A \cup B = C \cup D, A \cap B = C \cap D,$
 として定義する. 但し, A, B, \dots は全て N の subset とし
 て考え, 又. $X_n^{r,s}$ の中で $(A, B), (C, D)$ は適当な代表元
 を選んでおくものとする. この同値関係に対して, 各同値類
 は唯1つの distinguished element Λ を含み, Λ の属する
 同値類 C_Λ は \mathbb{F}_2 上のベクトル空間と自然に同一視
 出来る.

1.7. 定理. $G = \text{Sp}_{2n}$ とし, $p \neq 2$ の時, $r = s = 1$,
 $p = 2$ の時, $r = s = 2$ とおく. この時, $X_n^{r,s}$ と X_G
 との間を自然な (explicit) bijection

$$\tilde{\chi} : X_n^{r,s} \xrightarrow{\sim} X_G \quad (\text{generalized Springer 対応})$$

が存在する。 $X_{n,1}^{ns} \cong W^\wedge$ のもとに $\tilde{\omega}/X_{n,1}^{ns}$ は W の Springer 対応 $\omega: W^\wedge \rightarrow X_G$ に一致する。この対応で distinguished element となる $X_{n,1}^{ns}$ の subset を S_G に対応する。この時 unipotent element u を distinguished element Λ に対応するならば (即ち, $\Lambda \leftrightarrow \rho_{u,1}$), $A_G(u)^\wedge$ は C_Λ と同一視出来る。 $(A, B) \in C_\Lambda \cap X_{n,1}^{ns}$ をこの対応で, $\phi \in A_G(u)^\wedge$, $\rho \in W^\wedge$ に対応する時, $\rho = \rho_{u,\phi}$ とする。

注意 orthogonal groups に対応して, 同様の combinatorics により, generalized Springer 対応は記述出来る。

§2. S_G と S'_G の記述

2.1. V を W の reflection 表現とする。 $S_i(V)$ を V の symmetric algebra $S(V)$ の i 次部分として得られる W -module とする。 W の既約表現 ρ に対し, ρ が $S_i(V)$ に現われる様な最小の整数 i を a_ρ とおく。 W' を W の Weyl 部分群とする時, truncated induction $i_{W'}^W$ は次の様に定義される。 $\rho' \in W'^\wedge$ に対し,

$$i_{W'}^W(\rho') = \sum_{\rho} \langle \rho', \rho \rangle_{W'} \rho.$$

但し, 和は, $a_{\rho'} = a_\rho$ となる全ての ρ を重みく。

V' を W' の reflection 表現 とし, $a = a_{\rho'}$ とおく. ρ' が $S_a(V')$ の中に重複度 1 で現われる場合には, $j_{W'}^W(\rho')$ も, 既約な W -module となり, $S_a(V)$ の中に重複度 1 で現われることが示される. 特に, S_G 及び S'_G に含まれる既約表現は, 全てこの性質を満たす事が知られている. (S'_G , 従って $p \gg 0$ の場合, S_G に対しては: 統一的に証明されるが, p が小さい場合には, case by case の議論による.)

2.2. 最初には nilpotent orbits の場合を考える. $S'_G \supset S_G$ を仮定する. $x \in \mathfrak{g}$ に対し $x = s + n$ を Jordan 分解とする. C を x の \mathfrak{g} における G -orbit とし, $H = C_G^\circ(s)$ とおく.

$X = \overline{xC}$ (\mathfrak{g} の algebraic closure) を取り,

$X_0 = X \cap \{\text{nilpotent elements}\}$ とおく. H の Weyl 群 W' を W の部分群とみれば, truncated induction $j_{W'}^W$ を j_H^G と表わす事にする. H に関する Springer 対応により $n \in \text{Lie } H$ に対して $\rho_{n,1}^H \in S'_H$ が定まる. 従って $j_H^G(\rho_{n,1}^H) \in W^\wedge$ が得られる.

2.3. 定理

(i) X_0 は既約. 従って nilpotent orbits の個数の有限性により, ある nilpotent orbit C' が存在して $X_0 = \overline{C'}$

と表わせる。

$$(ii) \quad y \in C' \text{ に対し, } \rho_{y,1} = j_H^G(\rho_{n,1}^H).$$

$$(iii) \quad G = \text{adjoint の時, } S'_G = S_G^\circ \cup \left(\bigcup_H j_H^G(S'_H) \right),$$

但し, union は \mathcal{O}_y の semi simple element s に対し $H = C_G^\circ(s)$ と表わせる様な G の proper subgroup H を全て動く。

注意 (a) (i), (ii) に対しては, 一般的に証明があるが, (iii) は case by case の check になる。

(b) H が G の parabolic subgroup の Levi subgroup の場合, (ii) の $n \in \text{Lie } H$ から $y \in \mathcal{O}_y$ を得る操作は, nilpotent orbit の induction に他ならない。しかし, p が bad の場合, H は必ずしも Levi subgroup とはならず, この場合 S'_G には S_G° 以外の元が付け加わる事になる。

2.4. 次に unipotent classes について考える。 $K = \bar{\mathbb{Q}}$ とする。

$A \subset K$ を valuation ring, \mathfrak{m} を A の maximal ideal とし, $k = A/\mathfrak{m}$ とおく。 G を A 上定義された split, reductive group scheme とし, A から K 及び k への係数拡大をそれぞれ $G(K)$, $G(k)$ とおく。

$x = su$ を $x \in G(K)$ の Jordan 分解, $C \in X$ の

$G(k)$ の共役類とする。 C は A 上定義された G の subscheme とみる。 \bar{C} は C の $G(k)$ での closure, $\bar{C}(k)$ は \bar{C} により定まる $G(k)$ の subvariety (空集合の事もあり得る) とする。 その時,

2.5. 定理

(i) $\bar{C}(k)$ は 既約。 従って (φ によって) $G(k)$ の 或る 共役類 C' の closure に一致する。

(ii) $H(k) = C_{G(k)}^\circ(s)$ とおく。 その時, $y \in C'$

に対して, $\int_{y,1}^{G(k)} = j_H^G \left(\int_{u,1}^{H(k)} \right)$, 又.

$$\int_{y,1}^{G(k)} = \int_{x,1}^{G(k)}$$

が成り立つ。 (但し, $y \in G(k)$, $x \in G(k)$ は unipotent とは限らぬ。 この場合の $\int_{y,1}^{G(k)}$, $\int_{x,1}^{G(k)}$ の notation については, 2.7. 参照)

(iii) $x = su \in G(k)$ を semi-simple element s の order が p -中である様にとる。 この時, $\bar{C}(k)$ は unipotent element のみからなり, $C' \subset \bar{C}(k)$ は $G(k)$ の unipotent class を定める。 この時,

$$S_G = \bigcup_H j_H^G(S_H)$$

但し, H は order p -中の semi simple element $s \in G(k)$ に対して, $H(k) = C_{G(k)}(s)$ として得られる $G(k)$ の全ての subgroup を動く。

注意 (i) S_G' の場合と異なり, S_G° は $s=1$ に対応して $H(k) = G(k)$ として得られる。

(ii) nilpotent の場合と同様に, p が bad の場合も, p が bad の時のみ, $H(k) \neq G(k)$ としての S_G の寄与がある。

(iii) 証明は case by case の check によるが, nilpotent の場合よりもその割りの割合は大きい。

2.6. p : bad の時, semi simple class \rightarrow unipotent class (reduction) とする例を以下に示す。

$p=2$ とする。

例 1. $G = GL_5$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \sim_{\text{conjugate in } G} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{reduction (mod 2)}} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ unipotent elt.}$$

例 2 $G = SP_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(mod 2)}]{\text{reduction}} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \parallel \gamma$$

γ は $G(k)$ の unipotent element で, G の short root に対応する元 γ であるが, これは $G(K)$ の分類には現れない。(例えば, $G(k)$ の short root に対応する元 γ は centralizer の次元が異なる.)

2.7. $x \in G$ が必ずしも unipotent である場合,

$\rho_{x,1} \in W^\wedge$ は次の標 λ に 1 を与える。 \mathcal{B} を G の Borel subgroup の全体である variety とする。 $x \in G$ に対し,

$$\mathcal{B}_x = \{ B \in \mathcal{B} \mid B \ni x \}$$

とおき, $\dim \mathcal{B}_x = d_x$ とする。 Lusztig [3] により, W は $H^*(\mathcal{B}_x, \mathbb{Q}_\ell)$ に作用する。自然な埋め込み $\mathcal{B}_x \hookrightarrow \mathcal{B}$

は W -equivariant map $f: H^{2d_x}(\mathcal{B}) \rightarrow H^{2d_x}(\mathcal{B}_x)$ を引き起こす。 f の像は既約な W -module となる。

$$\rho_{x,1} = \text{Im } f \quad \text{とおく。}$$

References

1. Borho, W. and MacPherson, R.: Représentations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les variétés de nilpotentes. C.R. Acad. Sci. Paris 292, 707-710 (1981)
2. Borho, W. and MacPherson, R.: Partial resolutions of nilpotent varieties. Asterisque 101-102, 23-74 (1983)
3. Lusztig, G.: Green polynomials and singularities of unipotent classes. Adv. in Math. 42, 169-178 (1981)
4. Lusztig, G.: Intersection cohomology complexes on a reductive group I, II. preprint.
5. Lusztig, G. and Spaltenstein, N.: 準備中
6. Spaltenstein, N. Nilpotent orbits of exceptional Lie algebras over algebraically closed field of bad characteristic. preprint.
7. Spaltenstein, N.: On the generalized Springer correspondence for exceptional groups. preprint.
8. Springer, T.A.: Trigonometric sums, Green functions of finite groups and representations of Weyl groups. Inventiones Math. 36, 173-207 (1976)