数理解析研究所講究録
512巻 1984年 58-68

旗多様体上のある種の holonomic system の characteristic cycle と Weyl 群の表現について. II

東北大理　谷崎俊之 (Toshiyuki Tanisaki)

講演で話した内容は [[T]] に書いてしまったので，本稿は [[T]] の主定理の証明及びその他の注意について述べる。記号及び参考文献は [[T]] のものをそのまま用い，同じ事をもう一度説明する事はしない。新たな参考文献は，混乱をさけるために2重のかぎかっこ [[ ]] を付けて最後にまとめた。

§1. 主定理の証明

$G_{\mathbb{R}}$（あるいは同じ事だが K）が連結でない場合には trivial な modification をすればよいのだが，簡単のために K は連結であると仮定する。

$\boxed{1.1}$ [[T; Prop 1.1]] について

Weyl 群 W の simple reflection s を1つ固定する。s に対応する rank 1 の parabolic 部分群を P_s $(\supset B)$ として $\mathcal{P}_s = G/P_s$ とおく。また $\mathcal{B} \xrightarrow{\pi_s} \mathcal{P}_s$ を自然な射影とする。さらに次の図により自然な写像 ρ_s, ϖ_s, φ_s を定める。

$$\begin{array}{ccc}
T^*\mathcal{P}_s \times_{\mathcal{P}_s} \mathcal{B} & \overset{\rho_s}{\hookrightarrow} & T^*\mathcal{B} \\
\varpi_s \downarrow & & \\
T^*\mathcal{P}_s & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\mathcal{N}\times\mathcal{B} \supset T^*\mathcal{B} \\
\varphi_s \downarrow \\
\mathcal{N}\times\mathcal{P} \supset T^*\mathcal{P}
\end{array}$$

ここで $\mathcal{N} = \{\text{nilpotent element in } \mathfrak{g}\}$ である。

$$\left(\begin{array}{l}
\mathcal{C} = \{\text{K-orbit on } \mathcal{B}\} \\
\mathcal{C}^s_h = \{O \in \mathcal{C} \mid O \text{ は s-horizontal}\} \\
\mathcal{C}^s_v = \{O \in \mathcal{C} \mid O \text{ は s-vertical}\}
\end{array}\right.$$

とおく。

$O \in \mathcal{C}$ に対して $Z_O^{(\mathfrak{g},K)} = \overline{T^*_O\mathcal{B}}$, $Z^{(\mathfrak{g},K)} = \bigcup_{O\in\mathcal{C}} \overline{T^*_O\mathcal{B}}$ で,

$$H_{2d}(Z^{(\mathfrak{g},K)};\mathbb{Q}) = \bigoplus_{O\in\mathcal{C}} \mathbb{Q}[Z_O^{(\mathfrak{g},K)}]$$

であった。

$O \in \mathcal{C}$ に対して $O_s = \pi_s(O)$ とおくと，$\mathcal{B}$ 上の K-orbit と $\mathcal{P}_s$ 上の K-orbit の間に次の関係が成立する事は容易にわかる。

「**Lemma 1**

(i) $\mathcal{P}_s = \bigsqcup_{O\in\mathcal{C}^s_v} O_s$

(ii) $\rho_s^{-1}(Z^{(\mathfrak{g},K)}) = \bigcup_{O\in\mathcal{C}^s_v} Z_O^{(\mathfrak{g},K)}$ （既約分解）

(iii) $\varpi_s(\rho_s^{-1}(Z^{(\mathfrak{g},K)})) = \bigcup_{O\in\mathcal{C}^s_v} \overline{T^*_{O_s}\mathcal{P}_s}$ （ 〃 ）

(iv) $O \in \mathcal{C}^s_v \Rightarrow \varphi(Z_O^{(\mathfrak{g},K)}) = \overline{T^*_{O_s}\mathcal{P}_s}$ 」

このLemma 1を用いると[[T; Prop 1.1]]はHotta [H]の論法をそのままたどる事により得られる。これはroutine workなので省略する。

$\boxed{1.2}$ 主定理の証明

主定理は次のとおり。

「**Main theorem**

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{M}(\mathfrak{g},K)) & \xrightarrow{\underline{Ch}} & H_{2d}(Z^{(\mathfrak{g},K)}) = \bigoplus_{O\in\mathcal{C}} \mathbb{Q}\,[\overline{T_O^*B}] \\ \Psi & & \Psi \\ [m] & \longmapsto & \underline{Ch}(m) \end{array}$$

はW-equivariant。」

勝手に固定したsimple reflection s について

$$\underline{Ch}(s\cdot[m]) = s\cdot\underline{Ch}(m) \quad (\forall m\in\mathcal{M}(\mathfrak{g},K))$$

を示せばよい。

[KT; Th 7]により、$O\in\mathcal{C}$, $O'\in\mathcal{C}_v^s$ に対して $m(O',O)\in\mathbb{Z}$ が定まって、

$$\left(\begin{array}{l} \underline{Ch}(m) = \sum_{O\in\mathcal{C}} m_O[\overline{T_O^*B}] \\ \Longrightarrow \underline{Ch}(\int_{\pi_s} m) = \sum_{O\in\mathcal{C}} m_O\Big(\sum_{O'\in\mathcal{C}_v^s} m(O',O)\,[\overline{T_{O_s}^*P_s}]\Big) \end{array}\right.$$

さらに

$$O\in\mathcal{C}_R^s \Longrightarrow \sum_{O'\in\mathcal{C}_v^s} m(O',O)\,[\overline{T_{O_s}^*P_s}] = \varpi_{s*}\,\wp_s^{\,*}([\overline{T_O^*B}])$$

となる。

よって

$$\underline{Ch}(\mathbb{L}\pi_s^{+}\int_{\pi_s}\mathcal{M}) = \varpi_s^{+}(\underline{Ch}(\int_{\pi_s}\mathcal{M}))$$
$$= \sum_{O\in \mathcal{C}_v^s} m_O \Big(\sum_{O'\in \mathcal{C}_v^s} m(O',O)\,[\overrightarrow{T_{O'}^{*}\mathcal{B}}]\Big)。$$

従って [[T1; Prop 10]] により

$$\underline{Ch}(s\cdot[\mathcal{M}])$$
$$= \sum_{O\in\mathcal{C}} m_O \Big([\overrightarrow{T_O^{*}\mathcal{B}}] + \sum_{O'\in \mathcal{C}_v^s} m(O',O)\,[\overrightarrow{T_{O'}^{*}\mathcal{B}}]\Big)$$
$$= \sum_{O\in \mathcal{C}_v^s} m_O \Big([\overrightarrow{T_O^{*}\mathcal{B}}] + \sum_{O'\in \mathcal{C}_v^s} m(O',O)\,[\overrightarrow{T_{O'}^{*}\mathcal{B}}]\Big)$$
$$+ \sum_{O\in \mathcal{C}_R^s} m_O \Big([\overrightarrow{T_O^{*}\mathcal{B}}] + \varpi_s^{+}\varpi_{s+}\,\rho_s^{+}([\overrightarrow{T_O^{*}\mathcal{B}}])\Big)。$$

一方 [[T1; Prop 11]] により

$$s\cdot\underline{Ch}(\mathcal{M})$$
$$= \sum_{O\in \mathcal{C}_v^s} m_O \big(-[\overrightarrow{T_O^{*}\mathcal{B}}]\big)$$
$$+ \sum_{O\in \mathcal{C}_R^s} m_O \Big([\overrightarrow{T_O^{*}\mathcal{B}}] + \varpi_s^{+}\varpi_{s+}\,\rho_s^{+}([\overrightarrow{T_O^{*}\mathcal{B}}])\Big)。$$

よって

$$(\ast)\ \big[\,O\in \mathcal{C}_v^s \Longrightarrow m(O,O)=-2,\ m(O',O)=0\ (O'\neq O)\,\big]$$

を示せばよい。これを $\dim O$ に関する induction で示す。$O_0\in \mathcal{C}_v^s$ として、$O\in \mathcal{C}_v^s$, $\dim O<\dim O_0$ なら $(\ast)$ が成立していると仮定する。

一般に $O\in \mathcal{C}_v^s$ について $\hat{O}=\pi_s^{-1}(\pi_s(O))$ とおく。$\hat{K}=\langle K,P\rangle$ とおくとき，$\mathcal{B}$ の $\hat{K}$-orbit への分解は $\mathcal{B}=\bigsqcup_{O\in \mathcal{C}_v^s}\hat{O}$ により与え

あり、しかもこれは $\mathbb{B}$ の Whitney stratification である。

$\mathcal{M}_0 \in \mathcal{M}(\mathcal{G}, K)$ を $DR(\mathcal{M}_0) = \mathbb{C}_{\hat{O}_0}[-\operatorname{codim}\hat{O}_0]$ により定めると、$\mathcal{M}_0|_{\mathbb{B}-\partial\hat{O}_0} \cong \mathcal{H}^{\operatorname{codim}\hat{O}_0}_{[\hat{O}_0]}(\mathcal{O}_{\mathbb{B}-\partial\hat{O}_0})$ なので

$$\underline{Ch}(\mathcal{M}_0) = [\overline{T^*_{\hat{O}_0}\mathbb{B}}] + \sum_{\substack{O \in \mathcal{O}_v^s \\ \dim\hat{O} < \dim\hat{O}_0}} m_O [\overline{T^*_{\hat{O}}\mathbb{B}}] \qquad (\exists m_O \in \mathbb{Z})$$

$$= [\overline{T^*_{O_0}\mathbb{B}}] + \sum_{\substack{O \in \mathcal{O}_v^s \\ \dim O < \dim O_0}} m_O [\overline{T^*_{O}\mathbb{B}}]$$

と書ける。よって induction の仮定により

$$\underline{Ch}(\mathbb{L}\pi_s^* \textstyle\int_{\pi_s} \mathcal{M}_0) = -2\, \underline{Ch}(\mathcal{M}_0)$$

を示せばよい。

$$DR(\mathbb{L}\pi_s^* \textstyle\int_{\pi_s} \mathcal{M}_0)$$

$$= \pi_s^{-1}(\mathbb{R}\pi_{s*}(DR(\mathcal{M}_0)))[1]$$

$$= \pi_s^{-1}(\mathbb{R}\pi_{s*}(\mathbb{C}_{\hat{O}_0}))[-\operatorname{codim} O_0 + 1]$$

π_s は $\mathbb{P}^1$-bundle なので三角形

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ \mathbb{C}[-2] \arrow[rr] & & \mathbb{R}\Gamma(\mathbb{P}^1;\mathbb{C}) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

により

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}_{\hat{O}_0} \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\ \mathbb{C}_{\hat{O}_0}[-2] \arrow[rr] & & \pi_s^{-1}(\mathbb{R}\pi_{s*}(\mathbb{C}_{\hat{O}_0})) \arrow[ul] \end{tikzcd} 。$$

よって

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}_0[1] \arrow[dl, "{[1]}"'] & \\
\mathcal{M}_0[-1] \arrow[rr] & & \mathbb{I}\pi_s^+ \int_{\pi_s} \mathcal{M}_0 \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$
。

従って

$$\underline{Ch}(\mathbb{I}\pi_s^+ \textstyle\int_{\pi_s} \mathcal{M}_0) = \underline{Ch}(\mathcal{M}_0[1]) + \underline{Ch}(\mathcal{M}_0[-1])$$
$$= -2\,\underline{Ch}(\mathcal{M}_0) \qquad \text{q.e.d.}$$

§2. symmetric pair の nilpotent class

$\mathcal{N} = \{\text{nilpotent element in } \mathfrak{g}\}$, $\mathcal{N}(\mathfrak{p}) = \mathcal{N} \cap \mathfrak{p}$ とする。$\mathcal{N}$ の G-共役類の場合のように $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ の K-共役類について、その分類等の表があれば便利である。Procesi 氏に聞くと、専門家は大てい Kac-Vinberg の方法 [[V]] に基く自家用の表は持っているとの事であったが、特殊な場合（例えば Sekiguchi [[S]]）を除いてまとまった分類表は公刊されていないようである。

ここでは、ある種の特別な場合には容易に分類ができる事を示す。

$\boxed{2.1}$ $h, e, f \in \mathfrak{g}$ が関係式

$$[h, e] = 2e,\quad [h, f] = -2f,\quad [e, f] = h$$

をみたすとき $\{h, e, f\}$ を S-triple と呼ぶ。また S-triple $\{h, e, f\}$ で $h \in \mathfrak{k}$, $e, f \in \mathfrak{p}$ なるものを normal S-triple と呼ぶ。

「<u>Proposition 1</u>

(i) (Jacobson-Morozov の lemma, see [[K]])

$$\begin{array}{ccc} \{S\text{-triple}\}/\underset{G}{\sim} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \mathcal{N}/G \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \{h,e,f\} & \longleftrightarrow & e \end{array}$$

また S-triples $\{h,e,f\}$, $\{h',e',f'\}$ について

$$\{h,e,f\} \underset{G}{\sim} \{h',e',f'\} \iff h \underset{G}{\sim} h'$$

(ii) (Kostant-Rallis [[KR]])

$$\begin{array}{ccc} \{\text{normal } S\text{-triple}\}/\underset{K}{\sim} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \mathcal{N}(\mathfrak{p})/K \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \{h,e,f\} & \longleftrightarrow & e \end{array}$$

また normal S-triples $\{h,e,f\}$, $\{h',e',f'\}$ について

$$\{h,e,f\} \underset{K}{\sim} \{h',e',f'\} \iff h \underset{K}{\sim} h'$$ 」

$\boxed{2.2}$ さて Sekiguchi [[S]] 中に次の命題が述べられている。

「<u>Proposition 2</u> S-triple $\{h,e,f\}$ について次は同値.

(i) $\{h,e,f\}$ は normal S-triple と G-共役

(ii) h は $\mathfrak{p}$ の元に G-共役 」

$\mathfrak{g}_0$ を対応する $\mathfrak{g}$ の real form とする(すなわち，$\mathfrak{g}_0$ の Cartan 分解を $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{k}_0\oplus\mathfrak{p}_0$ とするとき，$\mathfrak{k}, \mathfrak{p}$ は $\mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0$ の複素化)。

このとき Prop 2 を言い換えて次を得る。

「Corollary　$e\in\mathcal{N}$ とするとき次は同値

(i)　e は $\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ の元にG共役。

(ii)　e に対応する weighted Dynkin 図形において頂点 i に書きこまれた数字を n_i ($=0$ or 1 or 2) とする。このとき $\mathfrak{g}_0$ の Satake 図形において

$$\underset{i}{\circ} \longleftrightarrow \underset{i'}{\circ} \Rightarrow n_i = n_{i'} \quad , \quad \underset{i}{\bullet} \Rightarrow n_i = 0$$ 」

Prop. 2 は [[S]] では Antonyan の定理であると書いてあって、証明は $\mathfrak{g}_0$ が normal real form の場合にのみ与えてある。一般の場合の証明はどこにもないようなので、ここで述べておく。[[S]] における normal real form の場合の証明をたどると、要するに次の lemma を示せばよい事がわかるので、これを示す。

「Lemma 2　$\{h,e,f\}$ が S-triple で、h が $\mathfrak{p}$ の元に G-共役ならば、$\{h,e,f\}$ とG-共役な S-triple $\{h',e',f'\}$ で $h',e',f'\in\mathfrak{g}_0$ なるものがある。」

(証明) $\mathfrak{a}_0$ を $\mathfrak{p}_0$ の max. abelian subspace, $\mathfrak{a}$ をその複素化 ($\subset\mathfrak{p}$) とすると、$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$ の max. abelian subspace である。よって $h\in\mathfrak{a}$ としてよい。$\mathfrak{sl}(2)$ の表現論により $\mathrm{ad}\,h$ の固有値は全て実数である。よって $h\in\mathfrak{a}_0\subset\mathfrak{g}_0$。

そこで $\mathrm{ad}\,h$ に関する固有空間分解を

$$\left(\begin{aligned} \mathfrak{g}_0 &= \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}\,h, i) \\ \mathfrak{g} &= \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}(\mathrm{ad}\,h, i)\end{aligned}\right. \qquad (\mathfrak{g}(\mathrm{ad}\,h,i) = \mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}\,h,i)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C})$$

とする。

$V=\{x\in\mathfrak{g}(\mathrm{ad}\,h,2) \mid \exists y\in\mathfrak{g}$ s.t. $\{h,x,y\}$ が S-triple$\}$

とおくと，V は $\mathfrak{g}(\mathrm{ad}\,h,2)$ の non-empty Zariski open subset である（Kostant [[K]]）。$\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}\,h,2)$ は $\mathfrak{g}(\mathrm{ad}\,h,2)$ 中で Zariski dense なので $V\cap\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}\,h,2)\neq\phi$。$e'\in\mathfrak{g}_0(\mathrm{ad}\,h,2)\cap V$ とすると，$\exists\tilde{f}\in\mathfrak{g}$ について $\{h,e',\tilde{f}\}$ は S-triple になる。$\tilde{f}=f'+\sqrt{-1}f''$ $(f',f''\in\mathfrak{g}_0)$ とすると $\{h,e',f'\}$ も S-triple である事が容易にわかる。

q.e.d.

$\boxed{2.3}$ 以上より自然な写像

$$\mathcal{N}(\mathfrak{p})/K \xrightarrow{\Phi} \mathcal{N}/G$$

の像は簡単に記述できる事がわかった。しかし一般には Φ は injective でないので，まだ分類が出来たとは言えない。ただし，Φ が injective になる事がすぐわかる場合がある。それが次の場合である。

「Prop. 3 $\mathfrak{g}_0$ の CSA（Cartan subalgebra）が共役を除いて unique ならば Φ は injective」

（証明）筆者の修士論文において，上の仮定のもとで次の事が示されている。

$$(*)\left[\begin{array}{l} x, y \in \mathfrak{k} \text{ について} \\ \quad x \underset{K}{\sim} y \Longleftrightarrow x \underset{G}{\sim} y \end{array}\right]$$

よって，$e, e' \in \mathcal{N}(\mathfrak{p})$ に対して normal S-triple $\{h, e, f\}, \{h', e', f'\}$ をとるとき

$$\begin{aligned} e \underset{K}{\sim} e' &\Longleftrightarrow h \underset{K}{\sim} h' && (\text{Prop 1 (ii)}) \\ &\Longleftrightarrow h \underset{G}{\sim} h' && ((*)) \\ &\Longleftrightarrow e \underset{G}{\sim} e' && (\text{Prop 1 (i)}) \end{aligned}$$

となり主張が示される。今の場合 (*) は x, y が semisimple でしかも $\mathrm{ad}\,x$, $\mathrm{ad}\,y$ の固有値は実数なときに示せばよいので易しい。この場合に (*) を示そう。

$\mathfrak{k}$ の CSA $\mathfrak{h}^1$ と $\mathfrak{h}^1$ を含む $\mathfrak{g}$ の CSA $\mathfrak{h}$ をとる。さらに $\mathfrak{h}^1$ [resp. $\mathfrak{h}$] の元 h で $\mathrm{ad}\,h$ の固有値が全て実数になるもの全体を $\mathfrak{h}^1_{\mathbb{R}}$ [resp. $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$] と書く。このとき $x, y \in \mathfrak{h}^1_{\mathbb{R}}$ について $x \underset{W(\mathfrak{k})}{\sim} y \Longleftrightarrow x \underset{W}{\sim} y$ を示せばよい。$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の root 系を Δ とすると，仮定により $(\mathfrak{k}, \mathfrak{h}^1)$ の root 系は $\{\alpha|_{\mathfrak{h}^1} \mid \alpha \in \Delta\}$ により与えられる事がわかる。よって $\mathfrak{h}^1_{\mathbb{R}}$ の Weyl chamber は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ の Weyl chamber と $\mathfrak{h}^1_{\mathbb{R}}$ との intersection である。よって明らか。

q.e.d.

$\boxed{2.4}$ [[T, 5.2]] には $\mathrm{Ind}_{W(F_4)}^{W(E_6)}(1)$ の分解式が書いてないが，上の事からこれもわかる。$\mathfrak{g} = E_6$, $\mathfrak{k} = F_4$ のとき，

$\mathcal{N}(\mathfrak{p})$ は3つの共役類にわかれて、その weighted Dynkin 図形は $\left[\begin{smallmatrix} & & 0 & & \\ 2&0&0&0&2\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} & & 0 & & \\ 1&0&0&0&1\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} & & 0 & & \\ 0&0&0&0&0\end{smallmatrix}\right]$ である。よって E_6 の Springer 対応から

$$\mathrm{Ind}_{W(F_4)}^{W(E_6)}(1) = 1_p \oplus 20_p \oplus 24_p$$

がわかる。もっとも、$W(F_4)$ と $W(E_6)$ の character table がわかっているので、直接計算できるはずの事ではあるし、これがわかったからと言ってどうという事もないが、[[T]] を書いたときに、この場合だけわからず気になっていたのでここに記しておく。

参考文献

[[T]] 谷崎俊之：旗多様体上のある種の holonomic system の characteristic cycle と Weyl 群の表現について；数研講究録「力学系とリー群の表現」(1983/6) 掲載予定 (Kostant が来たときの symposium)

[[V]] E.B. Vinberg: On the classification of the nilpotent elements of graded Lie algebras; Soviet Math. Dokl 16 (6) 1517–1520 (1975).

[[S]] J. Sekiguchi: The nilpotent subvariety of the vector space associated to a symmetric pair; preprint (1983).

[[K]] B. Kostant: The three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group; Amer. J. Math 81 973–1032 (1959).

[[KR]] B. Kostant and S. Rallis: Orbits and representations associated with symmetric spaces; Amer. J. Math. 93 753–809 (1971).