数理解析研究所講究録
512巻 1984年 48-57

可約線型代数群の有限個の軌道分解をもつ表現の分類

筑波大 数学系　　木村 達雄

問題　$\rho : G \to GL(V)$ を $\mathbb{C}$ 上の可約(*reductive*)線型代数群 G の有限次有理表現とする。V は G-軌道の *disjoint union* に分解する：$V = \bigsqcup_x \rho(G)x$, $\rho(G)x = \{\rho(g)x \,;\, g \in G\}$.
これが，有限個になるような (G, ρ, V) の組を すべて求めよ。

考察　群 G が可約ゆえ V は既約表現の直和に分解する、$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell$, このとき，$G = GL(1)^s \times [G, G]$ $(s \leq \ell)$ で，$GL(1)^s$ は $V_1, \cdots, V_\ell$ のスカラー倍として適当に作用する，としてよい。このとき，有限個の軌道をもてば，群を大きくしてもそうだから，以下 $G = GL(1)^\ell \times [G, G]$，但し $GL(1)^\ell$ は各 V_i に独立に スカラー倍として作用する，という場合を考えよう。　実際には，スカラー倍が独立でなくても有限個であり得るが，少なくとも，$\rho : G \to GL(V)$ が有限個の軌道をもつような $[G, G]$ と $\rho|[G, G]$ は完全に決定できることになる。

以下，断わらなくても常に各既約成分にスカラー倍が独立に作用しているとする。

$(G\times G',\ \rho\otimes\rho',\ V\otimes V')$ を単に $\overset{G}{\circ}\overset{\rho\qquad\rho'}{\text{————}}\overset{G'}{\circ}$ と表わす。
特に $G=GL(n), SL(n)$ のときは，単に $\overset{n}{\circ}\overset{\rho\qquad\rho'}{\text{————}}\overset{G'}{\circ}$ と書く。

更に ρ が standard な表現 Λ_1 (=□：Young図形で．即ち $GL(n)$ の $\mathbb{C}^n$ への行列としての作用）のとき，$\overset{n}{\circ}\overset{\qquad\rho'}{\text{————}}\overset{G'}{\circ}$ と書く。

さて，ρ = 既約の場合と $[G,G]$ = 単純群の場合には既に分類が完成している。これらの結果と，次の定理が一般の場合の分類を可能にするのである。

<u>基本定理1</u>．$\overset{H}{\circ}\overset{\rho\qquad}{\text{————}}\overset{m}{\circ}$ が有限軌道に分解し $\overset{1}{\circ}\overset{\rho}{\text{——}}\overset{H}{\circ}\overset{\rho}{\text{——}}\overset{1}{\circ}$ が，無限個の軌道をもつとする。もし $\overset{H}{\circ}\overset{\rho\qquad}{\text{———}}\overset{m}{\circ}\overset{\tau}{\text{———}}\circ\text{—}\cdots\text{—}\circ\overset{\sigma}{\text{——}}\overset{G}{\circ}$ が有限個の軌道をもつならば，（τ は既約で，）以下のいずれかである。

(1) $\overset{H}{\circ}\overset{\rho}{\text{———}}\overset{m}{\circ}\text{———}\circ\text{———}\cdots\text{———}\circ$

(2) $\overset{H}{\circ}\overset{\rho}{\text{———}}\overset{m}{\circ}\text{———}\circ\text{———}\cdots\text{———}\circ\text{———}\overset{Sp(n)}{\circ}$

(3) $\overset{H}{\circ}\overset{\rho}{\text{———}}\overset{m}{\circ}\text{———}\circ\text{———}\cdots\text{———}\circ\text{———}\overset{n}{\circ}\overset{日}{\text{———}}\overset{1}{\circ}$

(4) $\overset{H}{\circ}\overset{\rho}{\text{———}}\overset{m}{\circ}\text{———}\circ\text{———}\cdots\text{———}\circ\text{———}\overset{2}{\circ}\text{———}\overset{Sp(n)}{\circ}\text{———}\overset{1}{\circ}$

（但し $\circ\text{—}\circ\text{—}\cdots\text{—}\circ$ は $\overset{n_1}{\circ}\text{—}\overset{n_2}{\circ}\text{—}\cdots\text{—}\overset{n_k}{\circ}$，$\forall n_j$ の略記号）

特に $m=2$ で，$\overset{H}{\circ}\overset{\rho}{\text{———}}\overset{2}{\circ}\text{———}\overset{1}{\circ}$ が有限軌道分解をもつならば (1)～(4) は実際，有限個の軌道に分解する。

今，(G,ρ,V) が $\rho=\rho_1\oplus\cdots\oplus\rho_l$，$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_l$ と既約表現に分解するとき，(G,ρ_i,V_i) $(i=1,\cdots,l)$ を (G,ρ,V) の

既約成分という事にする。 以下有限個の軌道に分解する空間をF.P.（Finite Prehomogeneous Vector Space の略，有限個の軌道に分解すれば，概均質ベクトル空間であるから，こういう）と言うことにする。この基本定理により，既約成分が $(GL(n)\times GL(m), \square\otimes\square, V(n)\otimes V(m))$，$(Sp(n)\times GL(m), \Lambda_1\otimes\square, V(2n)\otimes V(m))$，$(GL(n), \boxminus, V(\frac{1}{2}n(n-1)))$ 以外の既約F.P.を含むようなF.P.は本質的に定まって（制限されて）しまうのである。

定理2.（V.G.Kac, T.Kimura） 既約F.P.は以下の通り．

（I） $(SL(n)\times GL(m), \Lambda_1\otimes\Lambda_1, V(n)\otimes V(m))$

$(Sp(n)\times GL(m), \Lambda_1\otimes\Lambda_1, V(2n)\otimes V(m))$

$(GL(n), \Lambda_2, V(\frac{1}{2}n(n-1)))$

（II） $(GL(2), 3\Lambda_1, V(4))$，$(GL(8), \Lambda_3, V(56))$

$(GL(1)\times E_6, \Lambda_1, V(27))$，$(GL(1)\times E_7, \Lambda_6, V(56))$

$(GL(1)\times G_2, \Lambda_2, V(7))$

$(GL(1)\times SO(n), \Lambda_1, V(n))$ $(n=9, 11, \text{or } n\geq 13)$

$(GL(1)\times Spin(n)$, (*)スピン表現) $(n=9, 11, 14)$

$(SL(3)\times GL(2), 2\Lambda_1\otimes\Lambda_1, V(6)\otimes V(2))$

$(E_6\times GL(2), \Lambda_1\otimes\Lambda_1, V(27)\otimes V(2))$

$(SL(5)\times GL(4), \Lambda_2\otimes\Lambda_1, V(10)\otimes V(4))$

（III） $(GL(1)\times Sp(2), \Lambda_2, V(5))\cong(GL(1)\times SO(5), \Lambda_1, V(5))$

$(GL(1)\times Sp(3),\ \Lambda_3,\ V(14))$

$(GL(1)\times SO(n),\ \Lambda_1,\ V(n))$ $(n=7,10,12)$

$(GL(1)\times Spin(12)$, 半スピン表現, $V(64))$

(IV) $(GL(n),\ 2\Lambda_1,\ V(\frac{1}{2}n(n+1)))$

$(SO(n)\times GL(m),\ \Lambda_1\otimes\Lambda_1,\ V(n)\otimes V(m))$ $(n=9$ or $n\geqq 11,\ m\geqq 2)$

$(G_2\times GL(2),\ \Lambda_2\otimes\Lambda_1,\ V(7)\otimes V(2))$

$(Spin(7)\times GL(2)$, スピン表現$\otimes\Lambda_1$, $V(8)\otimes V(2))$

$(Spin(10)\times GL(2)$, 半スピン表現$\otimes\Lambda_1$, $V(16)\otimes V(2))$

$(SL(5)\times GL(3),\ \Lambda_2\otimes\Lambda_1,\ V(10)\otimes V(3))$

$(Spin(10)\times GL(3)$, 半スピン表現$\otimes\Lambda_1$, $V(16)\otimes V(3))$

$(SL(n)\times SL(3)\times GL(2),\ \Lambda_1\otimes\Lambda_1\otimes\Lambda_1,\ V(n)\otimes V(3)\otimes V(2))$
$(n\geqq 3)$

(V) $(SL(6)\times GL(2),\ \Lambda_2\otimes\Lambda_1,\ V(15)\otimes V(2))$

$(SL(7)\times GL(2),\ \Lambda_2\otimes\Lambda_1,\ V(21)\otimes V(2))$

$(GL(6),\ \Lambda_3,\ V(20))$, $(GL(7),\ \Lambda_3,\ V(35))$

$(Sp(n)\times GL(2),\ \Lambda_1\otimes 2\Lambda_1,\ V(2n)\otimes V(3))$

$(SO(3)\times GL(m),\ \Lambda_1\otimes\Lambda_1,\ V(3)\otimes V(m))$ $(m\geqq 2)$

$(GL(1)\times Spin(10)$, 半スピン表現, $V(16))$

$(SO(10)\times GL(m),\ \Lambda_1\otimes\Lambda_1,\ V(10)\otimes V(m))$ $(m\geqq 2)$

$(GL(1)\times Spin(7)$, スピン表現, $V(8))$

$(SO(7)\times GL(m),\ \Lambda_1\otimes\Lambda_1,\ V(7)\otimes V(m))$ $(m\geqq 2)$

$(SO(5)\times GL(m),\ \Lambda_1\otimes\Lambda_1,\ V(5)\otimes V(m))\ \ (m\geqq 2)$

$(GL(1)\times SO(8),\ \Lambda_1,\ V(8))$ ($\cong$($GL(1)\times Spin(8)$, 半スピン表現, $V(8)$))

$(SO(8)\times GL(m),\ \Lambda_1\otimes\Lambda_1,\ V(8)\otimes V(m))\ \ (m\geqq 2)$

$(SL(5)\times GL(2),\ \Lambda_2\otimes\Lambda_1,\ V(10)\otimes V(2))$

$(SO(6)\times GL(m),\ \Lambda_1\otimes\Lambda_1,\ V(6)\otimes V(m))\ \ (m\geqq 2)$

$(SL(2)\times SL(2)\times GL(m),\ \Lambda_1\otimes\Lambda_1\otimes\Lambda_1,\ V(2)\otimes V(2)\otimes V(m))$

$(\cong (SO(4)\times GL(m),\ \Lambda_1\otimes\Lambda_1,\ V(4)\otimes V(m)))\ \ (m\geqq 2)$

($Spin(7)\times GL(3)$, スピン表現$\otimes\Lambda_1$, $V(8)\otimes V(3)$)

定理3 (T. Kimura) スカラー倍との合成でF.P.になる単純代数群の表現は，以下に限る。(但し既約でない場合)

$SL(n)$; □+□, □+□+□, □□+□,
日+□, 日+□+□,
目+□ (但し $n=6,7$), 及びそのdualたち.

$Sp(n)$; □+□, □+□+□
日+□ ($n=2$), 目+□ ($n=3$)

$Spin(7)$; スピン表現＋ベクトル表現

$Spin(n)$; 半スピン表現＋ベクトル表現
($n=8,10,12$)

(□$=\Lambda_1$, 日$=\Lambda_2$, 目$=\Lambda_3$, □□$=2\Lambda_1$)

有限軌道をもつ(即ち F.P.)空間に関する一般的な結果を列挙しよう。

Prop. 1. $\rho: H \to GL(V)$ を任意の群 H の有限次元表現とする。$(H \times GL(n), \rho \otimes \Lambda_1, V \otimes V(n))$ が F.P. ならば, $1 \leq {}^\forall k \leq n$ に対し, $(H \times GL(k), \rho \otimes \Lambda_1, V \otimes V(k))$ も F.P.

Prop. 2. 代数群 G の連結成分を G_0 とする。そのとき,

$$(G, \rho, V) \text{ F.P.} \iff (G_0, \rho|G_0, V) \text{ F.P.}$$

Prop. 3. $\rho: H \to GL(V)$ の dual 表現を $\rho^*: H \to GL(V^*)$ とすると, (H, ρ, V) F.P. $\iff$ (H, ρ^*, V^*) F.P.

しかも, orbits はこのとき1対1に対応する。

特に $(G, \rho_1^{(*)} \oplus \cdots \oplus \rho_l^{(*)}, V_1^{(*)} \oplus \cdots \oplus V_l^{(*)})$ F.P. 但し $\rho_i^{(*)} = \rho_i$ 又は ρ_i^*

$\iff (G, \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_l, V_1 \oplus \cdots \oplus V_l)$ F.P.

Prop. 4. (G_1, ρ_1, V_1) と (G_2, ρ_2, V_2) の直和を

$(G_1, \rho_1, V_1) \oplus (G_2, \rho_2, V_2) = (G_1 \times G_2, \rho_1 \otimes 1 + 1 \otimes \rho_2, V_1 \oplus V_2)$ で定義する。

このとき,

$$\left.\begin{array}{l} (G_1, \rho_1, V_1) \text{ F.P.} \\ (G_2, \rho_2, V_2) \text{ F.P.} \end{array}\right\} \iff (G_1, \rho_1, V_1) \oplus (G_2, \rho_2, V_2) \text{ F.P.}$$

Prop. 5. 群 G が reductive とする。自然数 m に対し, $m_1 = l$ ($m = 2l$, または $m = 2l+1$ のとき) とする。

$(G \times GL(m_1), \sigma \otimes 1 + \rho \otimes \Lambda_1, V + V(m) \otimes V(m_1))$ F.P.

$\Rightarrow (G \times GL(n), \sigma \otimes 1 + \rho \otimes \Lambda_1, V + V(m) \otimes V(n))$ F.P. for all $n \geq 1$.

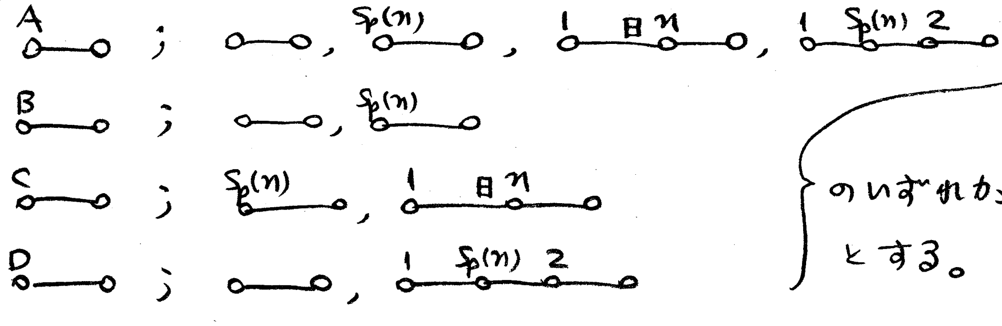
以上で材料はそろった。あとは，これ等を使ってやるだけであるが，Prop.4 により indecomposable なものだけを考えればよい事がわかる。

例えば，Gを単純群として，$(GL(1)\times G, \rho, V)$を既約成分にもつ non-irreducible indecomposable F.P. が存在したとすれば，それは $(GL(1)^2\times G\times H,\ \rho\otimes 1+\rho'\otimes\sigma,\ V+V'\otimes W)$ の形を含む。indecomposable ゆえ $\rho'\neq 1$。今 $n=\dim W\ (\in \deg\sigma)$ とおけば，群を大きくしても F.P. ゆえ，$(GL(1)\times G\times GL(n),\ \rho\otimes 1+\rho'\otimes\square,\ V+V'\otimes V(n))$ $(W=V(n))$ も F.P. 従って，Prop 1. により $n\to 1$ として，$(GL(1)^2\times G,\ \rho\oplus\rho',\ V\oplus V')$ $(\rho,\rho'\neq 1)$ F.P. となる。このようなものは，定理3でわかっている。従って，この事より，定理2の(II)にある単純既約F.P.を既約成分にもつ non-irred. indecomp. F.P. は存在しないことが，わかる。

このような具合に分類を進めていくのである。

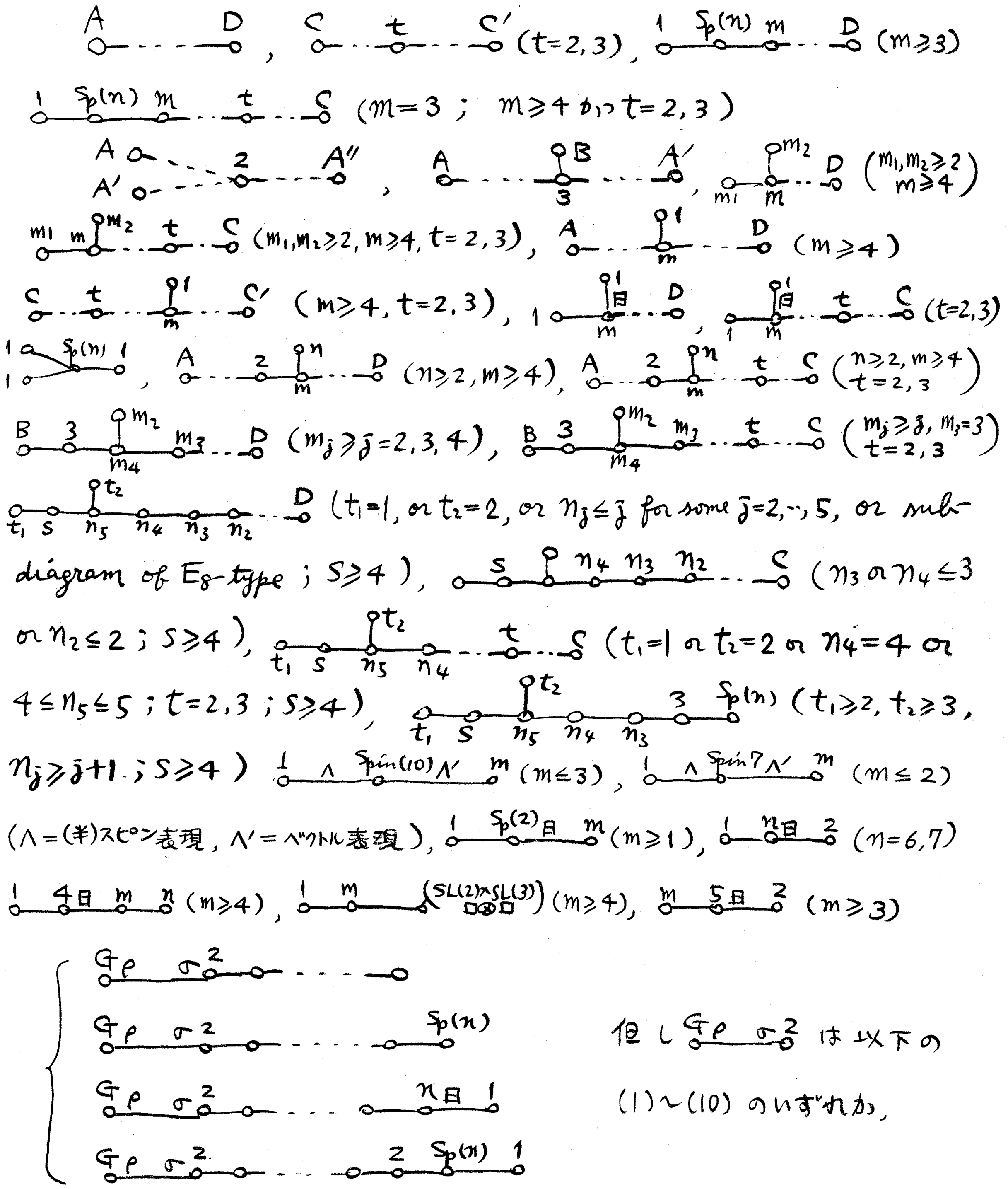
以下に結果を記そう。定理2と定理3に出てくるF.P.以外の indecomposable F.P. は，次のものに限る。

記号，



のいずれか，とする。

そのとき，



(1) ($G_2 \times SL(2)$, $\Lambda_2 \otimes \square$, $V(7) \otimes V(2)$)

(2) ($Spin(n) \times SL(2)$, (半)スピン表現$\otimes \square$) ($n = 7, 10$)

(3) ($Sp(m) \times SL(2)$, $\square \otimes \square\square\square$, $V(2m) \otimes V(3)$)

(4) (SL(m)×SL(2), □⊗田, V(m)⊗V(3))

(5) (SL(n)×SL(2), 日⊗1＋□⊗□) (n＝6, 7)

(6) (Spin(8)×SL(2), Λ⊗1＋Λ'⊗□) (Λ, Λ' はベクトル表現, 偶及び奇の半スピン表現 3つのうち相異なる2つ)

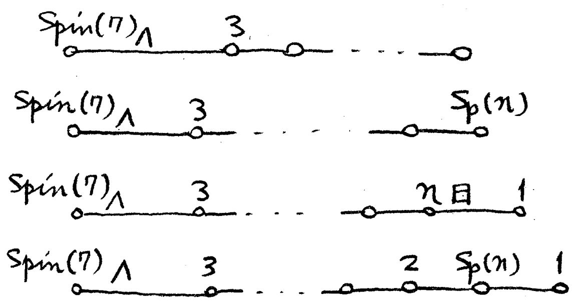
(7) (SL(n)×SL(2), □⊗1＋日⊗□) (n＝4, 5)

(8) (SL(2)×SL(5)×SL(2), □⊗日⊗1＋1⊗□⊗□)

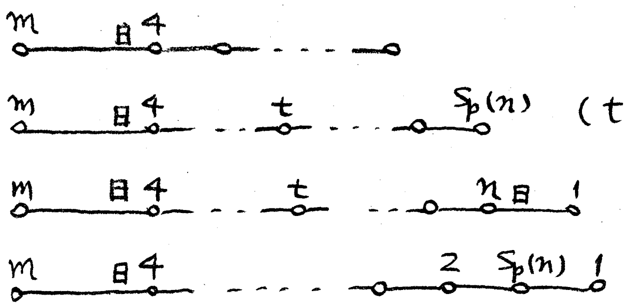
(9) (SL(m)×SL(m')×SL(2)×SL(2), □⊗□⊗1⊗1＋1⊗□⊗□⊗□)

($m' \geqq 3$)

(10) (Sp(m)×SL(3)×SL(2)×SL(2), □⊗□⊗1⊗1 ＋1⊗□⊗□⊗□)



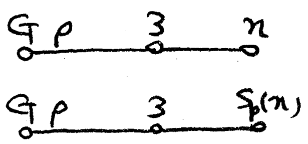
Λ ＝ スピン表現

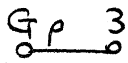


(t＝2, 3)

(t＝2, 3)

($m \geqq 2$)



但し  は以下の (1)〜(5) のいずれか。

(1) (Spin(10)×SL(3), 半スピン表現⊗□, V(16)⊗V(3))

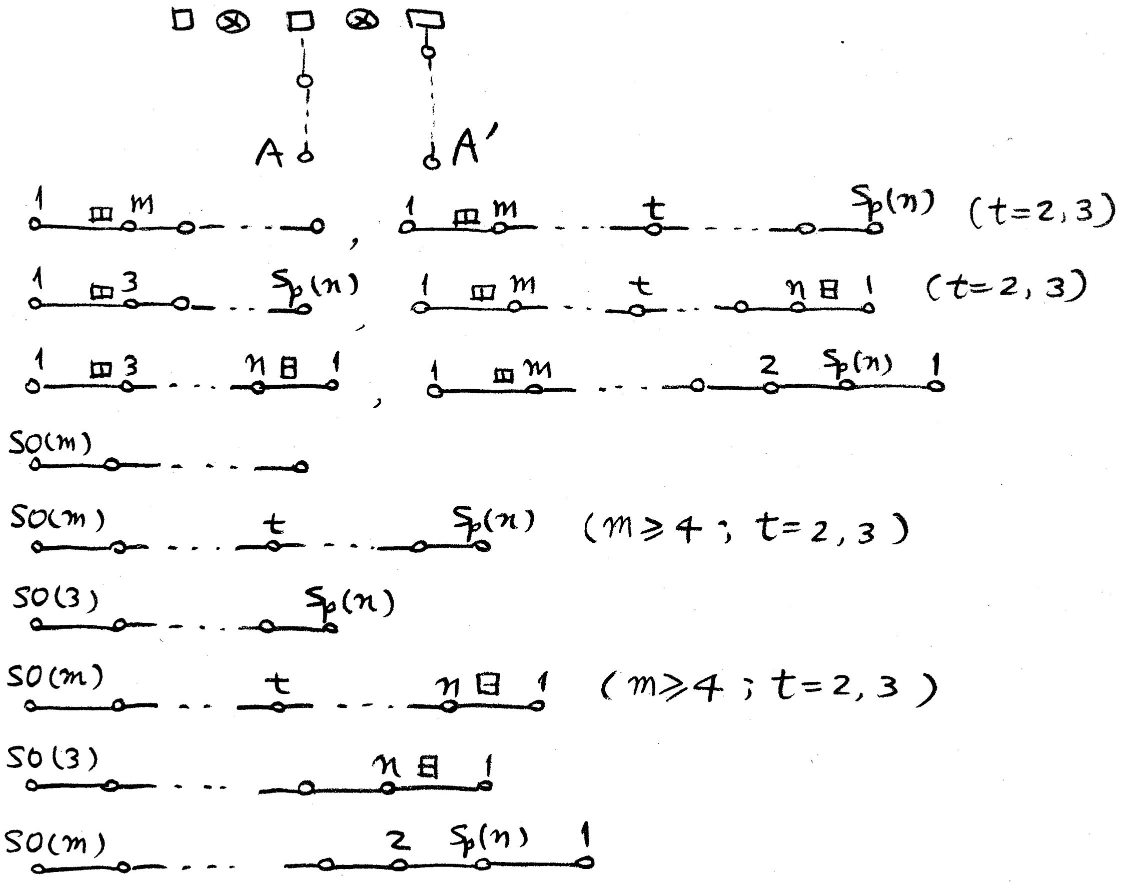
(2) (SL(5)×SL(3), 日⊗□, V(10)⊗V(3))

(3) $(SL(m)\times SL(2)\times SL(3),\ \square\otimes\square\otimes\square)$ $(m\geqq 3)$

(4) $(Spin(8)\times SL(3),\ \Lambda\otimes 1+\Lambda'\otimes\square)$ (Λ, Λ' はベクトル表現、偶及び奇の半スピン表現３つのうち相異なる２つ)

(5) $(SL(4)\times SL(3),\ \square\otimes 1+\boxminus\otimes\square,\ V(4)+V(6)\otimes V(3))$

$SL(m)\times SL(2)\times SL(2)$ $(m\geqq 2)$



参考文献

[1] T. Kimura, S. Kasai and O. Yasukura, A Classification of the Representation of Reductive Algebraic Groups which Admit Only a Finite Number of Orbits, Preprint