数理解析研究所講究録
513巻 1984年 77-96

Affine Lie Algebraの表現の分岐則とModular形式

京大数理研　三輪 哲二
MIWA Tetsuji
神保 道夫
JIMBO Michio

§0. Affine Lie Algebraが theta函数や modular形式と密接に結びついていることは，既に以前から認識されていたが，Kac-Peterson は最近の論文[2]で

指標公式 ＝ theta級数の反対称和の比

という直接の関係を確立した。その応用として，彼等は，affine Lie algebraの既約表現に現われる"string function"が $\Gamma(1)=SL(2,\mathbb{Z})$ の適当な主合同部分群に関する modular形式となることを示し，簡単な場合にそれらを実際に決定している。

本稿においては，表現の部分リー環に関する既約分解において生じる string functionの類似物について，同様の結果を報告したい。

Kac-Peterson理論の概要と，affine Lie algebra の用語等については，本講究録の小池・田中・森田氏による記事を

参照して下さい。

§1. $\tilde{\mathfrak{g}}$を affine Lie algebra, σをその diagram automorphism とし, fixed point subalgebra を

$$\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma} = \{ X \in \tilde{\mathfrak{g}} \mid \sigma(X) = X \}$$

とおく。

$\tilde{\Lambda}$を$\tilde{\mathfrak{g}}$の dominant integral weight とし, $L(\tilde{\Lambda})$で, $\tilde{\Lambda}$を最高 weightにもつ既約な$\tilde{\mathfrak{g}}$-加群を表わす*)。このとき, 部分リー環$\mathfrak{g}$の表現として $L(\tilde{\Lambda})$は完全可約であり, 有限の重複度$(\tilde{\Lambda}:\Lambda)$を以て、$\mathfrak{g}$の standard modules $L(\Lambda)$達の直和に分解する。($\mathfrak{g}$の null root をδとすれば, $L(\Lambda-n\delta) \cong L(\Lambda)$であることに注意)

$$L(\tilde{\Lambda}) \cong \bigoplus_{\Lambda \bmod \mathbb{C}\delta} \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overbrace{(L(\Lambda-n\delta)\oplus\cdots\oplus L(\Lambda-n\delta))}^{(\tilde{\Lambda}:\Lambda-n\delta)} . \qquad (1)$$

ここで, 容易にわかるように, 既約成分としては

$$\mathrm{level}(\Lambda) = p' \cdot \mathrm{level}(\tilde{\Lambda}) \qquad (2)$$

を満たすもののみが現われる。($p' \in \mathbb{Z}_+$は$\tilde{\mathfrak{g}}$とσのみから定まる自然数) そこで,

$$P^0_+(m) = \{\Lambda \mid \Lambda は\mathfrak{g}の\text{ dominant integral weight of level } m\} \bmod \mathbb{C}\delta$$

とおく。$P^0_+(m)$は有限集合であり, (1),(2)より 次の指標の等式が導かれる:

*) 以下 standard module とよぶ。

$$\mathrm{ch}\, L(\tilde{\Lambda})|_{\mathfrak{f}} = \sum_{\Lambda \in P_+^0(mp')} E_{\tilde{\Lambda}\Lambda}(q)\, \mathrm{ch}\, L(\Lambda)$$

ただし $q = e^{-\delta}$, $m = \mathrm{level}(\tilde{\Lambda})$, $\mathfrak{f}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra であり,

$$E_{\tilde{\Lambda}\Lambda}(q) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \gg -\infty}} (\tilde{\Lambda} : \Lambda - n\delta)\, q^n$$

とおいた。

Kac-Peterson[2] は, $\mathrm{ch} L(\Lambda)$ に適当な q の有理数巾 q^{s_Λ} ($s_\Lambda \in \mathbb{Q}$) を乗じたものが, theta 級数の反対称和の比として表わされることを指摘した。以下それを χ_Λ と書き, normalized character と呼ぶ。彼等は $\{\chi_\Lambda\}_{\Lambda \in P_+^0(m)}$ の持つ保型性をも求めている。これに応じて, 我々の $E_{\tilde{\Lambda}\Lambda}(q)$ を少し修正し

$$e_{\tilde{\Lambda}\Lambda}(\tau) = q^{s(\tilde{\Lambda},\Lambda)} E_{\tilde{\Lambda}\Lambda}(q)$$

$$(\, q = e^{2\pi i \tau}, \quad \exists\, s(\tilde{\Lambda},\Lambda) \in \mathbb{Q}\,)$$

としたものを、仮に branching function と呼ぶことにすれば, それらに対し次の保型性が導かれる:

<u>命題</u>. 行列 $\mathcal{E}(\tau) = \left(e_{\tilde{\Lambda}\Lambda}(\tau) \right)_{\tilde{\Lambda} \in \tilde{P}_+^0(m),\, \Lambda \in P_+^0(p'm)}$ は, 群 $\Gamma = \Gamma(1)$ (又は $\Gamma(2)$) に関する行列値 modular form of weight 0 であり,

$$\mathcal{E}(g\cdot\tau) = \tilde{S}_g\, \mathcal{E}(\tau)\, S_g \quad , \quad g \in \Gamma$$

$\tilde{S}_g$, S_g : 定数行列

という形の変換性をもつ。

$\tilde{S}_g$, S_gの具体形は, Kac-Petersonの論文より知られる。

§2. 実際にbranching functionが決定されるのは, $\tilde{\Lambda}$のlevel mが小さい場合に限られている。我々は, 更に条件として

(i) $\tilde{g} = X_\ell^{(k)}$: classical affine

(i.e. $X = A, B, C, D$; $k = 1, 2$)

(ii) $\sigma^2 = id.$

を課して, 起り得る列表(付録1)の13通りを考察する。このとき, 結果は次のようなタイプに分れる。

Case 1. (diagonal型)

$$e_{\tilde{\Lambda}\Lambda}(\tau) = \begin{cases} f(\tau) & (\tilde{\Lambda}|_g = \Lambda \text{ or } \sigma(\tilde{\Lambda})|_g = \Lambda) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

ここに $f(\tau) = 1,\ \eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau)$ 等。

Case 2.

$$e_{\tilde{\Lambda}\Lambda}(\tau) = \det(\text{一変数 theta 函数の zero value})$$

ただし, 一変数theta函数というのは,

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta_{\lambda,N}(\tau,u)\\ \hat{\vartheta}_{\lambda,N}(\tau,u)\end{array}\right\} = \sum_{\nu=n+\lambda/N,\ n\in\mathbb{Z}} \left\{\begin{array}{l}(-)^{nN}\\ (-)^{n(N+1)}\end{array}\right\} e^{\pi i\tau N\nu^2+2\pi i N\nu u} \qquad (3)$$

$(\ \mathrm{Im}\,\tau>0,\quad u\in\mathbb{C}\ )$

の形のものを言う。この結果のみはすべてのmについて成立つ。

Case 3.（Hecke 型）

Hecke's indefinite modular form を用いて $e_{\tilde{\Lambda},\Lambda}(\tau)$ が表わされる。格子 $L=\mathbb{Z}^2$ 上の二次形式としては、次の三系列が出てくる：

$$B_l(x,y) = 2(l+2)x^2 - 2l\,y^2$$

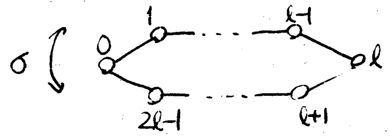
$$B_l'(x,y) = 2(l+2)x^2 - 8(l+1)y^2$$

$$B_l''(x,y) = 8(l+1)x^2 - 2l\,y^2$$

次節で、Case 3の実例を詳しく述べたい。

§3. affine Lie algebras の pair として、

$\tilde{\mathfrak{g}} = A^{(1)}_{2l-1}$,　　$\mathfrak{g} = C^{(1)}_l$



σとして，$\sigma(j)=2l-j\ (\mathrm{mod}\ 2l)$ なる頂点の permutation から定まる automorphism をとる。このとき $p'=1$であり，$\mathrm{level}(\tilde{\Lambda}) = \mathrm{level}(\Lambda) = m$。以下 $m=1$ とする。従っ

て $\tilde{\Lambda}$, Λ はそれぞれある基本 weight $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}_j$, $\Lambda = \Lambda_k$ と一致する。

座標をとって、具体的に normalized character を書き下すと、次のようになる。

$\underline{A^{(1)}_{2l-1}}$

$$\tilde{\chi}_{\tilde{\Lambda}_j}(\tau, \tilde{u}) = \tilde{N}_j(\tau, \tilde{u}) / \tilde{D}(\tau, \tilde{u})$$

$$\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \cdots, \tilde{u}_{2l}) \in \mathbb{C}^{2l}$$

$$\tilde{N}_j(\tau, \tilde{u}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2l}} \operatorname{sgn}\sigma \sum_{\substack{\nu_i \in \mathbb{Z} + \frac{\tilde{\lambda}_{\sigma(i)}}{2l+1} \\ \nu_1 + \cdots + \nu_{2l} = 0}} e^{\pi i (2l+1)\tau \sum_{i=1}^{2l} \nu_i^2 + 2\pi i (2l+1) \sum_{i=1}^{2l} \nu_i \tilde{u}_i}$$

$$\tilde{D}(\tau, \tilde{u}) = \eta(\tau)^{-(2l-1)(l-1)} \prod_{1 \leq i < j \leq 2l} \theta(\tau, \tilde{u}_i - \tilde{u}_j)$$

ここに $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \cdots, \tilde{\lambda}_{2l}) = (2l-\lambda, \cdots, \widehat{2l-j-\lambda}, \cdots, 1-\lambda, 0-\lambda)$,

$\lambda = \frac{2l-1}{2} + \frac{j}{2l}$, $\theta(\tau, u)$ は

$$\theta(\tau, u) = q^{\frac{1}{8}} z^{\frac{1}{2}} \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{n+1})(1-zq^{n+1})(1-z^{-1}q^n), \quad z = e^{2\pi i u}$$

で定義される。

$\underline{C^{(1)}_l}$

$$\chi_{\Lambda_k}(\tau, u) = N_k(\tau, u) / D(\tau, u)$$

$$u = (u_1, \cdots, u_l) \in \mathbb{C}^l$$

$$N_k(\tau, u) = \det\left(\vartheta_{\lambda_i, 2(l+2)}(\tau, u_j) - \vartheta_{\lambda_i, 2(l+2)}(\tau, -u_j)\right)_{1 \leq i, j \leq l}$$

$$D(\tau, u) = \eta(\tau)^{-l(l-1)} \prod_{i=1}^{l} \theta(\tau, 2u_i) \times \prod_{1 \leq i < j \leq l} \theta(\tau, u_i - u_j)\theta(\tau, u_i + u_j)$$

ただし $(\lambda_1, \cdots, \lambda_l) = (l+1, \cdots, \widehat{l-k}, \cdots, 2, 1)$.

上記の表示から分るように、これらはそれぞれ $H_+ \times \mathbb{C}^{2l}$, $H_+ \times \mathbb{C}^{l}$ ($H_+ = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau > 0\}$) で正則となっている。

後者は、擬周期性

$$\chi(\tau, u_1, \cdots, u_i+1, \cdots, u_\ell) = \chi(\tau, u) \qquad (4)$$
$$\chi(\tau, u_1, \cdots, u_i+\tau, \cdots, u_\ell) = e^{-2\pi i\tau - 4\pi i u_i}\chi(\tau, u)$$

及び C_ℓ の Weyl 群 $\mathfrak{S}_\ell \ltimes \mathbb{Z}_2^\ell$ に関する対称性

$$\chi(\tau, u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(\ell)}) = \chi(\tau, u) \qquad \forall\sigma\in\mathfrak{S}_\ell \qquad (5)$$
$$\chi(\tau, u_1, \cdots, -u_i, \cdots, u_\ell) = \chi(\tau, u)$$

を満たし,

$$\mathcal{T} = \{\chi(\tau, u)\in\mathcal{O}(H_+\times\mathbb{C}^\ell) \mid \chi \text{ は } (4), (5) \text{ を満たす}\}$$

の $\mathcal{O}(H_+)$-linear basis となっている。

さて，この座標では $C_\ell^{(1)}$ の Cartan への制限は $\tilde{u} = (u_1, \cdots, u_\ell, -u_1, \cdots, -u_\ell)$ とおくことにあたる。このとき

$$\bar{\chi}_{\tilde{\Lambda}_j}(\tau, u_1, \cdots, u_\ell) := \tilde{\chi}_{\tilde{\Lambda}_j}(\tau, u_1, \cdots, u_\ell, -u_1, \cdots, -u_\ell)$$

は $\mathcal{T}$ に属することが検証され，従って

$$\bar{\chi}_{\tilde{\Lambda}_j}(\tau, u) = \sum_{k=0}^{\ell} e^\ell_{jk}(\tau)\chi_{\Lambda_k}(\tau, u) \qquad (6)$$

となる $e^\ell_{jk}(\tau)\in\mathcal{O}(H_+)$ が存在する。これが §1 の意味の branching function に他ならない。

一般に，$e_{\tilde{\Lambda}\Lambda}(\tau)\neq 0 \Rightarrow \tilde{\Lambda}|_{\mathfrak{g}} \equiv \Lambda \mod$ ($\mathfrak{g}$ の root lattice) が容易に分るが，今の状況にあてはめると

$$e^\ell_{jk}(\tau) = 0 \qquad (j\not\equiv k \mod 2)$$

が導かれることも注意しておく。

<u>定理</u>[3] $\eta(\tau)^3 e^{\ell}_{jk}(\tau) = \Theta^{\ell+2,\ell}_{k+1,j}(\tau) \quad (0\leqq j,k\leqq \ell)$

ここに、右辺は Hecke's indefinite modular form

$$\Theta^{b,c}_{m,n}(\tau) := \sum_{\substack{-b|x|<a|y|\leqq b|x| \\ (x,y)\in Z^2+(\frac{m}{2b},\frac{n}{2c})}} \mathrm{sgn}\,x\cdot q^{bx^2-cy^2}$$

$$(a,b,c\in Z_+,\quad a^2-bc=1)$$

を表わす。

<u>注意</u>. Kac-Petersonは、最も簡単な $A_1^{(1)}$ の場合に限ってすべての string function を決定している[1),2)]。彼等の結果は

$$\eta(\tau)^3 c^{(m-k)\Lambda_0+k\Lambda_1}_{(m-j)\Lambda_0+j\Lambda_1}(\tau) = \Theta^{m+2,m}_{k+1,j}(\tau)$$

即ち上で $\ell \leftrightarrow m$ としたものと同一の expression となっている。（次節参照）

なお、現在の場合 $E^{\ell}_{\pm}(\tau) = (e^{\ell}_{jk}(\tau))_{\substack{j\equiv k \bmod 2 \\ (j\not\equiv k \bmod 2)}}$ は正方行列になっており、行列式は意味をもつ。実際、変換性より

$$\det E^{\ell}_{\pm}(\tau) = \begin{cases} 1 & \ell \text{ even} \\ (\eta(\tau)/\eta(2\tau))^{\pm 1} & \ell \text{ odd} \end{cases}$$

を示すことができる。（cf. Kac-Peterson, string functions の行列式に関する結果。）この最も簡単な場合から、次のような identity が導かれる（Ramanujanによる）：

$$G(q)G(q^9) + q^2 H(q)H(q^9) = \varphi(q^3)^2/\varphi(q)\varphi(q^9)$$

ただし

$$G(q)=\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{5n+1})^{-1}(1-q^{5n+4})^{-1},\quad H(q)=\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{5n+2})^{-1}(1-q^{5n+3})^{-1}$$

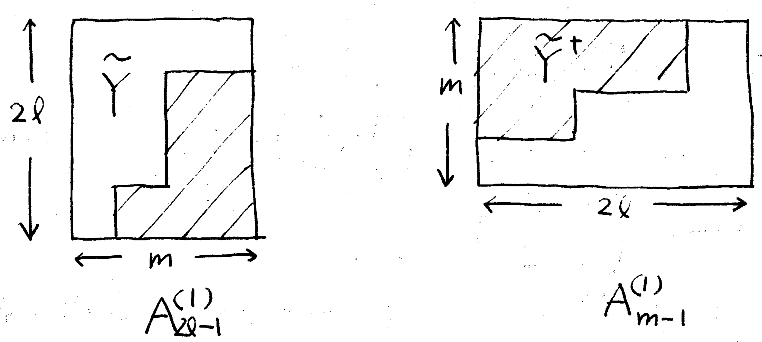
$$\varphi(q)=\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{n+1}).$$

§4. この節で、branching functions の決定方法の概略を、§3の例に即して述べよう。

$e^{\ell}_{jk}(\tau)=e_{\tilde{\Lambda}_j \Lambda_k}(\tau)$ は、theta 函数の等式(6)によって特徴づけられる量であるが、Lie環の rank ℓ が大きいと、この式を直接扱うのは困難である。そこで、以下に述べるような"duality"を利用して、rank ℓ と level m の役割を入れ替え、一変数 theta 函数の等式に問題を帰着させる。

以後 ℓ, m は任意の正整数とする。

$\tilde{\mathfrak{g}}=A^{(1)}_{2\ell-1}$ の dominant integral weight $\tilde{\Lambda}$ は、その level m と、"classical part"（有限次元 Lie 環 $A_{2\ell-1}$ の dominant integral weight）で定まる。良く知られているように、後者はヤング図形でパラメトライズされる。そこで、m を固定し、$\tilde{\Lambda}$ を、深さ $\leqq 2\ell$, 幅 $\leqq m$ の図形 $\tilde{Y}$（下図左）：

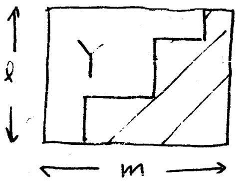


によって表わすことにする。いま上図を転置してみると，$\tilde{Y}$の complement（斜線部）に出来る図形 $\tilde{Y}^{+}$ から，affine Lie algebra $A_{m-1}^{(1)}$ の level $= 2\ell$ の weight $\tilde{\Lambda}^{+}$ が得られる。即ち，

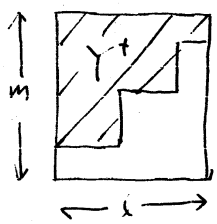
$$\left\{\begin{array}{l} A_{2\ell-1}^{(1)} \text{ の level } m \text{ の}^{*)} \\ \text{dominant integral weight} \end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A_{m-1}^{(1)} \text{ の level } 2\ell \text{ の} \\ \text{dominant integral weight} \end{array}\right\}$$

という 1 : 1 の対応がある。

全く同様に，$C_\ell^{(1)}$ の level m の weight Λ は，深さ $\leq \ell$，幅 $\leq m$ のヤング図形 Y に対応し，上と同じ操作によってこれは $C_m^{(1)}$ の level ℓ の weight Λ^{+} と 1 : 1 に対応する。



$C_\ell^{(1)}$



$C_m^{(1)}$

そこで，Lie 環の pair

$$\tilde{\mathfrak{g}}^{+} = A_{m-1}^{(1)} \subset \mathfrak{g}^{+} = C_m^{(1)}$$

に関する表現の既約分解の問題を考えよう。ここで，上記の埋込みは，有限次元 Lie 環の自然な埋込み

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{gl}(m) & \subset & \mathfrak{sp}(2m) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} A, B, C \in \mathfrak{gl}(m) \\ {}^tB = B,\ {}^tC = C \end{array} \right\} \\ A & \longmapsto & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA \end{pmatrix} \end{array}$$

に <u>Laurent</u> polynomials $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ を tensor して得られる。

*) 正確には $A_{2\ell-1}^{(1)}$ でなく "$\mathfrak{sl}(2\ell, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] + \mathbb{C}c$" というべきである。$A_{m-1}^{(1)}$ についても同様。

このとき，$\mathfrak{g}^+$ の level ℓ の既約表現 $L(\Lambda^+)$ は，$\tilde{\mathfrak{g}}^+$ の level 2ℓ のそれに分解し，normalized characters の等式として次の形のものを生じる。

$$\sum_{\tilde\Lambda^+} \hat\chi^{(m)}_{\tilde\Lambda^+}(\tau,u^+)\, e^+_{\tilde\Lambda^+\Lambda^+}(\tau) = \chi^{(m)}_{\Lambda^+}(\tau,u^+)$$

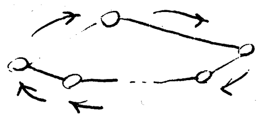
右辺は $C_m^{(1)}$ の normalized character，また

$$\hat\chi^{(m)}_{\tilde\Lambda^+}(\tau,u^+) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \vartheta_{2\ell\nu-\ell m+|\tilde Y^+|,\,2\ell m}\Big(\tau, \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} u_j^+\Big) \times \eta(\tau)^{-1}\,\tilde\chi^{(m-1)}_{\pi^\nu(\tilde\Lambda^+)}(\tau,u^+)$$

$\tilde\chi^{(m-1)}_{\tilde\Lambda^+}(\tau,u^+)$: $A^{(1)}_{m-1}$ の normalized character

$|\tilde Y^+| = \tilde Y^+$ のタイルの数

π : $A^{(1)}_{m-1}$ の Dynkin 図形の頂点の巡回置換

π 

である。

<u>定理 (duality)</u>[4] weight の間の上記対応の下に

$$e_{\tilde\Lambda\Lambda}(\tau) = e^+_{\tilde\Lambda^+\Lambda^+}(\tau).$$

<u>注意</u> $q=e^{2\pi i\tau}\to 0$ の極限では，有限次元 Lie 環対

$$\mathfrak{gl}(2\ell)\supset\mathfrak{sp}(2\ell) \leftrightarrow \mathfrak{gl}(m)\subset\mathfrak{sp}(2m)$$

の分岐則の間の duality

$$(\tilde Y : Y) = (Y^+ : \tilde Y^+)$$

〃

を得る（直接の証明も可能である[4)]）。

ここで、もとの問題に戻り $m=1$ とおけば，第2の式(6)は

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}/2\ell\mathbb{Z}} \vartheta_{j,2\ell}(\tau,u^+)\,\eta(\tau)^{-1}\,e^{\ell}_{jk}(\tau) = \frac{1}{\Theta(\tau,2u^+)}\left(\vartheta_{k+1,2(\ell+2)}(\tau,u^+) - \vartheta_{k+1,2(\ell+2)}(\tau,-u^+)\right)$$

$$(u^+\in\mathbb{C})$$

となり，係数 $e^{\ell}_{jk}(\tau)$ の表示は留数計算で容易に求められる。ここから式の変形によって Hecke の表示（定理 §3）にたどり着く。

この節の議論は、他の Lie 環にも適用可能であるが，一般の場合第2の等式(6)にあたるものは、簡単な Lie 環的解釈ができないことを注意しておく。

§5. Kac - Peterson もその序文で断わっている通り，我々の問題設定は Lie 環論的であり、Lie 環論で議論が明快になってはいるものの、本質的に Lie 環論を用いている部分はほとんどないように見える。特に、何故 Hecke の indefinite modular form が出ているか，またそれが何故 positive definite theta でも書けるのかについては，今の所 Lie 環論からは何の説明もなされていないようである。

最後に，level，rank が全く一般の場合には string

function, branching function は、符号数 (n, n) の二次形式に付随した theta の如きものになるが、この場合にも Hecke の拡張があるかどうかを問題として、この報告を終えたい。

文献

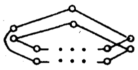
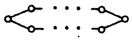
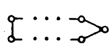
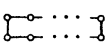
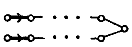
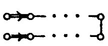
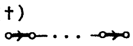
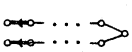
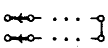
1) V.G. Kac and D.H. Peterson, Bull. Amer. Math. Soc. 3 (1980) 1057.

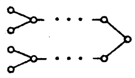
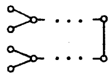
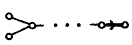
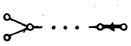
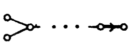
2) ――――――, Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms, preprint, to appear in Advances in Math.

3) M. Jimbo and T. Miwa, Irreducible decomposition of fundamental modules for $A_\ell^{(1)}$ and $C_\ell^{(1)}$, and Hecke modular forms, RIMS preprint 434 (1983), to appear in Advanced Studies in Pure Math.

4) ――――――, On a duality of branching rules for affine Lie algebras, RIMS preprint 453 (1983).

Table III.

	$\mathfrak{g}(\tilde{A})$	$\mathfrak{g}(A)$	p	p'	$\overline{\iota(\Lambda_0)}$	$\lvert\overline{\iota(\Lambda_0)}\rvert^2$	$\overline{\iota(u)}$
(1)	$A_{2\ell+1}^{(1)}$ 	$A_{\ell}^{(1)}$ 	2	1	$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell+1}\tilde{\epsilon}_i - \frac{1}{2}\sum_{i=\ell+2}^{2\ell+2}\tilde{\epsilon}_i$	$\frac{1}{2}(\ell+1)$	$\sum_{i=1}^{\ell+1}u_i\tilde{\epsilon}_i + \sum_{i=1}^{\ell+1}u_i\epsilon_{\ell+i+1}$
(2)	$A_{2\ell-1}^{(1)}$ 	$C_{\ell}^{(1)}$	1	1	0	0	$\sum_{i=1}^{\ell}u_i\tilde{\epsilon}_i - \sum_{i=1}^{\ell}u_i\tilde{\epsilon}_{2\ell+1-i}$
(3)	$A_{2\ell}^{(1)}$ 	$A_{2\ell}^{(2)}$	1	2	$\frac{1}{2(2\ell+1)}\sum_{i=1}^{2\ell+1}\tilde{\epsilon}_i - \frac{1}{2}\tilde{\epsilon}_{2\ell+1}$	$\frac{\ell}{2(2\ell+1)}$	$\sum_{i=1}^{\ell}u_i\tilde{\epsilon}_i - \sum_{i=1}^{\ell}u_i\tilde{\epsilon}_{2\ell+1-i}$
(4)	$A_{2\ell+1}^{(1)}$ 	$D_{\ell+1}^{(2)}$	2	2	$\frac{1}{2\ell+2}\sum_{i=1}^{2\ell+2}\tilde{\epsilon}_i - \tilde{\epsilon}_{2\ell+2}$	$\frac{2\ell+1}{2\ell+2}$	$\sum_{i=1}^{\ell}u_i\tilde{\epsilon}_i - \sum_{i=1}^{\ell}u_i\tilde{\epsilon}_{2\ell+2-i}$
(5)	$C_{2\ell}^{(1)}$ 	$C_{\ell}^{(1)}$ 	2	1	$\sum_{i=1}^{2\ell}\tilde{\epsilon}_i$	ℓ	$\sum_{i=1}^{\ell}2u_i\tilde{\epsilon}_i - \sum_{i=1}^{\ell}2u_i\tilde{\epsilon}_{2\ell+1-i}$
(6)	$C_{2\ell+1}^{(1)}$ 	$A_{2\ell}^{(2)(\dagger)}$ 	2	2	$2\sum_{i=1}^{\ell}\tilde{\epsilon}_i + \tilde{\epsilon}_{\ell+1}$	$2\ell+\frac{1}{2}$	$-\sum_{i=1}^{\ell}2u_i\tilde{\epsilon}_{\ell+1-i} + \sum_{i=1}^{\ell}2u_i\tilde{\epsilon}_{\ell+1+i}$
(7)	$D_{2\ell+1}^{(2)}$ 	$A_{2\ell}^{(2)}$	1	1	$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2\ell}\tilde{\epsilon}_i$	$\frac{1}{4}\ell$	$\sum_{i=1}^{\ell}\frac{1}{2}u_i\tilde{\epsilon}_i - \sum_{i=1}^{\ell}\frac{1}{2}u_i\tilde{\epsilon}_{2\ell+1-i}$
(8)	$D_{2\ell+2}^{(2)}$ 	$D_{\ell+1}^{(2)}$	2	1	$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2\ell+1}\tilde{\epsilon}_i$	$\ell+\frac{1}{2}$	$\sum_{i=1}^{\ell}\frac{1}{2}u_i\tilde{\epsilon}_i - \sum_{i=1}^{\ell}\frac{1}{2}u_i\tilde{\epsilon}_{2\ell+2-i}$

(9)	$D_{\ell+1}^{(1)}$ 	$B_{\ell}^{(1)}$ 	1	1	0	0	$\sum_{i=1}^{\ell}u_i\tilde{\epsilon}_i$
(10)	$D_{2\ell}^{(1)}$ 	$A_{2\ell-1}^{(2)}$ 	2	1	$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2\ell}\tilde{\epsilon}_i$	$\frac{1}{2}\ell$	$\sum_{i=1}^{\ell}u_i\tilde{\epsilon}_i - \sum_{i=1}^{\ell}u_i\tilde{\epsilon}_{2\ell+1-i}$
(11)	$D_{2\ell+1}^{(1)}$ 	$B_{\ell}^{(1)}$ 	2	1	$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2\ell+1}\tilde{\epsilon}_i$	$\frac{1}{2}\ell+\frac{1}{4}$	$\sum_{i=1}^{\ell}u_i\tilde{\epsilon}_i - \sum_{i=1}^{\ell}u_i\tilde{\epsilon}_{2\ell+2-i}$
(12)	$A_{2\ell+1}^{(2)}$ 	$A_{2\ell}^{(2)}$ 	1	1	$\frac{1}{2}\tilde{\epsilon}_1$	$\frac{1}{4}$	$\sum_{i=1}^{\ell}u_i\tilde{\epsilon}_{i+1}$
(13)	$B_{\ell+1}^{(1)}$ 	$D_{\ell+1}^{(2)}$ 	2	1	$\tilde{\epsilon}_1$	1	$\sum_{i=1}^{\ell}u_i\tilde{\epsilon}_{i+1}$

($\dagger$) The 0-th vertex is placed at the right end.

付録2 Hecke indefinite modular forms の Dedekind eta function による表示

京大大型計算機センターの利用によって, Hecke indefinite modular forms の Dedekind etu function による表示を求めてみた。下に計算データを示す。

(記号) a, b, c : 正整数, $a^2-bc=1$ 固定

$$H_{mn}(\tau) := \sum_{\substack{-b|x|<a|y|\le b|x| \\ (x,y)\in \mathbb{Z}^2+(\frac{m}{2b},\frac{n}{2c})}} \operatorname{sgn} x \cdot e^{2\pi i\tau(bx^2-cy^2)}$$

(対称性)

$$H_{mn}(\tau) = -H_{-m,n}(\tau) = H_{m,-n}(\tau) = H_{am+bn,\,cm+an}(\tau)$$

$a=2,\ b=3,\ c=1$

$$H_{10}(\tau) = \eta(\tau)^2$$

$a=3,\ b=8,\ c=1$

$$H_{20}(\tau) = \eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau)^4\eta(4\tau)^{-1}$$
$$H_{41}(\tau) = 2\eta(2\tau)\eta(4\tau)$$
$$H_{10}(\tau)+H_{11}(\tau)+H_{30}(\tau)-H_{51}(\tau) = \eta(\tfrac{\tau}{4})^{-1}\eta(\tfrac{\tau}{2})^4\eta(\tau)^{-1}$$
$$H_{10}(\tau)-H_{11}(\tau)-H_{30}(\tau)-H_{51}(\tau) = \eta(\tfrac{\tau}{4})\eta(\tfrac{\tau}{2})$$

$a=3,\ b=4,\ c=2$

$$H_{21}(\tau) = \eta(\tau)\eta(2\tau)$$
$$H_{10}(\tau)-H_{12}(\tau) = \eta(\tfrac{\tau}{2})\eta(\tau)$$
$$H_{10}(\tau)+H_{12}(\tau) = \eta(\tfrac{\tau}{2})^{-1}\eta(\tau)^4\eta(2\tau)^{-1}$$

$a=4,\ b=15,\ c=1$

$$H_{50}(\tau) = \eta(\tau)^2\eta(2\tau)^{-1}\eta(10\tau)$$
$$H_{51}(\tau) = 2\eta(4\tau)\eta(10\tau)^2\eta(20\tau)^{-1}$$
$$H_{10,0}(\tau) = 2\eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau)^3\eta(4\tau)^{-1}\eta(5\tau)\eta(10\tau)^{-1}\eta(20\tau)$$
$$H_{5,1}(\tau)-H_{10,0}(\tau) = 2\eta(\tfrac{\tau}{2})\eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau)\eta(\tfrac{5\tau}{2})^{-1}\eta(5\tau)^3\eta(10\tau)^{-1}$$
$$H_{5,1}(\tau)+H_{10,0}(\tau) = 2\eta(\tfrac{\tau}{2})^{-1}\eta(\tau)^2\eta(\tfrac{5}{2}\tau)$$

$$2H_{11}(\tau)-H_{51}(\tau)+2H_{71}(\tau)=-2\eta(\tfrac{2}{5}\tau)^{2}\eta(\tfrac{4}{5}\tau)^{-1}\eta(4\tau)$$

$$2H_{20}(\tau)-2H_{40}(\tau)-H_{10,0}(\tau)=2\eta(\tfrac{\tau}{5})\eta(\tfrac{2}{5}\tau)^{-1}\eta(\tfrac{4}{5}\tau)\eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau)^{3}\eta(4\tau)^{-1}$$

$$-2H_{50}(\tau)+H_{51}(\tau)-H_{10,0}(\tau)=2\eta(\tfrac{\tau}{4})\eta(\tfrac{5}{4}\tau)^{-1}\eta(\tfrac{5}{2}\tau)^{2}$$

$$2H_{50}(\tau)+H_{51}(\tau)-H_{10,0}(\tau)=2\eta(\tfrac{\tau}{4})^{-1}\eta(\tfrac{\tau}{2})^{3}\eta(\tau)^{-1}\eta(\tfrac{5}{4}\tau)\eta(\tfrac{5}{2}\tau)^{-1}\eta(5\tau)$$

$$H_{10}(\tau)-H_{21}(\tau)-H_{50}(\tau)-H_{81}(\tau)-H_{11,0}(\tau)=\eta(\tfrac{2}{5}\tau)\eta(\tau)^{2}\eta(2\tau)^{-1}$$

$a=4,\ b=5,\ c=3$

$a=4,\ b=3,\ c=5$

$$H_{1,0}(\tau)=\eta(2\tau)\eta(5\tau)^{2}\eta(10\tau)^{-1}$$

$$H_{1,5}(\tau)=-2\eta(2\tau)^{2}\eta(4\tau)^{-1}\eta(20\tau)$$

$$H_{2,0}(\tau)=2\eta(\tau)\eta(2\tau)^{-1}\eta(4\tau)\eta(5\tau)^{-1}\eta(10\tau)^{3}\eta(20\tau)^{-1}$$

$$-H_{1,5}(\tau)+H_{2,0}(\tau)=2\eta(\tfrac{\tau}{2})^{-1}\eta(\tau)^{3}\eta(2\tau)^{-1}\eta(\tfrac{5}{2}\tau)\eta(5\tau)^{-1}\eta(10\tau)$$

$$H_{1,5}(\tau)+H_{2,0}(\tau)=2\eta(\tfrac{\tau}{2})\eta(\tfrac{5\tau}{2})^{-1}\eta(5\tau)^{2}$$

$$H_{1,0}(\tau)+2H_{1,2}(\tau)+2H_{1,4}(\tau)=\eta(\tfrac{\tau}{5})^{2}\eta(\tfrac{2\tau}{5})^{-1}\eta(2\tau)$$

$$H_{1,0}(\tau)+H_{1,5}(\tau)-H_{2,0}(\tau)=2\eta(\tfrac{\tau}{4})\eta(\tfrac{\tau}{2})^{-1}\eta(\tau)\eta(\tfrac{5}{4}\tau)^{-1}\eta(\tfrac{5}{2}\tau)^{3}\eta(5\tau)^{-1}$$

$$2H_{1,0}(\tau)-H_{1,5}(\tau)+H_{2,0}(\tau)=2\eta(\tfrac{\tau}{4})^{-1}\eta(\tfrac{\tau}{2})^{2}\eta(\tfrac{5}{4}\tau)$$

$$2H_{1,1}(\tau)+2H_{1,3}(\tau)+H_{1,5}(\tau)=2\eta(\tfrac{4}{5}\tau)\eta(2\tau)^{2}\eta(4\tau)^{-1}$$

$$H_{2,0}(\tau)+2H_{2,2}(\tau)+2H_{2,4}(\tau)=2\eta(\tfrac{\tau}{5})^{-1}\eta(\tfrac{2\tau}{5})^{3}\eta(\tfrac{4\tau}{5})^{-1}\eta(\tau)\eta(2\tau)^{-1}\eta(4\tau)$$

$a=5,\ b=24,\ c=1$

$$H_{4,0}(\tau)=\eta(3\tau)^{-2}\eta(4\tau)\eta(6\tau)^{5}\eta(12\tau)^{-2}$$

$$H_{6,0}(\tau)=\eta(2\tau)^{2}\eta(3\tau)\eta(4\tau)^{-1}\eta(6\tau)^{-1}\eta(12\tau)$$

$$H_{8,1}(\tau)=2\eta(2\tau)^{-1}\eta(4\tau)^{3}$$

$$H_{12,0}(\tau)=2\eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau)^{2}\eta(3\tau)\eta(6\tau)^{-1}\eta(12\tau)$$

$$H_{2,0}(\tau)-H_{14,0}(\tau)=\eta(\tau)\eta(3\tau)^{-2}\eta(6\tau)^{5}\eta(12\tau)^{-2}$$

$$H_{2,0}(\tau)+H_{14,0}(\tau)=\eta(\tau)^{-3}\eta(2\tau)^{8}\eta(4\tau)^{-3}$$

$$-H_{2,1}(\tau)+H_{10,1}(\tau)=2\eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau)^{3}\eta(4\tau)^{-1}\eta(6\tau)^{-1}\eta(12\tau)^{2}$$

$$H_{2,1}(\tau)+H_{10,1}(\tau)=2\eta(\tau)\eta(6\tau)^{-1}\eta(12\tau)^{2}$$

$$-2H_{4,0}(\tau)+H_{12,0}(\tau)=-2\eta(\tfrac{\tau}{3})\eta(\tfrac{2\tau}{3})^{-1}\eta(\tau)^{-1}\eta(\tfrac{4\tau}{3})\eta(2\tau)^{2}$$

$$H_{4,0}(\tau)+H_{12,0}(\tau)=\eta(\tfrac{\tau}{3})^{-2}\eta(\tfrac{2}{3}\tau)^{5}\eta(\tfrac{4}{3}\tau)^{-2}\eta(4\tau)$$

$$H_{6,1}(\tau)-H_{18,1}(\tau)=2\eta(\tau)\eta(2\tau)^{-1}\eta(4\tau)\eta(6\tau)^{2}\eta(12\tau)^{-1}$$

$$H_{6,1}(\tau)+H_{18,1}(\tau)=2\eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau)^{2}\eta(6\tau)^{2}\eta(12\tau)^{-1}$$

$$H_{2,0}(\tau)+2H_{6,0}(\tau)-H_{14,0}(\tau)=\eta(\tfrac{\tau}{3})^{-2}\eta(\tfrac{2}{3}\tau)^{5}\eta(\tau)\eta(\tfrac{4}{3}\tau)^{-2}$$
$$H_{2,0}(\tau)-H_{6,0}(\tau)-H_{14,0}(\tau)=\eta(\tfrac{\tau}{3})\eta(\tfrac{2}{3}\tau)^{-1}\eta(\tfrac{4}{3}\tau)\eta(2\tau)^{2}\eta(4\tau)^{-1}$$
$$2H_{6,0}(\tau)+H_{6,1}(\tau)-H_{18,1}(\tau)=2\eta(\tfrac{\tau}{4})^{-1}\eta(\tfrac{\tau}{2})^{2}\eta(\tfrac{3}{4}\tau)\eta(\tfrac{3}{2}\tau)^{-1}\eta(3\tau)$$
$$-2H_{6,0}(\tau)+H_{6,1}(\tau)-H_{18,1}(\tau)=2\eta(\tfrac{\tau}{4})\eta(\tfrac{\tau}{2})^{-1}\eta(\tfrac{3}{4}\tau)^{-1}\eta(\tau)\eta(\tfrac{3}{2}\tau)^{2}$$
$$H_{2,0}(\tau)+H_{2,1}(\tau)+H_{10,1}(\tau)-H_{14,0}(\tau)=\eta(\tfrac{3\tau}{4})^{-2}\eta(\tau)\eta(\tfrac{3\tau}{2})^{5}\eta(3\tau)^{-2}$$
$$H_{2,0}(\tau)-H_{2,1}(\tau)-H_{10,1}(\tau)-H_{14,0}(\tau)=\eta(\tfrac{3\tau}{4})^{2}\eta(\tau)\eta(\tfrac{3\tau}{2})^{-1}$$
$$2H_{2,1}(\tau)+H_{6,1}(\tau)-2H_{10,1}(\tau)+H_{18,1}(\tau)=2\eta(\tfrac{2\tau}{3})^{2}\eta(\tau)^{-1}\eta(\tfrac{4\tau}{3})^{-1}\eta(2\tau)^{2}$$
$$H_{2,1}(\tau)+H_{6,1}(\tau)+H_{10,1}(\tau)-H_{18,1}(\tau)=2\eta(\tfrac{2\tau}{3})^{-1}\eta(\tau)\eta(\tfrac{4\tau}{3})^{2}$$
$$-H_{2,1}(\tau)+H_{6,1}(\tau)+H_{10,1}(\tau)+H_{18,1}(\tau)=2\eta(\tfrac{2\tau}{3})^{-1}\eta(\tau)^{-1}\eta(\tfrac{4\tau}{3})^{2}\eta(2\tau)^{3}\eta(4\tau)^{-1}$$
$$-2H_{2,1}(\tau)+H_{6,1}(\tau)-2H_{10,1}(\tau)-H_{18,1}(\tau)=2\eta(\tfrac{2\tau}{3})^{2}\eta(\tau)\eta(\tfrac{4\tau}{3})^{-1}\eta(2\tau)^{-1}\eta(4\tau)$$
$$H_{3,0}(\tau)+H_{3,1}(\tau)-H_{9,1}(\tau)+H_{15,0}(\tau)=\eta(\tfrac{\tau}{2})^{2}\eta(\tfrac{3\tau}{4})\eta(\tau)^{-1}\eta(\tfrac{3\tau}{2})^{-1}\eta(3\tau)$$
$$H_{3,0}(\tau)-H_{3,1}(\tau)-H_{9,1}(\tau)-H_{15,0}(\tau)=\eta(\tfrac{\tau}{2})^{2}\eta(\tfrac{3\tau}{4})^{-1}\eta(\tau)^{-1}\eta(\tfrac{3\tau}{2})^{2}$$
$$-H_{1,0}(\tau)+H_{1,1}(\tau)+H_{5,0}(\tau)-H_{7,0}(\tau)+H_{7,1}(\tau)-H_{11,1}(\tau)-H_{13,0}(\tau)+H_{19,1}(\tau)=-\eta(\tfrac{\tau}{4})^{3}\eta(\tfrac{\tau}{2})^{-1}$$
$$-H_{1,0}(\tau)-H_{1,1}(\tau)-H_{5,0}(\tau)+H_{7,0}(\tau)+H_{7,1}(\tau)+H_{11,1}(\tau)-H_{13,0}(\tau)+H_{19,1}(\tau)=$$
$$=-\eta(\tfrac{\tau}{4})\eta(\tfrac{3\tau}{4})^{-2}\eta(\tfrac{3\tau}{2})^{5}\eta(3\tau)^{-2}$$
$$-H_{1,0}(\tau)-H_{1,1}(\tau)-H_{5,0}(\tau)-H_{7,0}(\tau)-H_{7,1}(\tau)-H_{11,1}(\tau)+H_{13,0}(\tau)+H_{19,1}(\tau)$$
$$=-\eta(\tfrac{\tau}{4})^{-3}\eta(\tfrac{\tau}{2})^{8}\eta(\tau)^{-3}$$
$$-H_{1,0}(\tau)+H_{1,1}(\tau)+H_{5,0}(\tau)+H_{7,0}(\tau)-H_{7,1}(\tau)+H_{11,1}(\tau)+H_{13,0}(\tau)+H_{19,1}(\tau)$$
$$=-\eta(\tfrac{\tau}{4})^{-1}\eta(\tfrac{\tau}{2})^{3}\eta(\tfrac{3\tau}{4})^{2}\eta(\tau)^{-1}\eta(\tfrac{3\tau}{2})^{-1}$$

$a=5,\ b=12,\ c=2$

$$H_{2,0}(\tau)=\eta(2\tau)\eta(6\tau)^{-2}\eta(12\tau)^{5}\eta(24\tau)^{-2}$$
$$H_{2,2}(\tau)=2\eta(2\tau)\eta(12\tau)^{-1}\eta(24\tau)^{2}$$
$$H_{4,1}(\tau)=\eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau)^{3}$$
$$H_{6,0}(\tau)=2\eta(4\tau)^{2}\eta(6\tau)\eta(8\tau)^{-1}\eta(12\tau)^{-1}\eta(24\tau)$$
$$H_{6,2}(\tau)=2\eta(2\tau)\eta(4\tau)^{-1}\eta(8\tau)\eta(12\tau)^{2}\eta(24\tau)^{-1}$$
$$-H_{1,1}(\tau)+H_{5,1}(\tau)=\eta(\tfrac{\tau}{2})^{-1}\eta(\tau)^{3}\eta(2\tau)^{-1}\eta(3\tau)^{-1}\eta(6\tau)^{2}$$
$$H_{1,1}(\tau)+H_{5,1}(\tau)=\eta(\tfrac{\tau}{2})\eta(3\tau)^{-1}\eta(6\tau)^{2}$$
$$-H_{2,0}(\tau)+H_{2,2}(\tau)=-\eta(\tfrac{3\tau}{2})^{2}\eta(2\tau)\eta(3\tau)^{-1}$$
$$H_{2,0}(\tau)+H_{2,2}(\tau)=\eta(\tfrac{3\tau}{2})^{-2}\eta(2\tau)\eta(3\tau)^{5}\eta(6\tau)^{-2}$$

$$-2H_{2,0}(\tau)+H_{6,0}(\tau)=-2\eta(\tfrac{2\tau}{3})\eta(\tfrac{4\tau}{3})^{-1}\eta(\tfrac{8\tau}{3})\eta(4\tau)^{2}\eta(8\tau)^{-1}$$
$$H_{2,0}(\tau)+H_{6,0}(\tau)=\eta(\tfrac{2\tau}{3})^{-2}\eta(\tfrac{4\tau}{3})^{5}\eta(2\tau)\eta(\tfrac{8\tau}{3})^{-2}$$
$$-2H_{2,2}(\tau)+H_{6,2}(\tau)=2\eta(\tfrac{4\tau}{3})^{2}\eta(2\tau)\eta(\tfrac{8\tau}{3})^{-1}\eta(4\tau)^{-1}\eta(8\tau)$$
$$H_{2,2}(\tau)+H_{6,2}(\tau)=2\eta(\tfrac{4\tau}{3})^{-1}\eta(2\tau)\eta(\tfrac{8\tau}{3})^{2}$$
$$-H_{3,0}(\tau)+H_{3,2}(\tau)=-\eta(\tau)^{2}\eta(\tfrac{3\tau}{2})^{-1}\eta(2\tau)^{-1}\eta(3\tau)^{2}$$
$$H_{3,0}(\tau)+H_{3,2}(\tau)=\eta(\tau)^{2}\eta(\tfrac{3\tau}{2})\eta(2\tau)^{-1}\eta(3\tau)^{-1}\eta(6\tau)$$
$$-H_{3,1}(\tau)+H_{9,1}(\tau)=-\eta(\tfrac{\tau}{2})\eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau)\eta(3\tau)^{2}\eta(6\tau)^{-1}$$
$$H_{3,1}(\tau)+H_{9,1}(\tau)=\eta(\tfrac{\tau}{2})^{-1}\eta(\tau)^{2}\eta(3\tau)^{2}\eta(6\tau)^{-1}$$
$$-H_{6,0}(\tau)+H_{6,2}(\tau)=2\eta(\tfrac{\tau}{2})\eta(\tau)^{-1}\eta(\tfrac{3\tau}{2})^{-1}\eta(2\tau)\eta(3\tau)^{2}$$
$$H_{6,0}(\tau)+H_{6,2}(\tau)=2\eta(\tfrac{\tau}{2})^{-1}\eta(\tau)^{2}\eta(\tfrac{3\tau}{2})\eta(3\tau)^{-1}\eta(6\tau)$$
$$H_{1,0}(\tau)-H_{1,2}(\tau)-H_{7,0}(\tau)+H_{7,2}(\tau)=\eta(\tfrac{\tau}{2})^{-1}\eta(\tau)^{3}\eta(\tfrac{3\tau}{2})^{2}\eta(2\tau)^{-1}\eta(3\tau)^{-1}$$
$$-H_{1,0}(\tau)+H_{1,2}(\tau)-H_{7,0}(\tau)+H_{7,2}(\tau)=-\eta(\tfrac{\tau}{2})^{3}\eta(\tau)^{-1}$$
$$-H_{1,0}(\tau)-H_{1,2}(\tau)+H_{7,0}(\tau)+H_{7,2}(\tau)=-\eta(\tfrac{\tau}{2})\eta(\tfrac{3\tau}{2})^{-2}\eta(3\tau)^{5}\eta(6\tau)^{-2}$$
$$H_{1,0}(\tau)+H_{1,2}(\tau)+H_{7,0}(\tau)+H_{7,2}(\tau)=\eta(\tfrac{\tau}{2})^{-3}\eta(\tau)^{8}\eta(2\tau)^{-3}$$
$$2H_{1,1}(\tau)+H_{3,1}(\tau)-2H_{5,1}(\tau)+H_{9,1}(\tau)=\eta(\tfrac{\tau}{3})^{2}\eta(\tfrac{\tau}{2})^{-1}\eta(\tfrac{2\tau}{3})^{-1}\eta(\tau)^{2}$$
$$-H_{1,1}(\tau)-H_{3,1}(\tau)-H_{5,1}(\tau)+H_{9,1}(\tau)=-\eta(\tfrac{\tau}{3})^{-1}\eta(\tfrac{\tau}{2})\eta(\tfrac{2\tau}{3})^{2}$$
$$-H_{1,1}(\tau)+H_{3,1}(\tau)+H_{5,1}(\tau)+H_{9,1}(\tau)=\eta(\tfrac{\tau}{3})^{-1}\eta(\tfrac{\tau}{2})^{-1}\eta(\tfrac{2\tau}{3})^{2}\eta(\tau)^{3}\eta(2\tau)^{-1}$$
$$2H_{1,1}(\tau)-H_{3,1}(\tau)+2H_{5,1}(\tau)+H_{9,1}(\tau)=-\eta(\tfrac{\tau}{3})^{2}\eta(\tfrac{\tau}{2})\eta(\tfrac{2\tau}{3})^{-1}\eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau)$$
$$2H_{2,0}(\tau)-2H_{2,2}(\tau)-H_{6,0}(\tau)+H_{6,2}(\tau)=2\eta(\tfrac{\tau}{6})^{-1}\eta(\tfrac{\tau}{3})^{2}\eta(\tfrac{\tau}{2})\eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau)$$
$$-H_{2,0}(\tau)+H_{2,2}(\tau)-H_{6,0}(\tau)+H_{6,2}(\tau)=-\eta(\tfrac{\tau}{6})^{2}\eta(\tfrac{\tau}{3})^{-1}\eta(2\tau)$$
$$-2H_{2,0}(\tau)-2H_{2,2}(\tau)+H_{6,0}(\tau)+H_{6,2}(\tau)=-2\eta(\tfrac{\tau}{6})\eta(\tfrac{\tau}{3})^{-1}\eta(\tfrac{\tau}{2})^{-1}\eta(\tfrac{2\tau}{3})\eta(\tau)^{2}$$
$$H_{2,0}(\tau)+H_{2,2}(\tau)+H_{6,0}(\tau)+H_{6,2}(\tau)=\eta(\tfrac{\tau}{6})^{-2}\eta(\tfrac{\tau}{3})^{5}\eta(\tfrac{2\tau}{3})^{-2}\eta(2\tau)$$
$$-H_{3,0}(\tau)-H_{3,1}(\tau)-H_{3,2}(\tau)+H_{9,1}(\tau)=-\eta(\tfrac{\tau}{8})^{-1}\eta(\tfrac{\tau}{4})^{2}\eta(\tfrac{3\tau}{8})\eta(\tfrac{3\tau}{4})^{-1}\eta(\tfrac{3\tau}{2})$$
$$H_{3,0}(\tau)-H_{3,1}(\tau)+H_{3,2}(\tau)+H_{9,1}(\tau)=-\eta(\tfrac{\tau}{8})\eta(\tfrac{\tau}{4})^{-1}\eta(\tfrac{3\tau}{8})^{-1}\eta(\tfrac{\tau}{2})\eta(\tfrac{3\tau}{4})^{2}$$

$a=5,\ b=8,\ c=3$

$$H_{2,0}(\tau)=\eta(\tau)\eta(2\tau)^{-1}\eta(4\tau)\eta(6\tau)^{2}\eta(12\tau)^{-1}$$
$$H_{2,2}(\tau)=-\eta(\tau)\eta(6\tau)^{-1}\eta(12\tau)^{2}$$
$$H_{4,0}(\tau)=2\eta(\tau)\eta(2\tau)^{-1}\eta(3\tau)^{-1}\eta(4\tau)\eta(6\tau)^{2}$$

$$H_{4,2}(\tau) = \eta(3\tau)^2\eta(4\tau)\eta(6\tau)^{-1}$$
$$-H_{2,0}(\tau)+H_{2,2}(\tau) = -\eta(\tfrac{2\tau}{3})^{-1}\eta(\tau)\eta(\tfrac{4\tau}{3})^2$$
$$H_{2,0}(\tau)+2H_{2,2}(\tau) = \eta(\tfrac{2\tau}{3})^2\eta(\tau)\eta(\tfrac{4\tau}{3})^{-1}\eta(2\tau)^{-1}\eta(4\tau)$$
$$-H_{2,1}(\tau)+H_{6,1}(\tau) = -\eta(\tau)\eta(3\tau)^{-2}\eta(6\tau)^5\eta(12\tau)^{-2}$$
$$H_{2,1}(\tau)+H_{6,1}(\tau) = \eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau)^3\eta(3\tau)^2\eta(4\tau)^{-1}\eta(6\tau)^{-1}$$
$$-H_{2,3}(\tau)+H_{6,3}(\tau) = 2\eta(2\tau)^2\eta(3\tau)\eta(4\tau)^{-1}\eta(6\tau)^{-1}\eta(12\tau)$$
$$H_{2,3}(\tau)+H_{6,3}(\tau) = 2\eta(2\tau)^2\eta(3\tau)^{-1}\eta(4\tau)^{-1}\eta(6\tau)^2$$
$$-H_{4,0}(\tau)+H_{4,2}(\tau) = \eta(\tfrac{\tau}{3})^2\eta(\tfrac{2\tau}{3})^{-1}\eta(4\tau)$$
$$H_{4,0}(\tau)+2H_{4,2}(\tau) = 2\eta(\tfrac{\tau}{3})^{-1}\eta(\tfrac{2\tau}{3})^2\eta(\tau)\eta(2\tau)^{-1}\eta(4\tau)$$
$$-2H_{2,0}(\tau)-H_{2,3}(\tau)+H_{6,3}(\tau) = -2\eta(\tau/4)\eta(\tfrac{\tau}{2})^{-1}\eta(\tfrac{3\tau}{4})^{-1}\eta(\tau)\eta(\tfrac{3\tau}{2})^2$$
$$2H_{2,0}(\tau)-H_{2,3}(\tau)+H_{6,3}(\tau) = 2\eta(\tfrac{\tau}{4})^{-1}\eta(\tfrac{\tau}{2})^2\eta(\tfrac{3\tau}{4})\eta(\tfrac{3\tau}{2})^{-1}\eta(3\tau)$$
$$-H_{2,1}(\tau)-2H_{2,2}(\tau)+H_{6,1}(\tau) = -\eta(\tfrac{3\tau}{4})^2\eta(\tau)\eta(\tfrac{3\tau}{2})^{-1}$$
$$-H_{2,1}(\tau)+2H_{2,2}(\tau)+H_{6,1}(\tau) = -\eta(\tfrac{3\tau}{4})^{-2}\eta(\tau)\eta(\tfrac{3\tau}{2})^5\eta(3\tau)^{-2}$$
$$H_{1,0}(\tau)+H_{1,3}(\tau)-H_{3,3}(\tau)+H_{5,0}(\tau) = \eta(\tfrac{\tau}{4})\eta(\tfrac{\tau}{2})^{-1}\eta(\tau)\eta(\tfrac{3\tau}{2})^2\eta(3\tau)^{-1}$$
$$-H_{1,0}(\tau)+H_{1,3}(\tau)+H_{3,3}(\tau)+H_{5,0}(\tau) = -\eta(\tfrac{\tau}{4})^{-1}\eta(\tfrac{\tau}{2})^2\eta(\tfrac{3\tau}{2})^2\eta(3\tau)^{-1}$$
$$H_{1,1}(\tau)+H_{1,2}(\tau)-H_{3,1}(\tau)+H_{5,2}(\tau) = -\eta(\tfrac{\tau}{4})\eta(\tfrac{3\tau}{2})^{-1}\eta(3\tau)^2$$
$$H_{1,1}(\tau)-H_{1,2}(\tau)+H_{3,1}(\tau)+H_{5,2}(\tau) = \eta(\tfrac{\tau}{4})^{-1}\eta(\tfrac{\tau}{2})^3\eta(\tau)^{-1}\eta(\tfrac{3\tau}{2})^{-1}\eta(3\tau)^2$$
$$H_{2,1}(\tau)-H_{2,3}(\tau)-H_{6,1}(\tau)+H_{6,3}(\tau) = \eta(\tfrac{\tau}{3})^{-2}\eta(\tfrac{2\tau}{3})^5\eta(\tau)\eta(\tfrac{4\tau}{3})^{-2}$$
$$-H_{2,1}(\tau)+H_{2,3}(\tau)-H_{6,1}(\tau)+H_{6,3}(\tau) = -\eta(\tfrac{\tau}{3})^2\eta(\tfrac{2\tau}{3})^{-1}\eta(\tau)^{-1}\eta(2\tau)^3\eta(4\tau)^{-1}$$
$$-2H_{2,1}(\tau)-H_{2,3}(\tau)+2H_{6,1}(\tau)+H_{6,3}(\tau) = -2\eta(\tfrac{\tau}{3})\eta(\tfrac{2\tau}{3})^{-1}\eta(\tfrac{4\tau}{3})\eta(2\tau)^2\eta(4\tau)^{-1}$$
$$2H_{2,1}(\tau)+H_{2,3}(\tau)+2H_{6,1}(\tau)+H_{6,3}(\tau) = 2\eta(\tfrac{\tau}{3})^{-1}\eta(\tfrac{2\tau}{3})^2\eta(2\tau)^3\eta(4\tau)^{-1}$$

$a=5,\ b=6,\ c=4$

$$H_{1,2}(\tau) = \eta(\tau)\eta(6\tau)^{-1}\eta(12\tau)^2$$
$$H_{3,0}(\tau) = \eta(2\tau)^2\eta(3\tau)\eta(4\tau)^{-1}\eta(6\tau)^{-1}\eta(12\tau)$$
$$H_{3,2}(\tau) = \eta(\tau)\eta(2\tau)^{-1}\eta(4\tau)\eta(6\tau)^2\eta(12\tau)^{-1}$$
$$-H_{1,0}(\tau)+H_{1,4}(\tau) = -\eta(\tau)^3\eta(2\tau)^{-1}$$
$$H_{1,0}(\tau)+H_{1,4}(\tau) = \eta(\tau)\eta(3\tau)^{-2}\eta(6\tau)^5\eta(12\tau)^{-2}$$
$$-2H_{1,2}(\tau)+H_{3,2}(\tau) = \eta(\tfrac{2\tau}{3})^2\eta(\tau)\eta(\tfrac{4\tau}{3})^{-1}\eta(2\tau)^{-1}\eta(4\tau)$$
$$H_{1,2}(\tau)+H_{3,2}(\tau) = \eta(\tfrac{2\tau}{3})^{-1}\eta(\tau)\eta(\tfrac{4\tau}{3})^2$$
$$-H_{2,1}(\tau)+H_{2,3}(\tau) = -\eta(\tfrac{\tau}{2})\eta(2\tau)$$
$$H_{2,1}(\tau)+H_{2,3}(\tau) = \eta(\tfrac{\tau}{2})^{-1}\eta(\tau)^3$$

$$-H_{3,0}(\tau)+H_{3,2}(\tau)=\eta\left(\tfrac{\tau}{4}\right)\eta\left(\tfrac{\tau}{2}\right)^{-1}\eta\left(\tfrac{3\tau}{4}\right)^{-1}\eta(\tau)\eta\left(\tfrac{3\tau}{2}\right)^{2}$$

$$H_{3,0}(\tau)+H_{3,2}(\tau)=\eta\left(\tfrac{\tau}{4}\right)^{-1}\eta\left(\tfrac{\tau}{2}\right)^{2}\eta\left(\tfrac{3\tau}{4}\right)\eta\left(\tfrac{3\tau}{2}\right)^{-1}\eta(3\tau)$$

$$H_{1,0}(\tau)-2H_{1,2}(\tau)+H_{1,4}(\tau)=\eta\left(\tfrac{3\tau}{4}\right)^{2}\eta(\tau)\eta\left(\tfrac{3\tau}{2}\right)^{-1}$$

$$H_{1,0}(\tau)+2H_{1,2}(\tau)+H_{1,4}(\tau)=\eta\left(\tfrac{3\tau}{4}\right)^{-2}\eta(\tau)\eta\left(\tfrac{3\tau}{2}\right)^{5}\eta(3\tau)^{-2}$$

$$-H_{1,0}(\tau)-H_{1,4}(\tau)+H_{3,0}(\tau)=-\eta\left(\tfrac{\tau}{3}\right)\eta\left(\tfrac{2\tau}{3}\right)^{-1}\eta\left(\tfrac{4\tau}{3}\right)\eta(2\tau)^{2}\eta(4\tau)^{-1}$$

$$H_{1,0}(\tau)+H_{1,4}(\tau)+2H_{3,0}(\tau)=\eta\left(\tfrac{\tau}{3}\right)^{-2}\eta\left(\tfrac{2\tau}{3}\right)^{5}\eta(\tau)\eta\left(\tfrac{4\tau}{3}\right)^{-2}$$

$a=5,\ b=3,\ c=8$

$$H_{1,0}(\tau)=\eta(2\tau)^{3}\eta(4\tau)^{-1}$$

$$H_{2,2}(\tau)=\eta(\tau)\eta(4\tau)$$

$$H_{1,1}(\tau)-H_{1,3}(\tau)-H_{1,5}(\tau)+H_{1,7}(\tau)=\eta\left(\tfrac{\tau}{4}\right)\eta(\tau)$$

$$H_{1,1}(\tau)+H_{1,3}(\tau)+H_{1,5}(\tau)+H_{1,7}(\tau)=\eta\left(\tfrac{\tau}{4}\right)^{-1}\eta\left(\tfrac{\tau}{2}\right)^{3}$$

（注１） $b=1$ なら H_{mn} はすべて 0 となる。

又，$(a, b, c)=(3, 2, 4)$ は $(3, 4, 2)$

$(5, 4, 6)$ は $(5, 12, 2)$

$(5, 2, 12)$ は $(5, 6, 4)$

の場合と，すべての H_{mn} が一致するので，表より省いた。

（注２） 上記の表で，下記のものを除き一次独立な H_{mn} はすべて尽されている。

$a=4,\ b=15,\ c=1$ $\quad H_{30}(\tau),\ H_{01}(\tau)$

$$H_{12}(\tau)=q^{\frac{43}{60}}\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{15n+3})(1-q^{15n+12})(1-q^{15n+15})\cdot\eta(\tau$$

$a=4,\ b=5,\ c=3$

$$H_{21}(\tau)=q^{\frac{7}{60}}\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{15n+6})(1-q^{15n+9})(1-q^{15n+15})\cdot\eta(\tau.$$

及び $H_{10}(\tau),\ H_{23}(\tau).$