数理解析研究所講究録
517巻 1984年 105-108

ある種の無限積について

東洋大・工　豊泉正男　(Masao Toyoizumi)

$\lambda > 0$ に対し．$q(\lambda) = \exp(2\pi i z/\lambda)$ $(\mathrm{Im}(z) > 0)$ とおくとき．

$$\eta(z) = \exp(\pi i z/12) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q(1)^n)$$

と

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q(2)^{2n})(1 + q(2)^{2n-1})^2$$

が weight $\frac{1}{2}$ の modular form であることは．よく知られている。本稿では．ある種の無限積で定義された modular form を決定する。なお．証明等は．[2] を参照して下さい。

まず．$a \in \mathbb{R}$

$\mathbb{Z} \supset \{a(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ で．$a(n) = O(n^c)$ $({}^{\exists}c > 0)$

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

$$\xi(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s) \varphi(s) \zeta(s+1)$$ とおく．

さらに.

$$f(z) = \exp(2\pi i a z)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q(\lambda)^{n}\right)^{a(n)} \tag{1}$$

とおくと. $f(z)$ は上半平面で正則な函数になる。(1) の対数をとり. Melin 変換を使えば. 次を得る。

<u>補題1</u>　$k \in \mathbb{R}$ のとき.

(A)　$f\left(-\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{z}{i}\right)^{k} f(z)$

$\Longleftrightarrow$

(B)　$\xi(s) + \frac{k}{s^2} + 2a\pi\left(\frac{1}{1-s} + \frac{1}{1+s}\right)$ が任意の垂直な帯領域で有界な正則函数で. $\xi(s) = \xi(-s)$

条件 (B) を $\varphi(s)$ でいいなおすと.

<u>補題2</u>　$k \in \mathbb{R}$ のとき.

(A) $\Longleftrightarrow$ (C)　(1) $\varphi(s)$ が全平面で有理型な函数に解析接続できる

(2) $s(s-1)\varphi(s)\zeta(s+1)$ が位数有限な整函数

(3) $\lambda^{s}\varphi(s)\zeta(-s) = \lambda^{-s}\varphi(-s)\zeta(s)$

(4) $\operatorname*{Res}_{s=1}\varphi(s) = \frac{24a}{\lambda}$,　$\varphi(0) = -k$

次に. Dirichlet 級数に関する補題を述べます。

補題3　$\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で収束する Dirichlet 級数 $D(s)(\neq 0)$ が全平面で有限コの poles をもつ位数有限な有理型函数に解析接続でき．$\lambda^{s} D(s) = \lambda^{-s} D(-s)$

$\Longrightarrow$ $\lambda^2 \in \mathbb{N}$ で．

$$D(s) = \sum_{n \mid \lambda^2} \frac{C(n)}{n^s}\ ,\quad \text{但し．} C(n) = C(\lambda^2/n)\ (\forall n \mid \lambda^2)$$

以下．次を仮定しておく．

（仮定）$\varphi(s)$ が全平面で有限コの poles をもつ．有理型函数に解析接続でき．$\varphi(s) \neq 0$ ．

このとき．補題2と補題3から次がでる。

定理　$\exists k \in \mathbb{R}$ such that

$$f\left(-\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{z}{i}\right)^{k} f(z) \tag{2}$$

$\Longrightarrow$

$\lambda^2 \in \mathbb{N}$ で．

$$f(z) = \exp(2\pi i a z) \prod_{m \mid \lambda^2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q(\lambda)^{nm})^{C(m)} \tag{3}$$

ここで．$C(m)\ (m \mid \lambda^2) \subset \mathbb{Z}$ で．$C(m) = C(\lambda^2/m)\ (\forall m \mid \lambda^2)$

$$a = \frac{\lambda}{24} \sum_{m \mid \lambda^2} \frac{C(m)}{m} \tag{4}$$

$$k = \frac{1}{2} \sum_{m \mid \lambda^2} c(m) \tag{5}$$

逆に，$\lambda^2 \in \mathbb{N}$ で，$c(m)\,(m \mid \lambda^2) \subset \mathbb{Z}$，$c(m) = c(\lambda^2/m)$ $(\forall m \mid \lambda^2)$ のとき．$f(z)$，a，k を (3)，(4)，(5) で定めれば，$f(z)$ は，(2) をみたす。

<u>系</u>　$\lambda = 1$ で，$\exists k \in \mathbb{R}$ such that

$$f\left(-\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{z}{i}\right)^{k} f(z)$$

$$\Longrightarrow$$

$$f(z) = \eta(z)^{24a}$$

これは，[1] の結果である。

[1] On certain infinite products, to appear in Mathematika.

[2] On certain infinite products II, preprint.