数理解析研究所講究録
517巻 1984年 101-104

あるDirichlet級数について

慶大理工　江上繁樹

0. $x>0$ に対して $[x]$ で Gauss の整数部をあらわす。

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\sqrt{n}]}{n^s} \qquad \left(\operatorname{Re} s > \frac{3}{2}\right)$$

の解析接続の問題が [1] において述べられている。筆者は [2] において $f(s)$ は全平面に有理型に解析接続されることを示したが、ここでは一つの別証明を述べる。

1. r を自然数とし

$$\varphi_r(t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^r t} \qquad (t>0)$$

とおく。

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{e^t-1}$$

であり、$r=2$ のときにはテータ級数であることに注意する。逆 Mellin 変換により

$$\varphi_r(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(s)\,\zeta(rs)\,t^{-s}\,ds$$

積分路を左に移動することにより，容易に次を得る

<u>Lemma</u>. 任意の $k \in \mathbb{N}$，$\varepsilon > 0$ に対し

$$\varphi_r(t) = r \cdot \Gamma\left(\frac{1}{r}\right) t^{-\frac{1}{r}} + \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{n!} \zeta(rn) t^n + O(t^{k+1-\varepsilon})$$

$(t \to 0)$

<u>2.</u> $f(s)$ を一般化して証明を行う．$r \in \mathbb{N}$ に対し

$$f_r(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(m^r + n)^s}$$

とおくと．$f_r(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n^{\frac{1}{r}}]}{n^s}$ であるから $\mathrm{Re}\, s > 1 + \frac{1}{r}$ で収束する．($f_2(s) = f(s)$)

$$\begin{aligned} g_r(s) &\Leftarrow f_r(s) - \zeta(rs) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^r + n)^s} \end{aligned}$$

を考えれば十分．

$$\begin{aligned} g_r(s)\Gamma(s) &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(m^r + n)t} \right) t^{s-1} dt \\ &= \int_0^{\infty} \varphi_1(t) \varphi_r(t) t^{s-1} dt \quad \text{------------} (*) \end{aligned}$$

(*) の解析接続のためには

$$\int_0^1 \varphi_1(t)\varphi_r(t)\, t^{s-1}\, dt$$

を考えれば十分であるが，Lemma により

$$\varphi_1(t)\varphi_r(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n t^{\alpha_n} + O(t^{\alpha_{N+1}-\varepsilon})$$

$$\left(\alpha_1 = 1+\tfrac{1}{r} < \alpha_2 < \cdots\cdots \quad , \quad \alpha_j \in \mathbb{Z}+\tfrac{1}{r}\mathbb{Z} \right).$$

従って

$$\int_0^1 \varphi_1(t)\varphi_r(t)\, t^{s-1}\, dt$$

$$= \sum_{n=1}^{N} A_n \int_0^1 t^{s+\alpha_n-1} dt + \int_0^1 R_N(t)\, t^{s-1}\, dt , \qquad \text{——— } (**)$$

ただし $R_N(t) = \varphi_1(t)\varphi_r(t) - \sum_{n=1}^{N} A_n t^{\alpha_n}$.

(**) の第一項は有理関数，第２項は $\mathrm{Re}\, s > -\alpha_n+\varepsilon$ で正則であるから，$g_r(s)\Gamma(s)$ が全平面に有理型に解析接続されることがわかる．　(証明終)

<u>Remark</u>. 上の証明法は P. Cassou-Noguès [3] にほぼ従う．(Lemma の証明は少し異なる)．また，結果自身も [3] の一般論に含まれる．そこでは $\sum_{(n_1,\cdots,n_\ell)\in\mathbb{N}^\ell} P(n_1,\cdots,n_\ell)^{-s}$ の形の Dirichlet

級数（$P(\cdot, \cdots)$ はある条件をみたす多項式）の解析接続が Lemma に相当する結果を Euler-Maclaurin の和公式を使って示すことにより証明されている。また、講演後、岡山大、鹿野先生から Hardy-Littlewood の研究の中でも同様な級数が扱われているとの御教示を頂いた。

[1]. 三井孝美，行列の分割問題に現れる特殊関数について，日本数学会代数分科会（1982，三重大）講演アブストラクト

[2] S. Egami, On the analytic continuation of certain Dirichlet series, Comm. Math. Univ.

[3] P. Cassou-Noguès, Prolongement de certaines séries de Dirichlet, Amer. J. Math. (1983) pp. 13-58

————, Valeurs aux entiers négatifs de séries de Dirichlet associées à un polynôme I, J. Number Theory 14 (1982), pp. 32-64