数理解析研究所講究録
517巻 1984年 81-90

Balasubramanian の Multiple integration process について.

立教大・理　松本 耕二
(Kohji MATSUMOTO)

R. Balasubramanian は[1]において，ある種の二重指数和を評価する新しい技法を開発して"Multiple integration process"(以下，本稿ではM.I.P.と略記)と名づけ，Riemann zeta 函数の二乗平均の残余項の評価に応用した．[1]で扱われた問題は，

$$\int_1^T \left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt = T\log T-(1+\log 2\pi-2\gamma)T+O(T^{\theta+\varepsilon})$$

(ここに γ は Euler の定数，ε は任意に小さい正数)なる漸近式の残余項の改良であって，Balasubramanian は $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ に関する当時最高の評価であった $\zeta(\frac{1}{2}+it)=O(t^{\frac{173}{1067}+\varepsilon})$ (Kolesnik [2])をM.I.P.と結びつけ，$\theta=\frac{346}{1067}$ をえた．これは，Titchmarsh [3] の結果 $\theta=\frac{5}{12}$ を，殆んど半世紀ぶりに更新した大結果であって，M.I.P.の輝かしい成果であったといえよう．

(念のために注意しておくが，M.I.P.というのはむしろ技術的な手段であって，[1]における議論の流れはTitchmarshのアイデアを踏襲したものである．更にいえば，Titchmarshもまた，Hardy-Littlewood以来の流れに沿っているのである．二乗平均に対する漸近式を(残余項$O(T)$の形で)はじめて出したのはHardy-Littlewood [4]であって，それは近似函数等式に本質的に依存するものだった．その後Ingham [5]は$\theta=\frac{1}{2}$をえたが，これは近似函数等式を用いて[4]のアイデアに従う限りの自然限界ともいえる結果であって，それ以上θの値を改良するためには，近似函数等式そのものの精密化が必要だった．それは1932年，Siegel [6]によってなされた．そしてその直後，近似函数等式の代りにこのRiemann-Siegel formulaを用いて，$\theta=\frac{5}{12}$に達したのがTitchmarshなのである)

M.I.P.が他の問題に対してどの程度有効なのかはまだよくわからないが，どうもBalasubramanianの方法そのままでは，適当範囲はそれほど広いとはいえないようである．大小比較をする必要性から，ある種の"係数が実数"という条件がいるし，またある場合には，部分和法が使えなくなって議論が進行しなくなるケースもおこってくる．(この後者の事実は，Heath-Brown氏から手紙で指摘されてはじめて知った)それにもかかわらず，実と限らない任意の原始指標に関するL-

函数について[1]の結果の拡張が可能である([7], [8].).
もっと別の問題に対する応用として，最近筆者は，Dirichlet 級数に関する F. Carlson の定理が，ある場合には M.I.P. を用いて精密化できることを発見した([9]). これ以外に M.I.P. を使った研究があるかどうか，筆者は知らない.

論文[1]は，決して読みやすいものではなく，またその M.I.P. を用いた部分はかなり後ろの方(pp. 564−570)に出てくるという事情もあるので，ここでは M.I.P. の基本的な方法を紹介しようと思うが，細かい技術的な計算を追うよりも，その大要を述べる[redacted]にとどめる.

[Step 1.]

[1]において M.I.P. によって評価される量は次の二つである：

$$\sum_{n=1}^{K}\sum_{m<n}\frac{\sin(T\log(n/m))}{(mn)^{\frac{1}{2}}\log(n/m)}$$

$$\sum_{n=1}^{K}\sum_{\substack{m\neq n\\ m\leq K}}\frac{\sin(2\theta_1(T)-T\log mn)}{(mn)^{\frac{1}{2}}(2\theta_1'(T)-\log mn)},$$

ただしここに $K=\left[\left(\frac{1}{2\pi}T\right)^{\frac{1}{2}}\right]$, $\theta_1(T)=\frac{T}{2}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2}-\frac{\pi}{8}$ である. 基本的なアイデアは全く同じであるので，ここでは前者の評価法([1], Lemmas 23 [redacted]-26 および Lemma 33)を述べるが，その前にまず次の一般的な Lemma が必要である.

Lemma.([1], Lemma 22)

$f(t)\geq 0$, $f(t)=g_1(t)+g_2(t)$, $\alpha\in\mathbb{N}$ とすると,

$$\int_{T-U}^{T+U} f(t)\,dt \ll \max_{|u_i|\leq U/4\alpha}\int_{T-2U+u_1+u_2+\cdots+u_\alpha}^{T+2U+u_1+u_2+\cdots+u_\alpha} g_1(t)\,dt$$

$$+U^{-\alpha}\int_{-U/4\alpha}^{U/4\alpha} du_\alpha \int_{-U/4\alpha}^{U/4\alpha} du_{\alpha-1}\cdots\cdots\int_{-U/4\alpha}^{U/4\alpha} du_1 \int_{T-2U}^{T+2U} g_2(t+u_1+\cdots+u_\alpha)\,dt.$$

これは,初等的な計算でえられるごく簡単な補題であるが,Balasubramanian のアイデアの鍵となっており,M.I.P.の名前の由来ともなっているものである.

[Step 2.]

さて Balasubramanian は,和

$$\psi(t)=\sum_{m=1}^{K}\sum_{m<n}\frac{\sin(t\log(n/m))}{(mn)^{\frac{1}{2}}\log(n/m)}$$

を考える.($T-100H\leq t\leq T+100H$) 最終的にほしいのは値 $\psi(T)$ の評価であるが,そのために T の近傍における実函数 $\psi(t)$ の挙動をみるのである.($H\ll T$). 結果的には,任意に小さい正数 δ に対して,

$$\psi(T)=O(HT^{50\delta}) \qquad (1)$$

がえられる([1], Lemma 26)のであるが,そのためにまず,

$$\psi(T_0)=O(HT^{50\delta}) \qquad (2)$$

をみたす T_0 が，$T-4H \leq T_0 \leq T+4H$ の範囲に存在することを示す（このあたりで出てくる，100, 50, 4 といった数には，もちろんあまり深い意味はない）

ここで $\psi(t) \in \mathbb{R}$ ということが本質的に重要となる．まず $[T-4H,\ T+4H]$ の範囲で $\psi(t)=0$ となる点があれば，その点を T_0 とすればよい．そうでなければ $\psi(t)$ の符号が $[T-4H,\ T+4H]$ の間で一定ということだから，たとえば $\psi(t)>0$ としてよい．すると $\psi(t)=f(t)$ として［Step 1］の Lemma が使える．

$$\psi(t) = \sum_{m<HT^{10\delta}} \sum_{n<m} + \sum_{(M)>HT^{10\delta}} \sum_{M<m\leq 2M} \sum_{0<m-n<MH^{-1+\delta}}$$

$$+ \sum_{(M)>HT^{10\delta}} \sum_{M<m\leq 2M} \sum_{m-n>MH^{-1+\delta}}$$

$$= S_1(t) + S_2(t) + S_3(t)$$

とわければ，Lemma によって，

$$\int_{T-H}^{T+H} \psi(t)\,dt \ll \max_{|u_i|\leq H/4\alpha} \int_{T-2H+u_1+\cdots+u_\alpha}^{T+2H+u_1+\cdots+u_\alpha} (S_1(t)+S_2(t))\,dt$$

$$+ H^{-\alpha} \int_{-H/4\alpha}^{H/4\alpha} du_\alpha \cdots \int_{-H/4\alpha}^{H/4\alpha} du_1 \int_{T-2H}^{T+2H} S_3(t+u_1+\cdots+u_\alpha)\,dt \qquad (3)$$

と書ける．

ここでまず，$S_1(t)$ については "trivial bound" $O(HT^{10\delta})$ を

使う．$S_2(t)$ に関しては次の［Step 3］でのべる．$S_3(t)$ の入った積分については，この積分を実行してやることにより，

$$\ll H^{-\alpha}\sum_{(M)>HT^{10\delta}}\ \sum_{M<m\le 2M}\ \sum_{m-n\ge MH^{-1+\delta}} Y_1\,(mn)^{-\frac{1}{2}}\left(\log\frac{m}{n}\right)^{-\alpha-2}$$

となる．ここに Y_1 は，積分によってでてくる sin と cos の和であり，その項数 $\ll_\alpha 1$，従って $Y_1\ll_\alpha 1$ を得る．$\alpha=\alpha(\delta)$ を十分大きくとれば，上式 $\ll_\delta 1$ とできることがわかる．

［Step 3］.

$S_2(t)$ を評価するため，Balasubramanian は次の評価を使う：$T-100H\le t\le T+100H$ において一様に，

$$\sum_{r<(M/H)^{1+\delta}}\ \sum_{M<m\le 2M}\frac{\exp\{it\log((m-r)/m)\}}{(m(m-r))^{\frac{1}{2}}\log((m-r)/m)}=O(HT^{50\delta}) \qquad (4)$$

が成り立つ．

この評価が成り立つような H が存在することは，もちろん自明ではない．Balasubramanian は van der Corput の方法を用いて，$H=T^{27/82+\varepsilon}$ として (4) が成り立つことを示し（[1], Lemma 33. そこで述べられるアイデアは Titchmarsh [10] によるものである），さらに Kolesnik の結果 [2] によれば $H=T^{346/1067+\varepsilon}$ とできることを示唆している．

さて (4) を用いると，$S_2(t)=O(HT^{50\delta})$ が容易にえられ，以上えられた結果を (3) にすべて代入することにより，

$$\int_{T-H}^{T+H} \psi(t)\,dt \ll H^2 T^{50\delta}$$

をうる．よって $[T-H,\ T+H]$ の間にある T_0 が存在して，$\psi(T_0)$ $= O(HT^{50\delta})$ となっていなければならない．即ち (2) が証明された．([1], Lemma 23)

[Step 4]

(2)：$\psi(T_0) \ll HT^{50\delta}$ から，(1)：$\psi(T) \ll HT^{50\delta}$ を導くには，$\psi(T) - \psi(T_0)$ があまり大きくはなりえないことを示せばよい．実際 Balasubramanian は [1], Lemma 25 において，

$$\psi(T) - \psi(T_0) = O(HT^{50\delta}) \qquad (5)$$

を示す．(2) と (5) から明らかに (1) を得る．

(5) の証明は，次のようにして行なわれる．

$$\psi(T) - \psi(T_0) = \int_{T_0}^{T} \psi'(t)\,dt$$

$$= \int_{T_0}^{T} \sum_{m=1}^{K} \sum_{m<n} \frac{\cos(t \log(m/n))}{(mn)^{\frac{1}{2}}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{T_0}^{T} \sum_{m=1}^{K} \sum_{n=1}^{K} \frac{\cos(t \log(m/n))}{(mn)^{\frac{1}{2}}}\,dt$$

$$+ O((T-T_0)\log T)$$

この第一項の積分の評価のために，再び [Step 1] の Lemma が用いられる．

[Step 5]

まず $T-100H \leq t \leq T+100H$ で，

$$\sum_{m=1}^{K}\sum_{n=1}^{K}\frac{\cos(t\log(m/n))}{(mn)^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{Re}\left|\sum_{m=1}^{K} m^{-\frac{1}{2}+it}\right|^2 \geq 0$$

であることに注意すれば，M.I.P. の基本 Lemma が適用できることがわかる．そこで

$$\sum_{m=1}^{K}\sum_{n=1}^{K}\frac{\cos(t\log(m/n))}{(mn)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \sum_{m=1}^{K}\frac{1}{m} + 2\sum_{m\leq HT^{10\delta}}\sum_{n<m}\frac{\cos(t\log(m/n))}{(mn)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+2\sum_{(M)>HT^{10\delta}}\sum_{M<m\leq 2M}\sum_{0<m-n<MH^{-1+\delta}}$$

$$+2\sum_{(M)>HT^{10\delta}}\sum_{M<m\leq 2M}\sum_{m-n\geq MH^{-1+\delta}}$$

$$= S_4(t)+S_5(t)+S_6(t)+S_7(t)$$

と分けて，
$$\int_{T-4H}^{T+4H}\sum_{m=1}^{K}\sum_{n=1}^{K}\frac{\cos(t\log(m/n))}{(mn)^{\frac{1}{2}}}\,dt$$

$$\ll \max_{|u_i|\leq H/\alpha}\int_{T-8H+u_1+\cdots+u_\alpha}^{T+8H+u_1+\cdots+u_\alpha}(S_4(t)+S_5(t)+S_6(t))\,dt$$

$$+H^{-\alpha}\int_{-H/\alpha}^{H/\alpha}du_\alpha\cdots\int_{-H/\alpha}^{H/\alpha}du_1\int_{T-8H}^{T+8H}S_7(t+u_1+\cdots+u_\alpha)\,dt$$

とする．あとは[Step 2][Step 3]と同様に，$S_4(t)$, $S_5(t)$については"trivial bound"を用い，$S_6(t)$は積分してから式(4)を使い，$S_7(t)$の入った積分は積分を実行したあとでαを十分大きくとることによって，求める評価(5)が出てくることになる．([1], Lemma 24)．以上がBalasubramanianによる$\psi(T)$の評価の道筋である．

文献

[1] R. Balasubramanian, An improvement on a theorem of Titchmarsh on the mean square of $|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$, Proc. London Math. Soc. (3) 36 (1978) 540-576.

[2] G.A. Kolesnik, On the estimation of some exponential sums, Acta Arith. 25 (1973) 7-30. (in Russian)

[3] E.C. Titchmarsh, On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann (V), Quart. J. Math. Oxford 5 (1934) 195-210.

[4] G.H. Hardy - J.E. Littlewood, Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes, Acta Math. 41 (1918) 119-196.

[5] A.E. Ingham, Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function, Proc. London Math. Soc. (2) 27 (1926) 273-300.

[6] C.L. Siegel, Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie, Quellen und Studien zur Geschichte der Math. Astr. und Physik 2 (1932) 45–80.

[7] K. Matsumoto, The mean square of Dirichlet L-functions, Proc. Japan Acad. 58 (1982) 443–446.

[8] ——, DirichletのL-函数の2乗平均について, In: "Fourier analysis on arithmetical sequences", 数理研講究録.

[9] ——, On a theorem of Carlson for Dirichlet series of finite order, in preparation.

[10] E.C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function, Oxford (1951).

付記. 講演では[9]の内容について話しましたが，その後証明の中にミスが見つかり，現在修正原稿を準備中です．そうした事情もあって，この稿では[9]の内容にまでは触れないことにしました．しかしこの稿をM.I.P.の解説を中心にまとめたのは，当初からの予定です．雑な解説になりましたが，詳細にたちいると相当のページ数を要することになるので，御了承ください．