数理解析研究所講究録
517巻 1984年 62-75

On Average of Some Arithmetical q-Additive Functions

J.L. Mauclaire （C.N.R.S.，早稲田大学）
Leo Murata （明治学院大学）

自然数上で定義された複素数値関数のことを，我々は「数論的関数」と呼んでいる。数論的関数の研究では，その平均値，$x^{-1}\sum_{n\le x} f(n)$，をおめる問題が重要である。最近，我々は，「q-additive function」と呼ばれる特殊な数論的関数に対して，その平均値を詳しく与えるかなり一般的な結果を得たので，それをここで紹介する。

1. q-additive function の定義

qは 2 以上の自然数とする。一般に自然数 n は q-進表示することが出来る：

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(n)\cdot q^k, \quad 0 \le a_k(n) \le q-1.$$

この表示を用いて，次の定義を置く。

$\boxed{\text{定義}}$ 数論的関数 $g(n)$ が更に次の条件を満たす時，$g(n)$ は q-additive であると言う。

$g(0) = 0$ で，更に n が上の q-進表示を持つ

時，常に $\quad g(n) = \sum_{k=0}^{\infty} g(a_k(n) \cdot q^k)$ が成立。

この定義から分る通り，$\{ r \cdot q^k \ ; \ 1 \leqslant r \leqslant q-1, \ k \in \mathbb{N} \}$ なる集合の上で g の値を与えれば，上の関係式によって q-additive function $g(n)$ が一意的に決まるし，逆も正しい。

2. 『Sum of Digits』に関する結果

q-additive function の最も有名な例は『Sum of digits』と呼ばれる関数であろう。この関数を以下 $S_q(n)$ で表わすが，定義は次の通り．

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(n) \cdot q^k \quad \text{の時} \quad S_q(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(n) \ .$$

つまり，n を q-進表示した時に各桁に現われる数字をすべて加えたものが $S_q(n)$ である。この関数は度々激減するが，大体漸増してゆく。

$S_q(n)$ の平均値については，いくつもの研究結果が発表されているが，次の Delange の結果は著しいものである。

$\boxed{\text{定理 1}}$ （H. Delange, 1975 [1]）

1） m を自然数とする時，次が成立する。

6

$$\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \frac{q-1}{2\log q}\log m + F\left(\frac{\log m}{\log q}\right).$$

ここで $F(x)$ は周期 1 を持つ周期関数である。($F(x)$ の定義式は無限級数を用いた複雑なものである。これは以下の話とあまり関係がないので，ここでは省略する。)

2) $F(x)$ は周期関数なので Fourier 展開が出来るが，その時の Fourier 係数は次で与えられる：

$$F(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k \cdot e^{2\pi i k x}$$

とおいた時，$\zeta(s)$ を Riemann の zeta-function として，

$$C_0 = \frac{q-1}{2\log q}(\log 2\pi - 1) - \frac{q+1}{4},$$

$$C_k = i\,\frac{q-1}{2k\pi}\left(1+\frac{2k\pi i}{\log q}\right)^{-1}\zeta\left(\frac{2k\pi i}{\log q}\right), \quad k \neq 0 \;//$$

この結果から，「$S_q(n)$ の平均値は $\log m$ の order で増大し，その error term は $O(1)$ である事」，更には「この error term の $O(1)$ はこれ以上改良は出来ない事，つまり $\Omega(1)$ である事」等が読みとれる。

3. <u>Delange の証明の out line.</u>

§5 において我々はこの Delange の結果を含む，より一般的な定理を示すが，我々の方法は Delange の方法と全く異

なっている。参考の為，ここで，ごく大ざっぱに Delange の証明方針を見てみることにする。

1° Delange は次の等式から出発した。

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(n) \cdot q^k \quad なら \quad a_k(n) = \left[\frac{n}{q^k}\right] - q\left[\frac{n}{q^{k+1}}\right].$$

これより直ちに

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{m-1} a_k(n) = \frac{q-1}{2}m + \int_0^m \left(\left[\frac{t}{q^k}\right] - q\left[\frac{t}{q^{k+1}}\right] - \frac{q-1}{2}\right) dt.$$

従って

$$\sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{\log m}{\log q}\right]} \left(\sum_{n=0}^{m-1} a_k(n)\right)$$

に (1) 式を代入すると $\frac{q-1}{2}m$ の部分の和から main term の $\frac{q-1}{2\log q} m \cdot \log m$ が出てくる。そして，(1) 式の残りの部分の和等をうまく処理すると，これが $F\left(\frac{\log m}{\log q}\right)$ の形に書けるのである。

2° $F(x)$ の Fourier 係数 C_k を求めるには，基本的な式

$$C_k = \int_0^1 F(x)\, e^{-2\pi i k x} dx$$

を用いる。Delange は この $F(x)$ に彼の結果 1) で得られた表示を代入し，この積分を直接計算する事によって，2) の C_k の値を求めた。

4. Delange の結果の別証明.

ここで §2 に挙げた Delange の結果を別の方法で証明してみたい。この方法は既にある程度まで一般化できていて、それによる Delange の結果の拡張は §5 にある。しかし、一般的な方の証明は計算がかなりめんどうになる事，我々の証明方法は special case で十分お分り頂ける事，を考えて，ここでは定理 1 の証明（の要点）にとどめることにする。

1° $S_q(n)$ は次の関数等式を満たす（cf [2]）：

$$s\int_1^\infty \frac{S_q([t])}{t^{s+1}}\,dt = \zeta(s)\,\frac{q^s-q}{q^s-1}\ , \quad Re(s)>0$$

2° 上の式の左辺は Laplace 変換の形に書き換える事が出来，更に e^{-y} との Convolution product の Laplace 変換を作ると

$$\int_0^\infty M(e^u)\cdot e^{-us}\,du = \frac{\zeta(s)}{s(s+1)}\times\frac{q^s-q}{q^s-1}\ , \quad Re(s)>0,$$

を得る。ただし

$$M(t) = \frac{1}{t}\int_1^t S_q([v])\,dv$$

であり，特に t として $m\in\mathbb{N}$ をとれば，$M(m)=\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} S_q(n)$ となる事に注意する。

3° Laplace 逆変換を使うと，$\alpha>0$，$t>0$ として，

$$(2)\qquad M(m)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\zeta(s)}{s(s+1)}\,\frac{g^s-g}{g^s-1}\,m^s\,ds \;.$$

4° ここで上の式の被積分関数の pole の位置，及びそこでの留数を計算する。

① $s=0$ に 2位の pole，

$$\text{留数}=\frac{g-1}{2\log g}\left\{\log m-1+\log 2\pi\right\}-\frac{g+1}{4}\,,$$

② $s=\dfrac{2\pi ik}{\log g}$ $(k\in\mathbb{Z}^\times)$ に 1位の pole，

$$\text{留数}=i\,\frac{g-1}{2k\pi}\left(1+\frac{2\pi ik}{\log g}\right)^{-1}\cdot\zeta\left(\frac{2\pi ik}{\log g}\right)\cdot m^{\frac{2\pi ik}{\log g}}\,,$$

③ $S=-1$ にも 1位の pole があるが省略。

ここで，上の数値と定理 1 の 2) とを比べてみると，

$$s=0\ \text{での留数}=\left(\left\{\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}S_g(n)\right\}\text{の leading term}\right)+C_0$$

$$s=\frac{2\pi ik}{\log g}\ \text{での留数}=C_k\times e^{-2\pi ik\frac{\log m}{\log g}}$$

となっている事が分る。即ち，

$$\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}S_g(n)=\frac{\zeta(s)}{s(s+1)}\,\frac{g^s-g}{g^s-1}\,m^s\ \text{の}\ s=-1\ \text{以外の pole での留数の総和}\,.$$

5° この等式を 3° から導き出すには，所謂 Perron's

method を使えばよい。$-\frac{1}{2} < \eta < 0$ なる η をとって、$Re(s) = \eta$ の線上まで (2)式の積分路を移動する。この際 $\alpha \pm iT$, $\eta \pm iT$ の4点から成る長方形の積分路をとって $T \to \infty$ とするので、

a) 4°に現われた留数すべての和は収束する。

b) 長方形の積分路の上・下辺上の積分は $T \to \infty$ の時 0になる、

の2つを証明しなくてはならないが、これは $|\zeta(\sigma+it)|$ の評価式等を用いればすぐに出来る。

6° 残りは

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \frac{\zeta(s)}{s(s+1)} \frac{g^s-g}{g^s-1} m^s\, ds$$

の計算であるが、$Re(s) = \eta$ の線上では被積分関数を次の様に展開しなおす事が出来る。

$$\frac{\zeta(s)}{s(s+1)} \cdot \frac{g^s-g}{g^s-1} m^s = \frac{\zeta(s)}{s(s+1)} + (g-1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta(s)}{s(s+1)} g^{ks}$$

右辺は絶対収束なので、この右辺を上の積分に代入し、$\int$ と $\sum$ とを入れかえる事が出来る。すると

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \frac{\zeta(s)}{s(s+1)} (m g^k)^s\, ds$$

の形の項の無限和がでてくるが、一方で、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty}\frac{\zeta(s)}{s(s+1)}t^s\,ds = 0 \quad \text{if and only if} \quad t\in\mathbb{N},$$

が証明できるので，結果問題の積分の値は0である事が示せる．これで4°の最後の等式が正当化でき，従って Delange の結果の別証が得られた．

数論的関数の平均値を調べる問題ではしばしば Perron's method が使われるが，その場合 $F(s)$ を Dirichlet series として，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(s)\frac{x^s}{s}\,ds$$

の形の積分をあつかわねばならない。ここで積分路を左へ移すと，被積分関数の留数が Dirichlet 係数の和の leading term を与え，残った積分の評価が error term を与えるのである。

上に述べた我々の証明でちょっと面白い点は6°に示した様に error term を与えるはずの積分が消えてしまった事であろう。その結果，被積分関数の無限個ある pole での留数と remainder term $F(x)$ の Fourier coefficient とが丁度1つづつ対応している事等がはっきり分るようになった。

5. Our main Theorem

ここでは Delange の結果を拡張した定理 2 を述べるが，その前に必要な記号を準備する。

$g(n)$ を q-additive function とし，これから次の関数を作る：

$$(3) \qquad f_r(s) = \sum_{k=0}^{\infty} g(rq^k)\, q^{-(k+1)s}, \qquad 1 \leq r \leq q-1.$$

そして以下では，すべての r に対して，$f_r(s)$ は q^s の有理関数になっていると仮定する。この時，$f_r(s)$ のすべての pole は孤立特異点になり，更に

$$\Pi_r = \left\{ \rho : \rho \text{ は } f_r(s) \text{ の pole で，} 0 \leq \mathrm{Im}(\rho) < \frac{2\pi}{\log q} \right\}$$

とおくと，これは有限集合になる。$s=\rho$ で $f_r(s)$ を Laurent 展開し，これによって $d(r,\rho)$，$C_{r,\rho}(n)$ （$1 \leq r \leq q-1$，$\rho \in \Pi_r$，$n \in \mathbb{Z}$）を定義する：

$$f_r(s) = \sum_{n=-d(r,\rho)}^{\infty} C_{r,\rho}(n) \cdot (s-\rho)^n .$$

即ち，$d(r,\rho)$ とは $f_r(s)$ の $s=\rho$ に於る pole の位数，$C_{r,\rho}(n)$ は展開の係数である．更に，$\mathrm{Re}(s) < \min_{\rho \in \Pi_r} \{\mathrm{Re}(\rho)\}$ なる左半平面に於て，$f_r(s)$ は (3) 式とは別の Dirichlet 級数に展開できる事に注意し，この展開式を用いて，$u(r)$

$E_r(n)$ $(1 \leq r \leq q-1,\ n \in \mathbb{Z})$ を定義する：

$$f_r(s) = \sum_{n=-u(r)}^{\infty} E_r(n) \cdot q^{ns} .$$

即ち、$u(r)$ とは $f_r(s)$ の $q^s = 0$ に於る pole の位数である。
又、次の記号を用いる。

$[x] = x$ の Gauss 記号,

$\langle x \rangle = x - [x]$,

$\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s}$, $0 < a \leq 1$, Hurwitz zeta,

$\zeta^{(h)}(s,a) = \dfrac{d^h}{ds^h} \zeta(s,a)$, $h \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{定理 2.}}$ $g(n)$ を q-additive function とし、すべての r について (3) 式で定義した $f_r(s)$ が次の2つの条件を満たしていると仮定する：

i) $f_r(s)$ は q^s の有理関数である,

ii) $f_r(s)$ の pole ρ はすべて $Re(\rho) > -\frac{1}{2}$ をみたす。

この時，Π_r, $d(r,\rho)$, $C_{r,\rho}(n)$, $u(r)$, $E_r(n)$ は上の様に定義できて，更に $g(n)$ の平均値について次が成立する：

$$\frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} g(n) = \sum_{r=1}^{q-1} \left\{ A_r (\log m)^{d(r,0)} + B_r + W_r(m) \right\} + \sum_{r=1}^{q-1} \sum_{\rho \in \Pi_r} \sum_{\ell=0}^{d(r,\rho)-1} m^{\rho} (\log m)^{\ell} \cdot F\left(\frac{\log m}{\log q}\right),$$

ここで，　A_r, B_r, $W_r(m)$ は次で定義される定数，

$$A_r = \begin{cases} \dfrac{C_{r,0}(0)}{g\,(d(r,0)!)} & s=0 \text{ が } f_r(s) \text{ の pole の時,} \\[2ex] 0 & \text{その他,} \end{cases}$$

$$B_r = \begin{cases} 0 & s=0 \text{ が } f_r(s) \text{ の pole の時,} \\[1ex] \dfrac{f_r(0)}{g} & \text{その他,} \end{cases}$$

$$W_r(m) = \sum_{n=-u(r)}^{-1} E_r(n)\cdot w_r(n,m) \quad \text{で ただし}$$

$$w_r(n,m) = \begin{cases} \dfrac{1}{m} g^{n+1}\left(1-\langle g^n m\rangle\right) & \text{if } \langle g^n m\rangle \geq \dfrac{r+1}{g}, \\[2ex] \dfrac{1}{m} g^{n+1}\left\{(g-1)\langle g^n m\rangle - r\right\} & \text{if } \dfrac{r+1}{g} > \langle g^n m\rangle \geq \dfrac{r}{g}, \\[2ex] \dfrac{1}{m} g^{n+1}\cdot\langle g^n m\rangle & \text{if } \dfrac{r}{g} > \langle g^n m\rangle. \end{cases}$$

又，関数 $F_{r,\rho,\ell}(x)$ はすべて周期 1 の周期関数で，その Fourier 係数は，以下の様に explicit に与えられる：

$$F_{r,\rho,\ell}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_{r,\rho,\ell}(k)\cdot\exp(2\pi i k x)$$

と書いた時，

$$A_{r,0,\ell}(0) = \frac{1}{\ell!}\sum_{\substack{i+j+h=d(r,0)-\ell \\ i,j,h\geq 0}} \frac{(-1)^j}{h!} C_{r,0}(i)\left\{\zeta^{(h)}\!\left(0,\frac{r}{g}\right) - \zeta^{(h)}\!\left(0,\frac{r+1}{g}\right)\right\},$$

$$A_{r,1,\ell}(0) = \frac{1}{\ell!}\sum_{\substack{i+j+h=d(r,1)-\ell \\ i,j,h\geq 0}} \frac{(-1)^j}{h!} C_{r,1}(i)\left(1-2^{-(j+1)}\right)\times$$
$$\times\left\{\lim_{s\to 1}(s-1)\left(\zeta\!\left(s,\frac{r}{g}\right)-\zeta\!\left(s,\frac{r+1}{g}\right)\right)\right\},$$

$$A_{r,\rho,l}(k) = \frac{1}{l!} \sum_{\substack{i+j+h=d(r,\rho)-1-l \\ i,j,h \geq 0}} \frac{(-1)^j}{h!} C_{,\rho}(i) \left\{ \left(\frac{2\pi i k}{\log g}+\rho\right)^{-(j+1)} - \left(\frac{2\pi i k}{\log g}+1+\rho\right)^{-(j+1)} \right\}$$

$$\times \left\{ \zeta^{(h)}\left(\frac{2\pi i k}{\log g}+\rho, \frac{r}{g}\right) - \zeta^{(h)}\left(\frac{2\pi i k}{\log g}+\rho, \frac{r+1}{g}\right) \right\},$$

（$\rho \neq 0, 1$ 又は $k \neq 0$ の場合）。 //

この結果の要点は，$g(n)$ の平均値が，

$$A_1 (\log m)^{d(1,0)} + \cdots + A_{g-1} (\log m)^{d(g-1,0)} + \text{定数項}$$

$$+ \text{有限個の oscillating terms}$$

の形に書けている事である。

6. Examples.

§5 の定理はかなり複雑な外見を呈しているので，最後に実例を1つ2つ挙げることにする。

（I） "Sum of digits" $S_g(n)$ の場合。

$S_g(n)$ なる g-additive function は $S_g(rg^k) = r$, $1 \leq r \leq g-1$, $k \in \mathbb{N}$ によって定義されるので，

$$f_r(s) = \frac{r}{g^s - 1}, \quad 1 \leq r \leq g-1$$

である。これは定理2の仮定 i) ii) をみたすので定理2に従って計算すれば，定理1を得る。

(II)　2-additive function $g(n)$ を $g(2^k) = k \ (k \in N)$ によって定義する。この関数 $g(n)$ は n を2進展開した時 1の現われる桁数（2^0 の桁を 0ケタ目，2^1 の桁を 1ケタ目 … とした桁数）の和を表わす関数である。この時

$$f_1(s) = \frac{1}{(q^s - 1)^2}$$

となるので，やはり定理2が適用でき，結果は次の通り：

$$\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} g(n) = \frac{1}{4 \log^2 2} \log^2 m + \log m \times F_1\left(\frac{\log m}{\log 2}\right) + F_2\left(\frac{\log m}{\log 2}\right).$$

ここで $F_1(x)$，$F_2(x)$ は周期1の周期関数で，その各々の Fourier 展開は次で与えられる：

$F_1(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i k x}$，$F_2(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k e^{2\pi i k x}$ と書く時．

$$c_0 = \frac{(\log 2\pi) - 1}{2 \log^2 2} - \frac{1}{\log 2},$$

$$c_k = \frac{i}{2\pi k (\log 2)} \zeta\left(\frac{2\pi i k}{\log 2}\right) \cdot \left(\frac{2\pi i k}{\log 2} + 1\right)^{-1}, \quad k \neq 0,$$

$$d_0 = \frac{11}{24} - \frac{\zeta''(0)}{\log^2 2} - \frac{(\log 2\pi) - 1}{\log 2} - \frac{(\log 2\pi) - 1}{2 \log^2 2},$$

$$d_k = \frac{1}{2\pi i k \log 2} \left(\frac{2\pi i k}{\log 2} + 1\right)^{-1} \left(\left\{ 2 \log 2 + \frac{\log 2}{2\pi i k} + \left(\frac{2\pi i k}{\log 2} + 1\right)^{-1} \right\} \times \zeta\left(\frac{2\pi i k}{\log 2}\right) - \zeta'\left(\frac{2\pi i k}{\log 2}\right) \right), \quad k \neq 0$$

//

$\boxed{\text{Remark.}}$ 我々は 定理2 に於て $f_r(s)$ に2つの仮定を置いた。この内、ii) の方は途中の計算に必要な為に置いたもので、うまくすると外せる可能性は十分にあると思われる。これに対し、i) の方は、我々の方法による限り外せない。§4 に書いた証明の概略から分るように、我々の方法では、次の3つの条件が必要である：

(A) $f_r(s)$ は全平面で meromorphic function である，

(B) $f_r(s)$ のすべての poles は $\alpha < \mathrm{Re}(s) < \beta$ (α, β は定数）といった帯状領域に含まれている，

(C) 適当な左半平面 $\mathrm{Re}(s) < \gamma$ に於て、$f_r(s)$ が再び Dirichlet 級数に展開される。

ところが、$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{-(n+1)s}$ により、$\underbrace{f(s)}_{\text{定義された}}$ に上の3条件を仮定すると、$f(s)$ は q^s の有理関数になってしまう事が証明できるのである。

（以上）

References.

[1] H. Delange : Sur la fonction sommatoire de la fonction "somme de chiffres", L'Enseignement Math. Vol. 21, 31 - 47 (1974)

[2] J.-L. Mauclaire & Leo Murata : On q-additive functions. I., Proc. Japan Acad. Ser. A, Vol. 59, 274 - 276 (1983)