

Title	指数関数の有理点での値の有理近似について
Author(s)	塩川, 宇賢
Citation	数理解析研究所講究録 (1984), 517: 30-46
Issue Date	1984-04
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/98402">http://hdl.handle.net/2433/98402</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

指数関数の有理点での値の有理近似について

慶応・理工 塩川宇賢 (IEKATA SHIOKAWA)

1. はじめに表題に関して知られている主な結果を紹介しよう。

定理 1. (Davis [5]) 任意の正数  $\varepsilon$  に対し不等式

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| < \left( \frac{1}{2} + \varepsilon \right) \frac{1}{q^2} \frac{\log \log q}{\log q}$$

は無有限個の整数解  $q (> 0)$ ,  $p$  をもつ。さらに定数  $q_0 = q_0(\varepsilon)$  が存在して, 不等式

$$\left| e - \frac{p}{q} \right| > \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right) \frac{1}{q^2} \frac{\log \log q}{\log q}$$

がすべての整数  $q (\geq q_0)$ ,  $p$  に対し成り立つ。

定理 2. (Bundschuh [3], cf. Mahler [9], Durand [6])

整数  $a (> 0)$ ,  $b$  に対し正の定数  $c = c(a, b)$  が存在して,

不等式

$$\left| e^{a/b} - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^2 + 4 \log a / \log \log q} \frac{\log \log q}{\log q}$$

がすべての整数  $q (\geq 3)$ ,  $p$  に対し成り立つ。

定理 3. (Durand [7]) 相異なる 0 でない  $n$  個の有理数  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  に対し, 正の定数  $C = C(n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  が存在して, 不等式

$$|g_0 + g_1 e^{\alpha_1} + \dots + g_n e^{\alpha_n}| > g^{-n-C/\log \log g}$$

がすべての整数の組  $(g_0, g_1, \dots, g_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$  に対し成り立つ。但し,  $g = \max(|g_1|, |g_2|, \dots, |g_n|, 3)$ 。

定理 4. (Baker [1], [2; chap. 10], Mahler [10])

相異なる 0 でない有理数  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  に対し正の定数  $C = C(n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  が存在して, 不等式

$$|g e^{\alpha_1} - p_1| \cdot |g e^{\alpha_2} - p_2| \cdots |g e^{\alpha_n} - p_n| > g^{-1-C/\sqrt{\log \log g}}$$

がすべての整数  $g (\geq 3)$ ,  $p_1, p_2, \dots, p_n$  に対し成り立つ。

注意, 定数  $C$  はいずれも *explicit* に与えられている。

定理 1 の  $g_0$  も計算可能である。

2. 証明の方法について述べよう。Mahler, Durand の証明は Hermite の方法による。  $m, n$  をパラメタとし,  $n$  項式

$$f(t) = \frac{t^m (t-1)^n}{m! n!}$$

を考える。

$$f(z; t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} f^{(k)}(t)$$

とおくと、部分積分により

$$f(z; 0)e^z - f(z; 1) = e^z \int_0^1 f(t) e^{-zt} dt$$

を得る。両辺に  $(m+1)! z^{m+n+1}$  をかけてそれを

$$(1) \quad Q(z)e^z - P(z) = R(z)$$

とおく。(これがいわゆる Hermite's identity である。Hermite は類似の多項式から出発し (1) を用いて  $e$  の超越性を証明した。) 定義より  $Q(z), P(z) \in \mathbb{Z}[z]$ ,  $\deg Q = n$ ,  $\deg P = m$ ,  $R(z)$  の  $z=0$  での order  $= m+n+1$  がわかる。ここで、パラメータ  $(m, n)$  をそれぞれ  $(n-1, n)$  または  $(n, n-1)$  と選び、対応する  $P, Q, R$  をそれぞれ  $P_n, Q_n, R_n$  または  $P_n^*, Q_n^*, R_n^*$  と書く。すると degree と order の比較から

$$(2) \quad \det \begin{pmatrix} P_n(z) & Q_n(z) \\ P_n^*(z) & Q_n^*(z) \end{pmatrix} \neq 0 \quad (\forall z \neq 0)$$

がわかる。 $z = a/b$  ( $a, b \in \mathbb{N}$ ) を代入する。 $P_n(a/b), Q_n(a/b), P_n^*(a/b), Q_n^*(a/b)$  をそれぞれ  $p_n, q_n, p_n^*, q_n^*$

とおく。これらの有理数の共通分母は  $d_n := b^n / (n-1)!$  である。

さて,  $p, q (> 0)$  を与えられた整数とする。(2)より, 任意の  $n$  に対して  $p_n q - q_n p \neq 0$  または  $p_n^* q - q_n^* p \neq 0$ .  
各  $n$  に対して  $\neq 0$  とする  $p_n, q_n$  または  $p_n^*, q_n^*$  を選び, それを改めて,  $p_n, q_n$  と書く。(1)より

$$d_n q_n e^{a/b} - d_n p_n = d_n R_n(a/b)$$

故に 
$$d_n (q_n p - p_n q) = (q e^{a/b} - p) d_n q_n - q d_n R_n(a/b)$$

左辺  $\in \mathbb{Z}, \neq 0$ . したがって,

$$|(q e^{a/b} - p) d_n q_n - q d_n R_n(a/b)| \geq 1$$

従って

$$(3) \quad |q d_n R_n(a/b)| \leq \frac{1}{2}$$

すなわち

$$|(q e^{a/b} - p) d_n q_n| \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{i.e.} \quad \left| e^{a/b} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{2} q^{-1 - \log |d_n q_n| / \log q}$$

$q_n, R_n(a/b)$  の大きさ (小ささ) は正確にわかっている。

そこで (3) をみたす  $n$  を選び,  $d_n q_n$  を  $q$  の関数として,

上から評価する事ができる。

Davis も Hermite の証明から idea を得ている。  $f(t)$  を多項式とすると、

$$\int_0^{\infty} e^{-t} f(t) dt = \int_0^1 e^{-t} f(t) dt + e^{-1} \int_0^{\infty} e^{-t} f(t+1) dt$$

これを  $q = u + e^{-1} p$  と書くと、

$$e^{-\frac{p}{q}} = \frac{v}{q^2}, \quad \text{但し } v = e u q.$$

いま  $f(t)$  として次の多項式  $f_n(t)$  ( $n \geq 0$ ) をとる。

$$f_{3n-2}(t) = \frac{t^n (t-1)^n}{n!}, \quad f_{3n-1}(t) = \frac{t^n (t-1)^{n+1}}{n!}, \quad f_{3n}(t) = \frac{t^{n+1} (t-1)^n}{n!}$$

対応する  $p, q, v$  を  $p_n, q_n, v_n$  と書くと

$$p_n, q_n \in \mathbb{Z}, \quad e^{-\frac{p_n}{q_n}} = \frac{v_n}{q_n^2},$$

かつ次の回帰関係をもたす。

$$q_{3n} = q_{3n+1} + q_{3n-2}, \quad q_{3n-1} = 2n q_{3n-2} + q_{3n-3}, \quad q_{3n-2} = q_{3n-3} + q_{3n-4}$$

( $p_n$ ) も同様) これより  $e$  の正則連分数展開

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, \dots]$$

が得られる。  $p_n/q_n$  はその  $n$  近似分数であり、  $q_n$  の大きさは計算できる。正則連分数が最良近似を与える事から、定理 1 が証明される。

Burndschuh は合流型超幾何関数に対する Kummer の  
変換公式

$${}_1F_1(\alpha; \beta; z) = e^z {}_1F_1(\beta - \alpha; \beta; -z)$$

を用いて  $e^z$  の有理関数近似を構成している。実際これは、  
 $e^z$  の Padé table (Perron [11; §75] 参照) の主対角線  
に一致している。彼は同じ方法で  $\tanh z$  と Bessel 関数  
の比  $J_\nu(z) / J_{\nu+1}(z)$  の有理点での値を扱っている。  
(cf [4].)

Hermite の方法の最も重要な改良は Siegel E 関数の理  
論である。Baker - Mahler の結果はこれによる。

定理 4 において  $\sqrt{\log \log q}$  を  $\log \log q$  に置きかえる事が  
残されている。同じ方法で Skidlovskii, Sprindzuhuk,  
Galochkin 等が  $e^z$  を含む超幾何 E 関数に対して, §1  
と同種の結果を得ている。

3. 本論文において定理 2 のオ 3 の証明を与えよう。前 §  
の証明では, まず  $e^z$  の有理関数近似を構成し,  $z = a/b$  と  
おいて, その値の有理数近似を導いた。そこで能率の良い関  
数近似 - Padé 近似 - が必要となる。"良い関数近似  $\Rightarrow$

良い有理数近似” という図式である。我々の証明は Gauss による合流型超幾何関数の連分数展開にもとづく。即ち連分数の  $n$  近似分数  $p_n(z)/q_n(z)$  という既製の有理関数近似を用いる。それ故証明は単純明快で  $e^z$ ,  $\tan z$ ,  $\tanh z$ ,  $J_\nu(z)/J_{\nu+1}(z)$  etc を含む広いクラスの合流型超幾何関数の有理数値が一掃に扱える。もちろん得られる定数は計算可能である。

### 補題 1 関数

$$Y = F(X) := X \log X + \lambda X \quad (\lambda \text{ は実定数})$$

の逆関数  $X = F^{-1}(Y)$  は,  $X, Y$  が十分大きい所で次の級数に展開される。

$$X = F^{-1}(Y) = \frac{Y}{\log Y} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} A_{n,k} \frac{(\log \log Y - \lambda)^{n-k}}{(\log Y)^n} \right\}$$

ここで  $A_{n,k}$  は次の関係式で帰納的に定義される。

$$A_{n,0} = 1 \quad (n \geq 0), \quad A_{n,n-1} = (-1)^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

$$A_{n+1,k+1} = A_{n,k+1} - \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ k_1+k_2=k \\ 0 \leq k_i \leq n_i}} A_{n_1,k_1} B_{n_2,k_2}$$

$$(n \geq 1, 0 \leq k \leq n-1)$$



但し,

$$B_{n,k} = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j} \sum_{\substack{n_1+\dots+n_j=n \\ k_1+\dots+k_j=k \\ n_i \geq 1, 0 \leq k_i \leq n_i}} A_{n_1, k_1} \dots A_{n_j, k_j} \quad (n \geq 1, k \geq 0)$$

はじめの数項を書けば,

$$X = F^{-1}(Y) = \frac{Y}{\log Y} \left\{ 1 + \frac{\log \log Y - \lambda}{\log Y} + \frac{(\log \log Y - \lambda)^2}{(\log Y)^2} - \frac{\log \log Y - \lambda}{(\log Y)^2} + \frac{(\log \log Y - \lambda)^3}{(\log Y)^3} - \frac{5}{2} \frac{(\log \log Y - \lambda)^2}{(\log Y)^3} + \frac{\log \log Y - \lambda}{(\log Y)^3} + \frac{(\log \log Y - \lambda)^4}{(\log Y)^4} \dots \right\}$$

証明省略

定理 整数  $a (> 0)$ ,  $b$  に対し, 正の定数  $C = C(a, b)$  が存在して不等式

$$\left| e^{a/b} - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^{2+2 \log a \cdot \nu(q)}} \frac{\log \log q}{\log q}, \quad \nu(q) := \frac{F^{-1}(\log q)}{\log q}$$

がすべての整数  $p, q (q \geq 3)$  に対して成り立つ。

系 整数  $a (> 0)$ ,  $b$  に対し, 正の定数  $C = C(a, b)$  が存在し,

$$\left| e^{a/b} - \frac{p}{q} \right| > C q^{-2-2 \log a \cdot (1/\log \log q + \log \log \log q / (\log \log q)^2)}$$

がすべての整数  $p, q (q \geq 3)$  に対して成り立つ。

$C$  の下からの評価は可能であるが, 相当小さくなる。

4. Gauss は Euler, Lambert, Lagrange 等の連分数を一般化して超幾何関数の連分數展開を得た。これを合流型超幾何関數

$$\Phi(\beta; \gamma; z) := 1 + \frac{\beta}{\gamma} \frac{z}{1} + \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

( $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$  は定數,  $\gamma \notin \{0, -1, -2, \dots\}$ ) に限定して述べよう。

$\Phi$  は entire で, Kummer の関數と呼ばれ, しばしば  ${}_1F_1(\beta; \gamma; z)$  と表示される。これは Kummer の方程式  $z d^2 w / dz^2 + (\gamma - z) dw / dz - \beta z = 0$  をみたす。いま  $n \geq 0$  に対し

$$P_{2n} := \Phi(\beta+n; \gamma+2n; z), \quad P_{2n+1} := \Phi(\beta+n+1; \gamma+2n+1; z)$$

とおくと,  $P_n$  は次の3項回帰關係をみたす;

$$P_n = P_{n+1} + a_{n+1} z P_{n+2} \quad (n \geq 0)$$

但し

$$a_{2n} = \frac{\beta+n}{(\gamma+2\beta-1)(\gamma+2n)}, \quad a_{2n+1} = -\frac{\gamma-\beta+n}{(\gamma+2n)(\gamma+2n+1)}.$$

これより形式的に連分數

$$\frac{\Phi(\beta; \gamma; z)}{\Phi(\beta+1; \gamma+1; z)} = \frac{P_0}{P_1} = 1 + \frac{a_1 z}{P_1/P_2} = \dots = 1 + \frac{a_1 z}{1} + \frac{a_2 z}{1} + \dots$$

が得られる。この連分數は左辺の関數の poles を含まない任意の compact set 上で一様収束する事が分かる。特に  $\beta=0$ ,  $\gamma+1$  を  $\gamma$  で置きかえると

$$\Phi(1; r; z) = \frac{1}{1} + \frac{z}{r} + \frac{1 \cdot z}{r+1} - \frac{r \cdot z}{r+2} + \frac{2 \cdot z}{r+3} - \frac{(r+1)z}{r+4} + \frac{3z}{r+5} - \dots$$

さらに  $r=1$  とすれば  $e^z$  が連分数

$$e^z = \Phi(1; 1; z) = \frac{1}{1} - \frac{z}{2} + \frac{z}{2} - \frac{z}{3} + \frac{2z}{4} - \frac{2z}{5} + \frac{3z}{6} - \frac{3z}{7} + \dots$$

に展開される。ここで連分数の変形公式

$$(1) \quad b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \dots = b_0 + \frac{\Gamma_1 a_1}{\Gamma_1 b_1 +} \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 a_2}{\Gamma_2 b_2 +} \frac{\Gamma_2 \Gamma_3 a_3}{\Gamma_3 a_3 +} \dots$$

を用いれば

$$(2) \quad e^z = \frac{1}{1} + \frac{-z}{1} + \frac{z}{2} + \frac{-z}{3} + \frac{z}{2} + \frac{-z}{5} + \frac{z}{2} + \frac{-z}{7} + \dots$$

この形では扱いにくいのでもう少し“加速”する。一般に

2つの連分数

$$b_0^* + \frac{a_1^*}{b_1^* +} \frac{a_2^*}{b_2^* +} \dots, \quad b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \dots$$

があつて、それらの  $n$  近似分数  $f_n^*$ ,  $f_n$  の間に

$$f_n^* = f_{2n+1} \quad (n \geq 0)$$

の関係があるとき、前者は後者の odd part であるという。

**補題** 連分数  $b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \dots$  が odd part をもつ必要十分条件は  $b_{2R+1} \neq 0$  ( $R \geq 0$ )。この時、odd part

$b_0^* + \frac{a_1^*}{b_1^*} + \frac{a_2^*}{b_2^*} + \dots$  は次の式で与えられる;

$$b_0^* = (a_1 + b_0 b_1) / b_1, \quad a_1^* = -a_1 a_2 b_3 / b_1, \quad b_1^* = a_2 b_3 + b_1 (a_3 + b_2 b_3),$$

$$a_k^* = -a_{2k-1} a_{2k} b_{2k-3} b_{2k+1}, \quad b_k^* = a_{2k} b_{2k+1} + b_{2k-1} (a_{2k+1} + b_{2k} b_{2k+1}).$$

この補題により (2) の odd part をとり (1) で変形すれば

$$(2) \quad e^z = 1 + \frac{2z}{2-z} + \frac{z^2}{2 \cdot 3} + \frac{z^2}{2 \cdot 5} + \frac{z^2}{2 \cdot 7} + \dots + \frac{z^2}{2(2n-1)} + \dots$$

を得る。さらに変形公式

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots = b_0 + \frac{1}{\frac{1}{a_1} b_1} + \frac{1}{\frac{a_1}{a_2} b_2} + \frac{1}{\frac{a_2}{a_1 a_3} b_3} + \frac{1}{\frac{a_1 a_3}{a_2 a_4} b_4} + \dots$$

を用いて正則連分数に直せば

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} e^z = 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots \\ a_1 = \frac{2-z}{2z}, \quad a_{2n} = \frac{4(4n-1)}{z}, \quad a_{2n+1} = \frac{4n+1}{z} \quad (n \geq 1) \end{array} \right.$$

を得る。

つぎに  $\Psi(\beta; \gamma; z)$  において,  $z$  を  $z/\beta$  におきかえ  $\beta \rightarrow +\infty$  とすると, 合流型超幾何関数

$$\Psi(\gamma; z) = 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{z}{1} + \frac{1}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

及び連分数展開

$$\frac{\Psi(r; z)}{\Psi(r+1; z)} = 1 + \frac{z}{r(r+1)} + \frac{z}{(r+1)(r+2)} + \frac{z}{(r+2)(r+3)}$$

を得る。今度は (2)  $\rightarrow$  (2') への変形は必要なく、このままで良い。  $\tan z$ ,  $\tanh z$ ,  $J_\nu(z)/J_{\nu+1}(z)$  などはこの形の連分数である。

以上連分数に関しては, Perron [11], Wall [12], Jones-Thron [8] を参照してほしい。但し [8] の (2.4.30) 式にはミスがある。上記 (2') が正しい。

## 5. 定理の証明

### 補題2, 連分数

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \quad (a_n \text{ 複素数})$$

において

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n a_{n+1}|^{-1} < +\infty.$$

とすると

(i) 比  $p_n / (a_2 a_3 \dots a_n)$ ,  $q_n / (a_1 a_2 \dots a_n)$  はそれぞれ 0 ではない有限値に収束する。

(ii)  $\alpha_n = \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} + \dots}}$  とおくと,  $|\alpha_n| \sim |a_{n+1}|^{-1}$ .

証明省略

定理の証明は連分数(\*)にもとづく。(\*)に  $z = a/b$  を代入すると、 $n$  近似分数  $P_n/q_n$  において、 $P_n, q_n \in \mathbb{Q}$ . いま

$$(1) \quad d_n = 2a^n$$

とおくと、帰納法により

$$d_n P_n, d_n q_n \in \mathbb{Z} \quad (n \geq 1)$$

がいえる。(\*)は補題2の条件をみたすから、 $n_0$  を十分大きく選べば、

$$(2) \quad \begin{cases} |q_n| < |q_{n+1}|, & |q_n/d_n| < |q_{n+1}/d_{n+1}| \\ |a_n| > 1, & |d_n| < 1/2 \end{cases} \quad (n \geq n_0)$$

と出来る。さて  $p, q (> 0)$  を与えられた整数とする。

$$|q_{n_0}/d_{n_0}| < 4q$$

と仮定してよい。(そうでないものは有限個しかないから。)

すると(2)より

$$(3) \quad |q_{n-1}/d_{n-1}| \leq 4q < |q_n/d_n|$$

をみたす  $n = n(q) > n_0$  が唯一つ定まる。

連分数の公式

$$P_n q_{n-1} - P_{n-1} q_n = \pm 1$$

より  $P_n q - q_n p \neq 0$  または  $P_{n-1} q - q_{n-1} p \neq 0$  の少くとも一方が成り立つ。

いま  $P_n q - q_n p \neq 0$  とすると、

$$d_n q_n \left( e^{a/b} - \frac{p}{q} \right) = \frac{d_n (p_n q - q_n p)}{q} + d_n (q_{n+1} - p_n)$$

において

$$d_n (p_n q - q_n p) \in \mathbb{Z}, \neq 0, \quad \text{即ち}$$

$$|d_n (p_n q - q_n p)| \geq 1.$$

また連分数の公式

$$q_{n+1} - p_n = \pm \frac{1}{q_{n+1} + d_{n+1} q_n}$$

と(2), (3)より

$$|d_n (q_n e^{a/b} - p_n)| \leq \frac{2d_n}{|q_{n+1}|} \leq \frac{1}{2q}.$$

よって

$$|d_n q_n \left( e^{a/b} - \frac{p}{q} \right)| \geq \frac{1}{2q}$$

故に

$$\left| e^{a/b} - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{2} q^{-1} - \log |d_n q_n| / \log q.$$

$p_{n-1} q - q_{n-1} p \neq 0$  から同様の不等式が得られる。ここで(1),

(2)より

$$\log |d_n q_n| \leq \log |q_{n-1} / d_{n-1}| + 2 \log |d_n d_{n-1}| + \log |q_n / q_{n-1}|$$

$$\leq \log q + 2n \log a + \log n + B.$$

(以後同じ文字  $B$  で適当な正の定数を表わす。  $B$  および  $0$  定数は高々  $a, b$  にかみ依存する。) よって

$$(4) \quad \left| e^{a/b} - \frac{p}{q} \right| > B q^{-2 - (2n \log a + \log n) / \log q}$$

あとは  $n = n(q)$  を  $q$  の関数として explicit に表わせばよ

い。 (X) より

$$a_1, a_2, \dots, a_{2m+1} = \frac{2-z}{8} \left(\frac{8}{z}\right)^{2m+1} (m!)^2 \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{16k^2}\right)$$

$$\log |a_1, a_2, \dots, a_{2m+1}| = 2 \log m! + (2m+1) \log (8/|z|) + O(1)$$

$$\begin{aligned} \log |a_1, a_2, \dots, a_{2m}| &= \log |a_1, a_2, \dots, a_{2m+1}| - \log |a_{2m+1}| \\ &= 2 \log m! + 2m \log (8/|z|) - \log (2m) + O(1) \end{aligned}$$

よって Stirling の公式

$$\log m! = m \log m - m + \frac{1}{2} \log m + O(1)$$

および補題 2 より

$$\log |g_n| = n \log n + n \log \frac{4}{|z|e} + O(1)$$

故に (1), (3) より

$$(5) \quad \log g + B < n \log n + \lambda n = F(n) < \log g + B'$$

$$\text{但し } \lambda = 2 \log 2 - 1 + \log |b| - 2 \log a.$$

特に

$$(6) \quad \log n = \log \log g - \log \log \log g + O(1).$$

また平均値の定理を用いて

$$F^{-1}(Y + O(\log Y)) = F^{-1}(Y) + O(1)$$

これと (5), (6) から

$$(7) \quad n = F^{-1}(\log g) + O(1)$$

(4), (6), (7) および補題 1 より定理と系が従う。



## References

- [1] A. Baker: On some Diophantine inequalities involving the exponential function. *Canad. J. Math.* 17(1965), 616-626
- [2] A. Baker: *Transcendental Number Theory*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975
- [3] P. Bundschuh: Irrationalitätsmasse für  $e^a$ ,  $a \neq 0$  rational oder Liouville-Zahl. *Math. Ann.* 192(1971), 229-242
- [4] P. Bundschuh: Scharfe Irrationalitätsmasse für Zahlen, die mit Bessel-funktion zusammenhängen. *Math. Zeit.* 165 (1979), 251-260
- [5] C. S. Davis: Rational approximations to  $e$ . *J. Austral. Math. Soc. (Ser. A)* 25(1978), 497-502
- [6] A. Durand: Note on rational approximations of the exponential function at rational points. *Bull. Austral. Math. Soc.* 14(1976), 449-455
- [7] A. Durand: Simultaneous Diophantine approximations and Hermite's method. *Bull. Austral. Math. Soc.* 21(1980), 463-470

- [8] W. B. Jones and W. J. Thron: Continued Fractions: Analytic Theory and Applications, Encyclopedia of Math. Appl., vol. 11. Addison-Wesley, 1980
- [9] K. Mahler: On rational approximations of the exponential function at rational points. Bull. Austral. Math. Soc. 10(1974), 325-335
- [10] K. Mahler: On a paper by A. Baker on the approximation of rational powers of  $e$ . Acta Arith. 27(1975), 61-87
- [11] O. Perron: Die Lehre von den Kettenbrüchen. Chelsea, New York, 1929
- [12] H. S. Wall: Analytic Theory of Continued Fractions. Van Nostrand, New York, 1948