数理解析研究所講究録
518巻 1984年 96-101

Fox's congruence modulo (2,1)

神大 中西康剛 (Yasutaka Nakanishi)

定義. 3次元球面内の1次元結び目 (S^3, K) に対し，Kと交わらぬ平凡な結び目 O で $\pm\frac{1}{2}$-surgery すると新らしい結び目 (S^3, K^*) が得られる。このような結び目の変形の有限列で、2つの結び目がうつりあうとき，これらは congruent modulo (2,1) であるという。（Fox[1] は，surgery の係数，$lk(K, O)$ 等から congruence mod (n, q) を定義しているが，本稿では必要がないので省略する．）

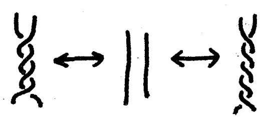
それでは 結び目の congruence class が いくつあるか であるが，次の予想がある.

予想C 全ての結び目は，congruent modulo (2,1) である.

なお，絡み輪に拡張して考えた時には，先の変形が絡み輪の成分間の絡み数を変えないことから，この予想は成り立たない．（例. Hopf-link  と 2-comp. trivial link ○○ ）

予想A，Bも列挙しておくと次の通りです．

<u>予想B</u>　全ての結び目は，congruent modulo (2, 2) である．

<u>予想A</u>　全ての結び目は， の変形の有限列でうつりあう．

なお，A ⇒ B ⇒ C の関係があるわけですが，予想Aに対しては，1983年10月 KOOK セミナーで，特殊な 3-braid knots と 10-crossings までの結び目については成り立つことを示しました．

本稿では，予想Cが 全ての 3-braid knots について成り立つことと，その確からしさの一面を Alexander 多項式から照らしてみよう．

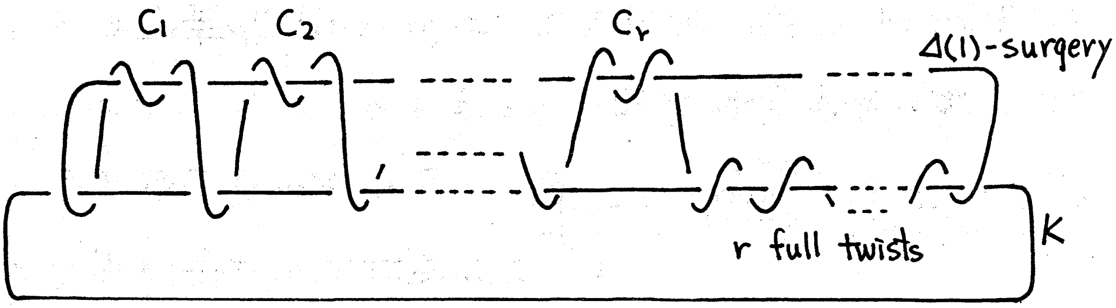
<u>命題</u>．　$\Delta(t)$ を結び目多項式とする（すなわち，$|\Delta(1)|=1$ $\Delta(t^{-1}) \doteq \Delta(t)$ をみたす Laurent 多項式）．この時，$\Delta(t)$を

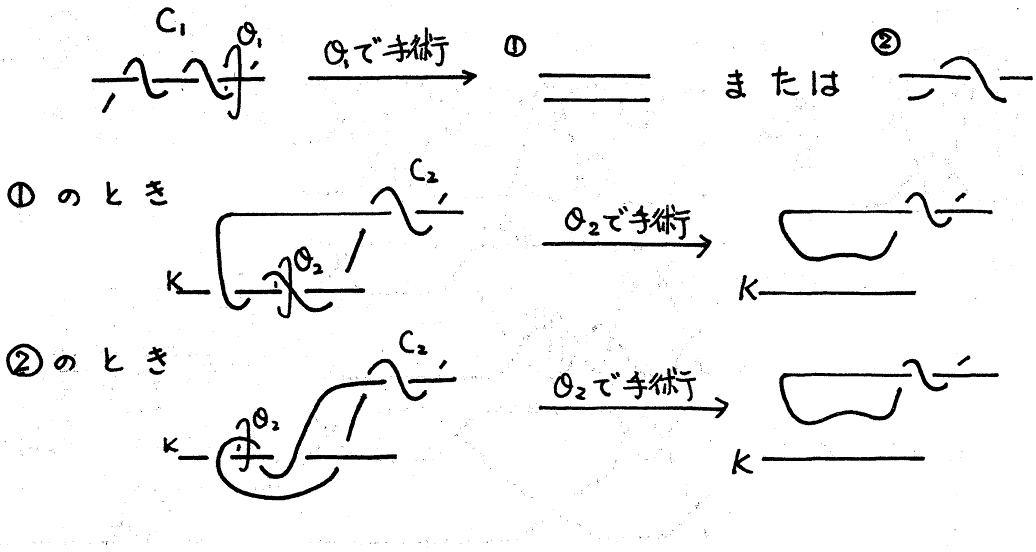
Alexander 多項式とする結び目Kで，平凡な結び目と congruent modulo (2, 1) であるものがある．

証明概略．Levin による surgery description で，次の図で与えられる結び目Kの Alexander 多項式は

$\Delta(t) = C_r(t^r+t^{-r}) + C_{r-1}(t^{r-1}+t^{1-r}) + \cdots + C_1(t+t^{-1}) + C_0$

である．（図では，$C_r=-2, \cdots, C_2=2$，$C_1=3$ である．）



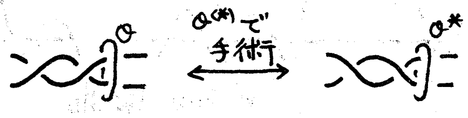


こうした変形のくり返しにより，平凡な結び目の surgery description が得られる．■

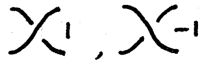
問題. $\Delta(t)$を結び目多項式，Kを結び目とする．これらをどのようにとっても，$\Delta(t)$を結び目多項式とし，かつ，Kとcongruentな結び目K^*があるか．

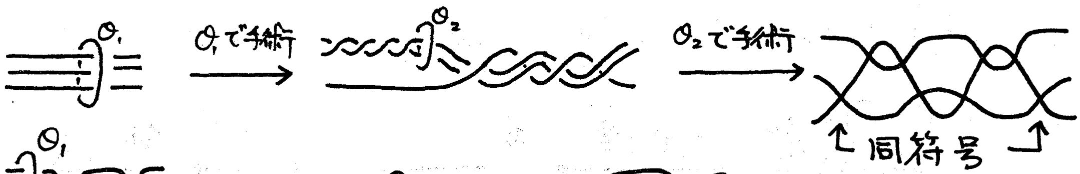
先の命題で，Alexander 多項式のcongruenceに関する障害はないと言った所，作間氏より上の問題が出た．残念ながら未解決です．

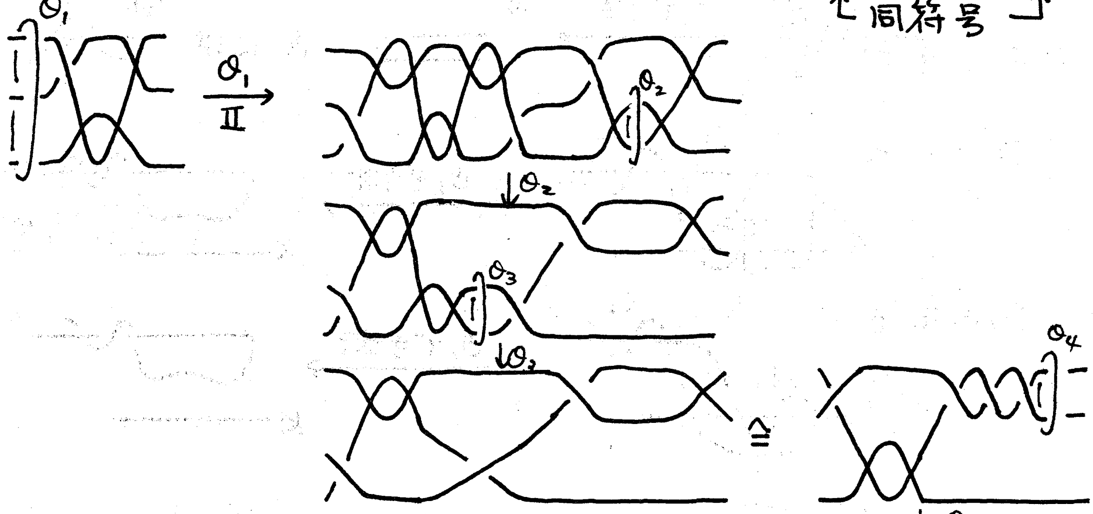
3-braid knots がすべて congruentであることを示すために，次の基本変形Ⅰ，Ⅱ，Ⅲを考える．

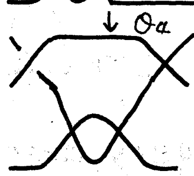
Ⅰ) 

そこで ② 

①  だけで良い．

Ⅱ) 

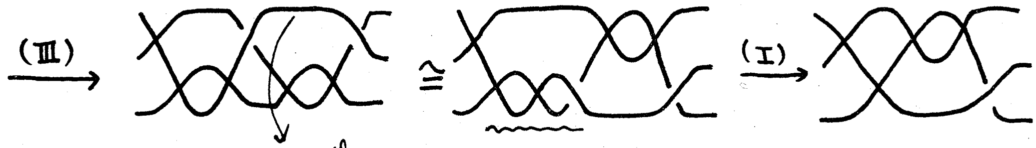
Ⅲ) 



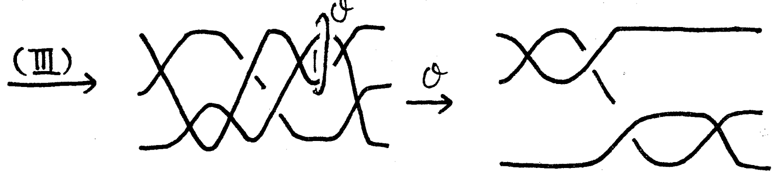
註．Ⅲの重要なところは②の隣の①の符号を同時に変えるところである．

つまり，Ⅰの変形で3-braidを①，②だけにした後に，②が隣りあっておれば，Ⅲの変形でcrossingsを減らせる．以下，このcrossingに関するinductionで示す．

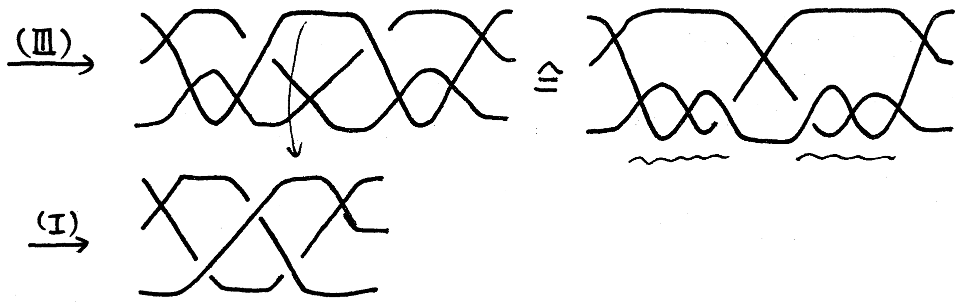
①①①
②②



①①②
②①①

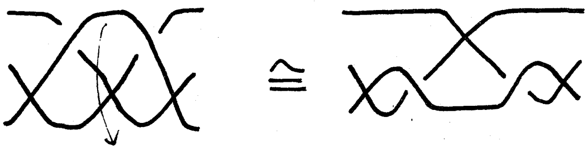


①①①①
②①②



以上から，①が4個以上続くとして良い．また，②があれば，(Ⅲ) を用いて 次のパターンをcrossingsをふやさずに作れる．

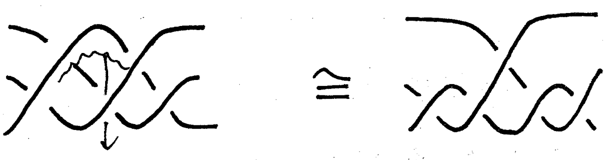
+1 −1
① ① ①



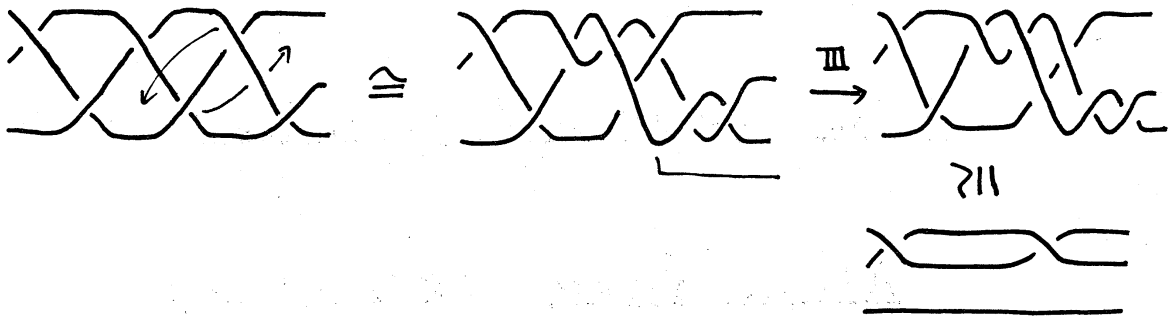
crossingをへらせるか ①①①
②② 型へ

故に，あと考えなくてはいけないのは 次の２タイプ．

+1 +1 +1 +1 ···
−1 −1 −1 −1 ···
と
+1 +1 +1 +1 ···
+1 +1 +1 +1 ···



①①①
②② 型へ



これらの変形を施せば，10-crossings 以下にはなる．そこで，KOOKセミナー（予想A）だけで，平凡な結び目に congruent であると示せる．■

参考文献

[1] R.H.Fox "Congruent classes of knots" O.J.M. vol.10