

Irregular 3-fold cover κ について

神戸大理 細川藤次 (Fujitsugu Hosokawa)

神戸大理 中西康剛 (Yasutaka Nakanishi)

orientable closed 3-manifold はすべて 3次元球面内の
ある knot で分岐する irregular 3-fold cover として表現
できることは、すでによく知られている。そこで、3次元球
面内に具体的に κ knot を与え、そこで分岐する irregular
3-fold cover はどうなるか? は興味あることである。

ここでは、pretzel knot κ について考えてみよう。

3次の対称群 S_3 にあつて、

$$a = (0, 1), \quad b = (0, 2), \quad c = (1, 2)$$

$$x = (0, 1, 2), \quad y = (0, 2, 1)$$

とすると、次の関係が成り立つ。

$$a^2 = b^2 = c^2 = 1,$$

$$ab = bc = ca = x, \quad ba = ac = cb = y$$

特に、次の関係が成立するに注意する。

$$aba^{-1} = c, \quad ac a^{-1} = b, \quad ax a^{-1} = y, \quad ay a^{-1} = x$$

∨

$$\begin{aligned}
 & b a b^{-1} = c, \quad b c b^{-1} = a, \quad b x b^{-1} = y, \quad b y b^{-1} = x \\
 & c a c^{-1} = b, \quad c b c^{-1} = a, \quad c x c^{-1} = y, \quad c y c^{-1} = x \\
 & x a x^{-1} = b, \quad x b x^{-1} = c, \quad x c x^{-1} = a, \quad x y x^{-1} = y \\
 & y a y^{-1} = c, \quad y b y^{-1} = a, \quad y c y^{-1} = b, \quad y x y^{-1} = x
 \end{aligned}$$

=これは、knot group から \mathcal{S}_3 への準同型写像 ϕ に対し、ある種の制約を与えることがある。

さて、knot group G の Wirtinger presentation を考える。つまり、 G の表示

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n; r_1, r_2, \dots, r_{n-1} \rangle$$

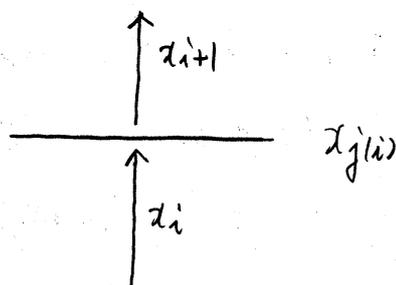
における、各 relator r_i は、

左のよ様な交叉点で

$$r_i = x_{j(i)}^{\varepsilon} x_i^{-\varepsilon} x_{j(i)}^{-1} x_{i+1}^{-1}, \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1)$$

の形をしている。



このとき、上の \mathcal{S}_3 における関係より、次のことが成り立つ。

Proposition 1

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n; r_1, r_2, \dots, r_{n-1} \rangle$$

を knot group G の Wirtinger presentation とする。

このとき、 G から 3 次の対称群 \mathcal{S}_3 への準同型写像 ϕ があれば、次の (1), (2), (3) のいずれか 1 つをみたす。

$$(1) \quad \phi(x_i) = a \text{ または } b \text{ または } c \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(2) \quad \varphi(x_i) = \alpha \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(3) \quad \varphi(x_i) = \gamma \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

同じように考えて、3次元球面内の link に対しても、次のように言える。

Proposition 2

$$\langle x_{11}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_{\mu 1}, \dots, x_{\mu n_\mu}; \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle$$

μ components の link の group の Wirtinger presentation

とする。ただし、 $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}$ ($i = 1, 2, \dots, \mu$) は

link の i 番目の component に対応する生成元とする。

このとき、この群から 3 次の対称群 S_3 への準同型写像

φ が存在すると、 $1 \leq i \leq \mu$ なる各 i に対して、次の

(1) が (2) をみたす。

$$(1) \quad \varphi(x_{ij}) = a \text{ または } b \text{ または } c \quad (j = 1, 2, \dots, n_i)$$

$$(2) \quad \varphi(x_{ij}) = \alpha \text{ または } \gamma \quad (j = 1, 2, \dots, n_i)$$

すなわちの生成元が φ によって a に対応するような場合には、この φ に対応して存在する branched cover は 2-fold regular cover とする。

また、すなわちの生成元が φ によって α に対応する場合には、この φ に対応して存在する branched cover は 3-fold regular cover とする。

したがって, *irregular 3-fold cover* を考えるには,
 φ は Proposition の (1) の場合で, $\varphi(\alpha_i) \neq \varphi(\alpha_j)$ とする生
 成元 α_i, α_j が存在するようなときを調べればよい。

さて, *twist* の折りにあける各 α_i の φ による対応の様子を
 調べてみよう。

図には, φ による像を書くことにすると, 代表的な場合は
 次のようになる。

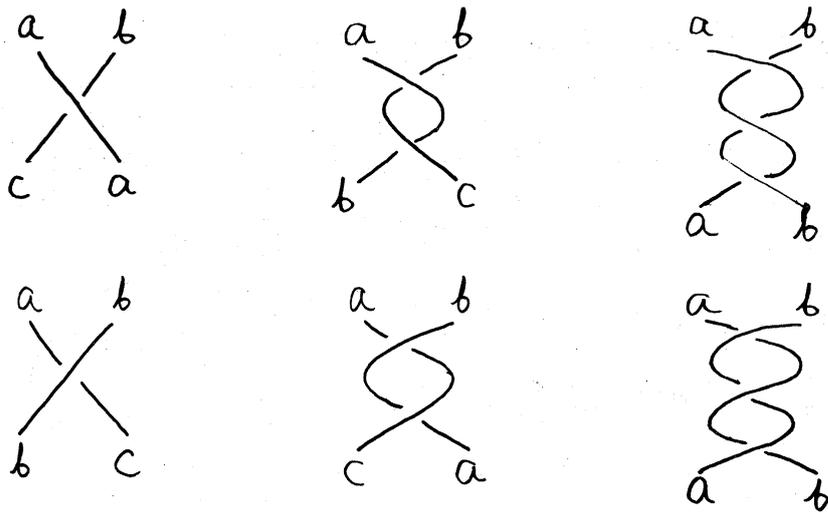
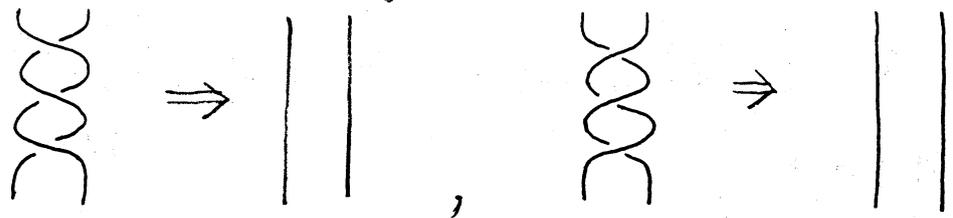


図 (1)

$a^2 = b^2 = c^2 = 1$ 存の σ , *knot* の方向は無視してよい。

これによると, *half twist* 3回で, φ による像は変わらない

$\sigma = \sigma$, *knot* の projection ν がある。



のように、3回の half twist を解消する operation を考え、これを 3-half twist operation と呼ぶことにする。

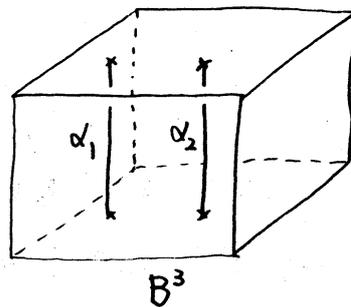
Proposition 3

L' を link L に対して、3-half twist operation κ によって得られた link とし、 L, L' に対応する link group を、それぞれ G, G' とする。

G から 3 次の対称群 \mathcal{S}_3 への準同型写像 φ 、proposition 2(1) をみたす φ があるとき、 G' から \mathcal{S}_3 への準同型写像 φ' をみたす φ' がある。

L と L' の projection は 3-half twist operation をほどこした部分以外では同じであり、前ページの図からわかるように φ' を φ と同じ対応に取ることもできる。このようにとった φ' を φ から導かれる準同型写像ということにする。

さて、3-ball B^3 に proper に含まれる 2本の線分 α_1, α_2 が、右の図のようになっている場合、これを trivial tangle という。



このとき、 $B^3 - \alpha_1 \cup \alpha_2$ の基本群 $\pi_1(B^3 - \alpha_1 \cup \alpha_2)$ は階数 2 の自由群である。

この群の表示を $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ とする。

このとき、準同型写像 $\varphi: \pi_1(B^3 - \alpha_1 \cup \alpha_2) \rightarrow \mathcal{S}_3$ は

$$\varphi(\alpha_1) = a, \quad \varphi(\alpha_2) = b$$

とする。この φ に対応する B^3 の $\alpha_1 \cup \alpha_2$ で分岐する *irregular 3-fold cover* が 3-ball になることは容易にわかる。

この事実を使うと、次のことが容易に証明される。

Proposition 4

L を link L に対し、3-half twist operation τ によって得られた link L' 、link L, L' に対する link group をそれぞれ G, G' とする。

G から 3 次の対称群 \mathcal{S}_3 への準同型写像 φ が存在し、 φ' を φ から導かれる G' から \mathcal{S}_3 への準同型写像とする。

更け、3-half twist operation の場所において、それぞれの線分に対応する G' の生成元の φ' による像は異なる 2 であり、しかも a, b, c のどれかとする。

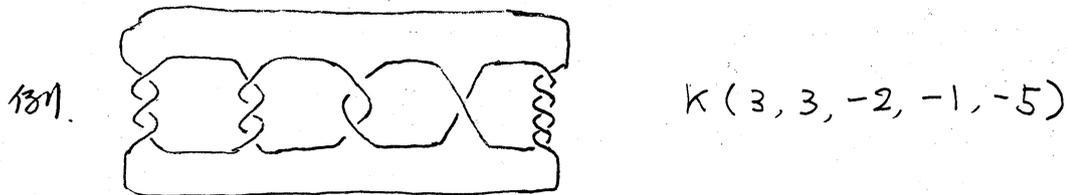
このとき、 φ に対応して定まる L で分岐する 3次元球面の *irregular 3-fold cover* と、 φ' に対応して定まる L' で分岐する 3次元球面の *irregular 3-fold cover* は、たがいに位相同型である。

このことを使うと、pretzel knot の *irregular 3-fold cover* をすべて求めることができる。

Theorem 1

pretzel knot で分岐する irregular 3-fold cover は
3次元球面か, type $(p, 1)$, $(p \geq 0)$, の lens space
の connected sum である。

half twist の数が p_1, p_2, \dots, p_m である pretzel knot を
 $K(p_1, p_2, \dots, p_m)$ で表すことにする。



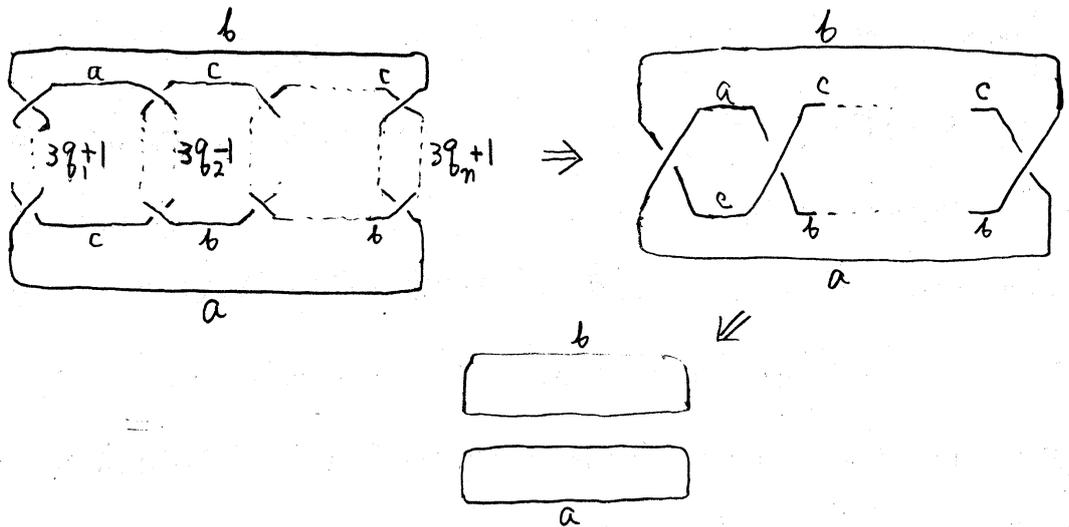
pretzel knot group の \mathcal{S}_3 への準同型写像は、いつでも
存在するとは限らない。

そこで、先づ、上、下の長い糸に対応する生成元の φ による
像が異なる場合を考えてみよう。

この場合、各 p_i は mod 3 で ± 1 に存在しなければなら
ないことが、4.1.1 の図 1 の考察からわかる。

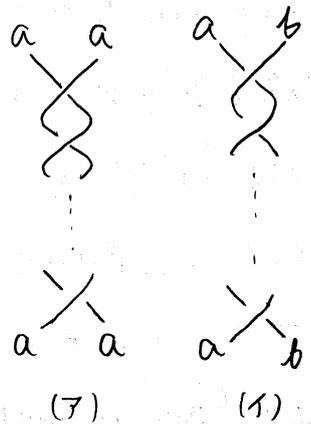
この pretzel knot に 3-half twist operation を何回か行
なると、最終的に $K(1, 1, \dots, 1)$ または $K(-1, -1, \dots, -1)$ に
なることが容易に図をかきこきよって確かめられる。しか
も、各 3-half twist operation において、proposition 4 の
条件をみたしている。

$K(1, 1, \dots, 1)$ や $K(-1, -1, \dots, -1)$ の 1 や -1 の個数は, 3 の倍数 n を $2n$ とし, これに再び 3 -half twist operation を行なうと, これは 2 components の trivial link となり, しかも, 各 component の生成元の φ による像は a か b か c であり, かつ異なるものとなる。このように 2 components の trivial link で分解する φ に対応する irregular 3 -fold cover が存在する n 本面となることは容易にわかる。



次に, 上, 下 2 つの長い線に対応する生成元の φ による像が同じ場合を考えてみよう。

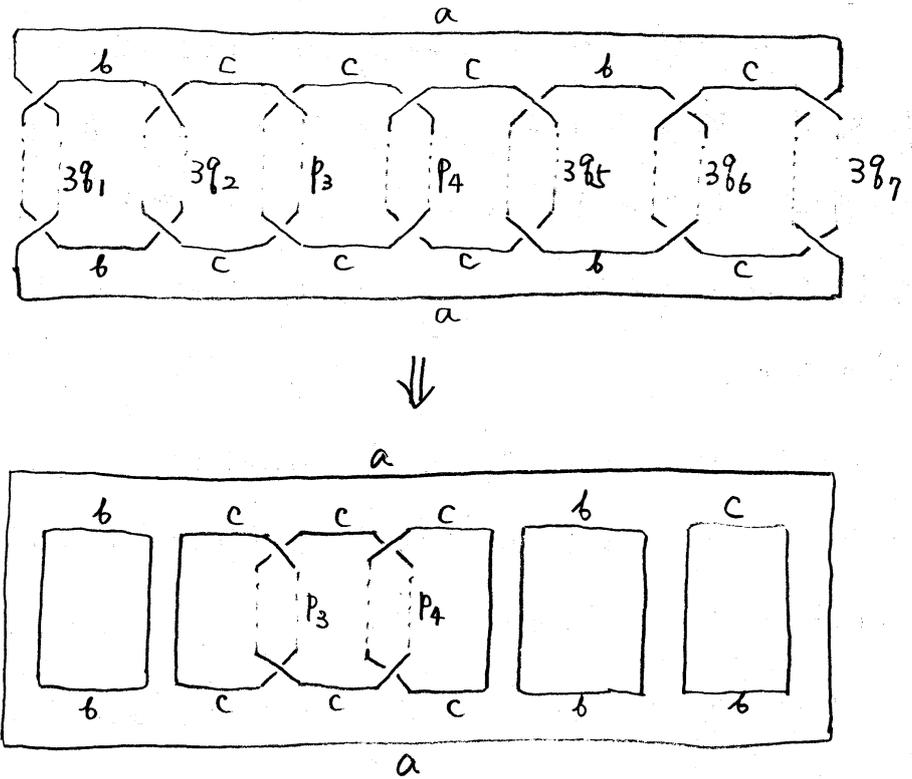
この場合, 1 つの twist を見て右の図 (ア) のように φ による 2 対応する場合, half twist の数は任意であるが, (イ) の場合は half twist の数は 3 の倍数でなければならぬ。



そして、(1) の場合は、3-half twist operation $k \rightarrow 2$, half twist の数は 0 とする \square ができ、しかも proposition 4 の条件をみたしている。しかし、(2) の場合には、proposition 4 の条件をみたさないから、3-half twist operation を行うことはできない。

(1) の場合約々 k の 3-half twist operation を何回か行うことはでき、もとの pretzel knot は各 component が split link k となり、しかも、それぞれの component は、trivial knot か、または、いくつかの torus knots の和 (knot composition) となり、かつ、1 つの component の生成元はすべて φ による 2 乗がれる準同型写像 $k \rightarrow 2$, \mathcal{S}_3 の a か b か c のどれか 1 つに対応する \square となる。

type (p, 1) の torus knot で分岐する 3次元球面の 2-fold cover は type (p, 1) の lens space になる \square はすでに知られている。特に $S^2 \times S^1$ は type (0, 1) の lens space と見る \square により、最終的に求められた link で分岐する φ による 2 乗がれる \mathcal{S}_3 の準同型写像に対応する irregular 3-fold cover が type (p, 1) の lens space の connected sum になることは、容易に示すことができる。これが、もとの pretzel knot の φ に対応する irregular 3-fold cover とする。



以上のようにより Theorem 1 の証明が終るが、この考え方を
 使えば、2-bridge knot の irregular 3-fold cover を簡
 単に求めることができる。

2-bridge knot は 2 つの trivial tangles $(B_1^3, \alpha_1 \cup \alpha_2)$
 と $(B_2^3, \beta_1 \cup \beta_2)$ を 2 つの 3-balls B_1^3 と B_2^3 の境界で結び
 合わせ、 $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \beta_1 \cup \beta_2$ で 1 つの knot K があるようにし
 くと、この knot が 2-bridge knot と存在。

このとき、 α_1, α_2 に対応する生成元は、knot group か
 ら \mathbb{S}_3 の準同型写像 φ により、1 方は a と、それ以外は
 b に対応すると K のみ irregular 3-fold cover が考えら
 れる。このとき、 $(B_1^3, \alpha_1 \cup \alpha_2)$ の準同型写像 φ に対応して

また $\alpha_1 \cup \alpha_2$ で分解する irregular 3-fold cover は、前
 に述べたように 3-ball と存在。

$(B^3, \beta_1 \cup \beta_2)$ に同じくも同様であり、2つの 3-balls
 の境界を繋ぐ場合もやはり 3次元球面と存在することから、次
 の定理が成立する。

Theorem 2

2-bridge knot で分解する irregular 3-fold
 cover は、必ず 3次元球面である。

講演では触れなかったが、同じように考えて、次の定理も
 容易に証明できる。

Theorem 3

3-bridge knot で分解する irregular 3-fold cover
 は必ず lens space と存在。

この考え方は 4-bridge knot まで拡張できるが、5-bridge
 knot との間には、まだ大きな gap があるように思える。