数理解析研究所講究録
518巻 1984年 21-37

On Sapphire Spaces

神戸大 理 森元勘治 (Kanzi Morimoto)

二つのSolid toriをその境堺で同一視して得られる三次元多様体をLens spaceと呼び、Solid torus とKlein bottle上のtwisted I-bundleをその境界で同一視して得られる三次元多様体をPrism manifoldと呼ぶことはよく知られている。

本稿では、二つのKlein bottle上のtwisted I-bundleをその境界で同一視して得られる三次元多様体をSapphire spaceと呼び、この多様体のtopological typeを分類し、構造や性質を考察する。

§1 Sapphire spacesの定義と分類

KをKlein bottleとし、KIをK上のtwisted I-bundleとする。KIは二通りのSeifert fibrations $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$を持つ。ここで$\mathcal{F}_1$のorbit manifoldはindex 2のexceptional pointを二つ持つdisk、$\mathcal{F}_2$のorbit manifoldはexceptional pointを持た

ない、Möbius band である。(c.f. Ch. VI of [4])

1.1 Lemma　A を KI に proper に埋め込まれた、essential annulus とする。A は $\mathcal{F}_1$ 又は $\mathcal{F}_2$ に saturated な annulus に ambient isotopic である。$\mathcal{F}_1$ のとき type I、$\mathcal{F}_2$ のとき type II と呼ぶ。

証明　[4] の Therem VI.34 より直ちに従う。

$S^1 = \{ e^{i\theta} \mid \theta \in R^1,\ e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \text{ iff } \theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi} \}$ を複素平面上の単位円周とし、$F = S^1 \times I$ とおく(但し $I = [0\ 1]$)。$f : F \to F$: homeo. を、$f(e^{i\theta}, t) = (e^{-i\theta}, 1-t)$ で定義する。$F \times I$ において $(x, 0) \in F \times \{0\}$ と $(f(x), 1) \in F \times \{1\}$ を同一視する関係を $\sim$ と書けば、$KI \cong F \times I/\sim$ である(但し $\cong$ は同相を表わす)。

以下で KI 上の三つの self-homeomorphism を定義する。

① $T : KI \to KI$　$((e^{i\theta}, t), u) \in F \times I/\sim$ に対して

$$T((e^{i\theta}, t), u) = ((e^{i(\theta + 2\pi u)}, t), u)$$

② $S : KI \to KI$　$((e^{i\theta}, t), u) \in F \times I/\sim$ に対して

$$S((e^{i\theta}, t), u) = ((e^{-i\theta}, t), u)$$

③ $R : KI \to KI$　$((e^{i\theta}, t), u) \in F \times I/\sim$ に対して

$$R((e^{i\theta}, t), u) = ((e^{i\theta}, t), 1-u)$$

即ち、T は twist、S は type I の annulus についての折り

返し、Rはtype IIのannulusについての折り返しである。

Xを位相空間とする。Xの全てのself-homeo.からなる群の、identityにisotopicなhomeo.全体からなる部分群による剰余類群をXのhomeotopy groupと呼び$\mathcal{H}(X)$と書く。

1.2 Proposition　$\mathcal{H}(KI) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$　ここで$\mathbb{Z}_2$は位数2の巡回群、生成元はTとSとRである。

略証　AをKI内のtype IIのannulusとし、hをKIのself-homeo.とする。KIのisotopyによって$h(A)=A$とでき、さらに、S又はRを合成して、A上でidentityとできる。故にKIをAで切り開くことにより結論を得る。

∂KI上のsimple loopで$\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$にsaturatedなものをそれぞれα, βとする。$\pi_1(\partial KI) \cong \langle\alpha\rangle \oplus \langle\beta\rangle$　である。今、K_1IとK_2Iを二つのKIとする。$i=1,2$に対して

$\pi_1(\partial K_iI) \cong \langle\alpha_i\rangle \oplus \langle\beta_i\rangle$　　$\pi_1(K_iI) \cong \langle l_i, m_i \mid l_i m_i l_i^{-1} = m_i^{-1}\rangle$

である。ここで、α_i, β_iはα, βに対応し、l_i, m_iはK_i上のsimple loopsで、α_iとl_i^2、β_iとm_iがhomotopicとなるものである。

$G.L.(2,\mathbb{Z}) = \{(r\,s\,t\,u) \mid r,s,t,u \in \mathbb{Z},\ ru-st=\pm 1\}$ とおく。$(r\,s\,t\,u) \in G.L.(2,\mathbb{Z})$に対して$h: \partial K_2I \to \partial K_1I$: homeo.を$h(\alpha_2) = r\alpha_1 + s\beta_1$, $h(\beta_2) = t\alpha_1 + u\beta_1$で定義する。（但し$h$が導く基本群間の準同型

を再びhと書いた)。このとき、hによって$\partial K_1 I$と$\partial K_2 I$を同一視して得られる三次元多様体を$K(rstu)$と書き、type$(rstu)$のSapphire spaceと呼ぶ。

1.3 Proposition　$K(rstu)$はirreducibleであり、$\partial K_1 I = \partial K_2 I$はseparating incompressible torusである。

$$\pi_1(K(rstu)) \cong \left\langle l_1, m_1, l_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} l_1 m_1 l_1^{-1} = m_1^{-1} \quad l_2^2 = l_1^{2r} m_1^s \\ l_2 l_1^{2t} m_1^u l_2^{-1} = m_1^{-u} l_1^{-2t} \end{array} \right\rangle$$

$$H_1(K(rstu)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{4t} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{if } s : \text{even} \\ \mathbb{Z}_{4t} \oplus \mathbb{Z}_4 & \text{if } s : \text{odd} \end{cases}$$

1.4 Lemma　TをKI内のincompressible torusとすれば、Tは∂-parallelである。

証明　[4]のTheorem Ⅵ.34より直ちに従う。

1.5 Lemma　Tを$K(rstu)$内のseparating incompressible torusとすれば、Tは以上の三つのtypesのtoriの一つにambient isotopicである。

① $\partial K_1 I = \partial K_2 I$

② $K_1 I \cap T$, $K_2 I \cap T$ 共にtype Ⅰのannuli

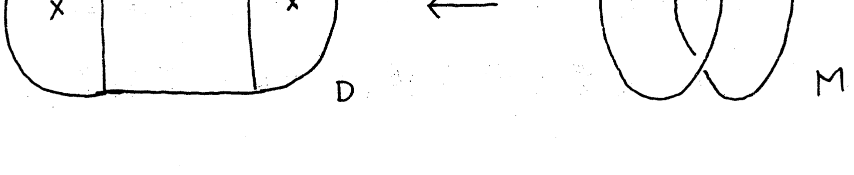
③ $K_1 I \cap T =$ 二つのtype Ⅰのannuli、$K_2 I \cap T =$ 二つのtype

Ⅱのannuli。又はこの逆。

略証　$K_1 I \cap T = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$、$K_2 I \cap T = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$ A_i, B_iはそれぞれ$K_1 I$, $K_2 I$内のessential annulus $(n \geq 0)$としてよい。$n=0$のとき、明らかに①が成立。$n>0$のとき、A_i, B_i共にtype Ⅰならば②が成立、A_iとB_iのtypeが異なれば③が成立する。共にtype Ⅱとはならない。

1.6 Lemma　Tを$K(rstu)$内の、Lemma 1.5における③のtorusとする。このとき$K(rstu)$のself-homeo.でTを$\partial K_1 I$へうつすものが存在する。

略証　一般性を失わずに、$K_1 I \cap T = A_1 \cup A_2$をtype Ⅰ、$K_2 I \cap T = B_1 \cup B_2$をtype Ⅱとしてよい。$\partial B_1$の一つのcomponentを$\beta_2$、$\partial A_1$の一つのcomponentを$\alpha_1$とみなせば、$h: \partial K_2 I \to \partial K_1 I$において$h(\beta_2) = \alpha_1$とおける。故に$K(rstu) = K(r110)$とおける。DとMをそれぞれdiskとMöbius bandとし、$P_1: K_1 I \to D$、$P_2: K_2 I \to M$を$\mathfrak{F}_1$と$\mathfrak{F}_2$のfibrationのprojectionとする。$P_1(A_1 \cup A_2)$と$P_2(B_1 \cup B_2)$に注目すれば、Tは$K(r110)$を二つのKIに切り開き、その同一視は$(r110)$とみなせることがわかる。



1.7 Theorem $A, A' \in G.L.(2.\mathbb{Z})$ $B=(1\,0\,0\,-1)$
$K(A)$, $K(A')$ 二つのSapphire spacesとする。
$K(A)$と$K(A')$が同相である為の必要十分条件は、A'が $\pm A^{\pm 1}$ $\pm BA^{\pm 1}$, $\pm A^{\pm 1}B$, $\pm BA^{\pm 1}B$, のうちの一つに等しいことである。

略証 $K(A)=K_1I \cup K_2I$ $h: \partial K_2I \to \partial K_1I$ 、$K(A')=K_1'I \cup K_2'I$ $h': \partial K_2'I \to \partial K_1'I$、とする。$h=A$, $h'=A'$ である。

まず、A'が上記行列のうちの一つ、たとえば$-A^{-1}B$に等しいとする。$S: K_1'I \to K_2I$とおけば、$S|_{\partial K_1'I}=B$ であるから、$h \circ S|_{\partial K_1'I} \circ h' : \partial K_2'I \to \partial K_1I$ は $A'BA=-A^{-1}BBA=(-1\,0\,0\,-1)$ となり、これは $S \circ R: K_2'I \to K_1I$ へ拡張されて、$K(A) \cong K(A')$を得る。その他の場合も同様である。

逆に、$f: K(A) \to K(A')$: homeo. のとき、$f(\partial K_1I)$が$\partial K_1'I$に重ならすことができれば明らか。そうでないとき、1.5 Lemmaと1.6 Lemmaより、$f(\partial K_1I)$は1.5 Lemmaにおける②のtorusとしてよく、このとき$A=(\varepsilon_1\,0\,t\,\varepsilon_2)$、$A'=(\varepsilon_1'\,0\,t'\,\varepsilon_2')$ ($\varepsilon_i=\pm 1$, $\varepsilon_i'=\pm 1$, $i=1.2$) とおけるが、$H_1(K(A))=H_1(K(A'))$より$|t|=|t'|$。故に結論を得る。

次の定理は Homology groupの計算と、Ch. 12 of [3]より直ちに従う。

1.8 Theorem $K(r\,s\,t\,u)$がcircle上のtorus bundleである為の必要十分条件は $t=0$ である。このとき

monodromy は $(-1\ S\ 0\ -1)$ となる。

次の定理は、[4]の Theorem VI.34 とKIの Seifert fibration より直ちに従う。

1.9 **Theorem** $K(r\,s\,t\,u)$ が Seifert fibered space となる為の必要十分条件は、r, s, t, u のうちの一つが 0 となることである。またその orbit manifold は以下となる。

$s=0 \Leftrightarrow$ index 2 の exceptional points を 4 点持つ 2-Sphere

$r=0$ 又は $u=0 \Leftrightarrow$ index 2 の exceptional points を 2 点持つ projective plane

$t=0 \Leftrightarrow$ exceptional point を持たない Klein bottle

§2 Sapphire Spaces の Heegaard genus

V を Solid torus とし、$\pi_1(\partial V) \cong \langle \ell \rangle \oplus \langle m \rangle$ (meridian loop) とする。また $\pi_1(\partial KI) \cong \langle \alpha \rangle \oplus \langle \beta \rangle$ である。coprime integers (p, q) に対して $h: \partial V \to \partial KI$ を $h(m) = p\alpha + q\beta$ で定義し、この h によって ∂V と ∂KI を同一視して得られる三次元多様体を $M(p, q)$ と書く。これは

type (p,q) のPrism manifoldと呼ばれる。(c.f. [1], [4], [5])

2.1 Lemma ① $M(p,q)$ はgenus 2のHeegaard splittingを持つ。② $M(p,q)$ がgenus 1のHeegaard splittingを持つ為の必要十分条件は $|q|=1$ である。

証明 ①は定義よりすぐわかる。②は [5] Theorem 2 より従う。

2.2 Lemma Mをsapphire spaceとし、KをM内のKlein bottleとし、N(K)をKのregular neighborhoodとする。$N(K)\cong KI$ かつ $Cl(M-N(K))\cong KI$ である。(但し $Cl(\cdot)$ は閉包)

証明 Mがorientableかつirreducibleであることと§1の結果を用いれば直ちに結論を得る。

2.3 Lemma k を S^3 内のtame knot $N(k)$ を k のregular neighborhood、$M(k)=Cl(S^3-N(k))$ とする。μ_1, μ_2 を $\partial M(k)$ 上の交わらない k のmeridian loopsとし、μ_1, μ_2 を $M(k)$ の内部へ押し込んだsimple loopsを $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ とする。二つのintegers p_1, p_2 に対して $M(k)$ を $\bar{\mu}_i$ に沿って p_i/q_i surgery (但し q_i は p_i と互いに素なinteger c.f. ch.9 of [7]) して得られる三次元多様体を M_1 とすれば、$H_1(M_1)\cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{G(p_1,p_2)}$ である。ここで

$G(P_1, P_2)$はP_1とP_2の最大公約数である。

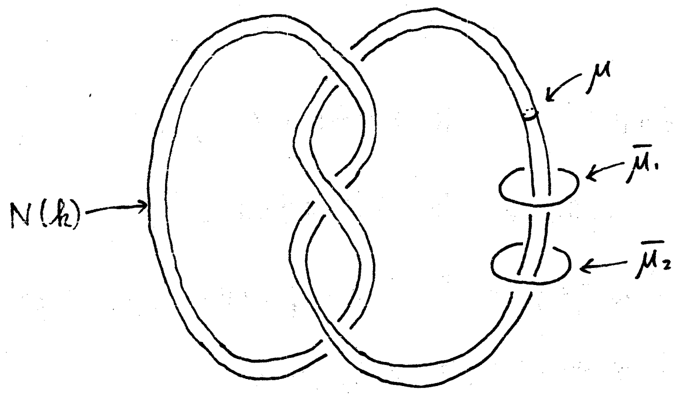
証明　Mayer-Vietorisの完全系列を用いて簡単に計算することができる。

さて、ここでKlein bottleを含むclosed orientable 3-manifoldsの三つの族を与える。

C(1)　kをS^3内の2-bridge knot (c.f. Ch4 of [7]) とし(但しtrivial knotも許す)、$N(k)$をkのregular neighborhood、$M(k) = Cl(S^3 - N(k))$とする。μ, μ_1, μ_2を$\partial M(k)$上の三つの交わらないkのmeridian loopsとし、μ_1, μ_2を$M(k)$の内部へ押し込んだsimple loopsを$\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$とする。M_1を$\bar{\mu}_1$と$\bar{\mu}_2$に沿ったDehn surgeriesを行って$M(k)$から得られる3-manifoldとする。このとき、βをμに移すhomeo.により∂KIと∂M_1を同一視して得られる3-manifolds全体の族をC(1)とおく。

C(2)　kをS^3内の2-bridge knotとし(但しtrivial knotも許す)、$N(k)$をkのregular neighborhood、$M(k) = Cl(S^3 - N(k))$とする。μ, μ_1を$\partial M(k)$上の二つの交わらないkのmeridian loopsとし、μ_1を$M(k)$の内部に押し込んだsimple loopを$\bar{\mu}_1$とする。M_1を$\bar{\mu}_1$に沿ったDehn surgeryを行って$M(k)$から得られる3-manifoldとする。このとき、αをμに移すhomeo.により∂KIと∂M_1を同一視して得られる3-manifolds

全体の族を C(2) とおく。



C(3) L を Lens space とする。$L = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$ ここで V_i は solid torus である。k を L 内の 1-bridge knot とする。即ち $i = 1, 2$ に対して $(V_i, V_i \cap k)$ は $(A \times I, P \times I)$ に対として同相である。ここで A は annulus、P は A の内部のある点である。$N(k)$ を k の regular neighborhood とし、$M(k) = \mathrm{cl}(L - N(k))$ とし、μ を $\partial M(k)$ 上の k の meridian loop とする。このとき、α を μ に移す homeo. により ∂KI と $\partial M(k)$ を同一視して得られる 3-manifolds 全体の族を C(3) とおく。

2.4 Lemma (Theorem 2 of [6]) M を Klein bottle を含む closed orientable 3-manifold とする。M が genus 2 の Heegaard splitting を持つ為の必要十分条件は、M が C(1) 又は C(2) 又は C(3) に属することである。

以上の準備により Sapphire spaces の Heegaard genus を決

めることができる。

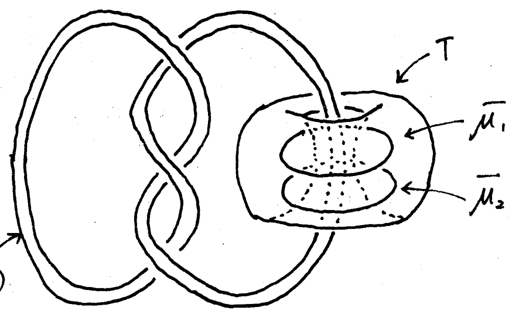
2.5 Theorem　$K(rstu)$をSapphire spaceとする。

① $K(rstu)$はgenus 3のHeegaard splittingを持つ。

② $K(rstu)$がgenus 2のHeegaard splittingを持つ為の必要十分条件は$|s|=1$である。

略証　①は定義よりすぐわかる。②の証明。$K(rstu)$がgenus 2のHeegaard splittingを持ったとする。2.4Lemmaより$K(rstu)$は$C(1)$又は$C(2)$又は$C(3)$に属する。

$C(1)$のとき。$C(1)$の定義におけるM_1とKIによって$K(rstu)=M_1\cup KI$となる。2.2Lemmaより$M_1\cong KI$故$H_1(M_1)\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$。一方2.3Lemmaより$H_1(M_1)\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{G(P_1,P_2)}$。故に$|P_i|\geqq 2$となる。そこで$T$を$M(k)$内のtorusで$\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2$をcoreとするsolid torusを張るtorusとすれば、$|P_i|\geqq 2$よりTはM_1でincompressible。



1.4LemmaよりTは∂-parallelとなり、kはtrivial knotとなる。故に$|P_i|=2$となってμはM_1を$\mathcal{F}_1$とみたときのregular fiberとなり$u=0$を得る。即ち$|s|=1$である。

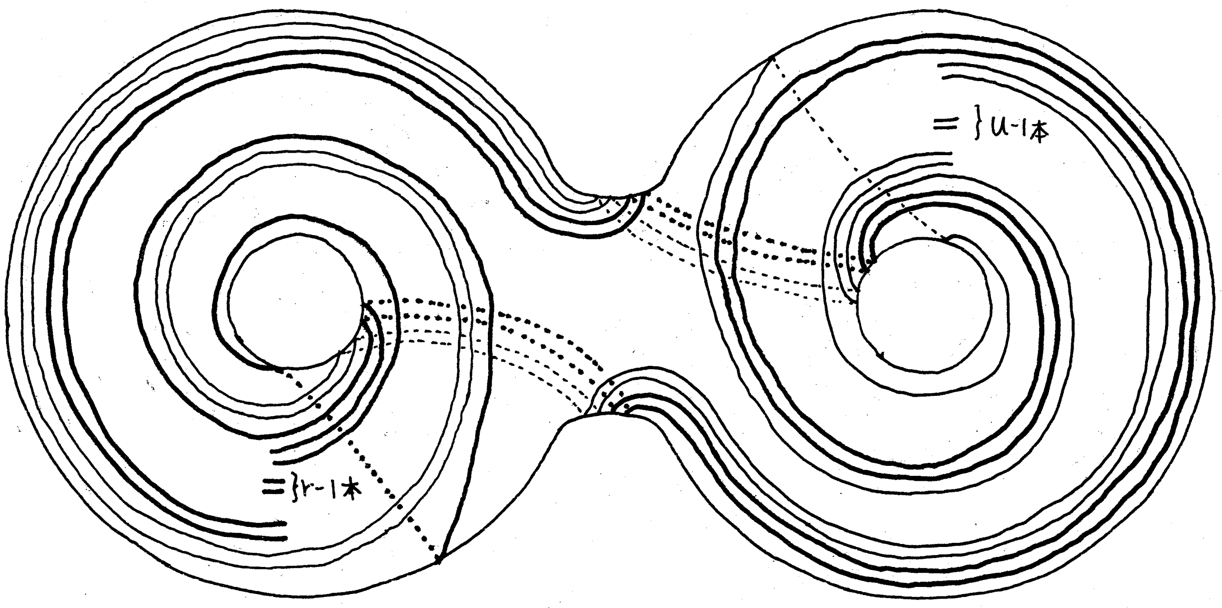
$C(2)$のとき。$H_1(M_1)\cong\mathbb{Z}$となる故Sapphire spaceは$C(2)$には属さない。

$C(3)$ のとき。$L=V_1 \cup V_2$ をLens spaceとし、k をL内の1-bridge knot、$N(k)$ を k のregular neighborhoodとすれば2.2Lemmaより $cl(L-N(k)) \cong KI$ となる故LはPrism manifoldとなり、2.1Lemmaと簡単な考察により $|s|=1$ がわかる。

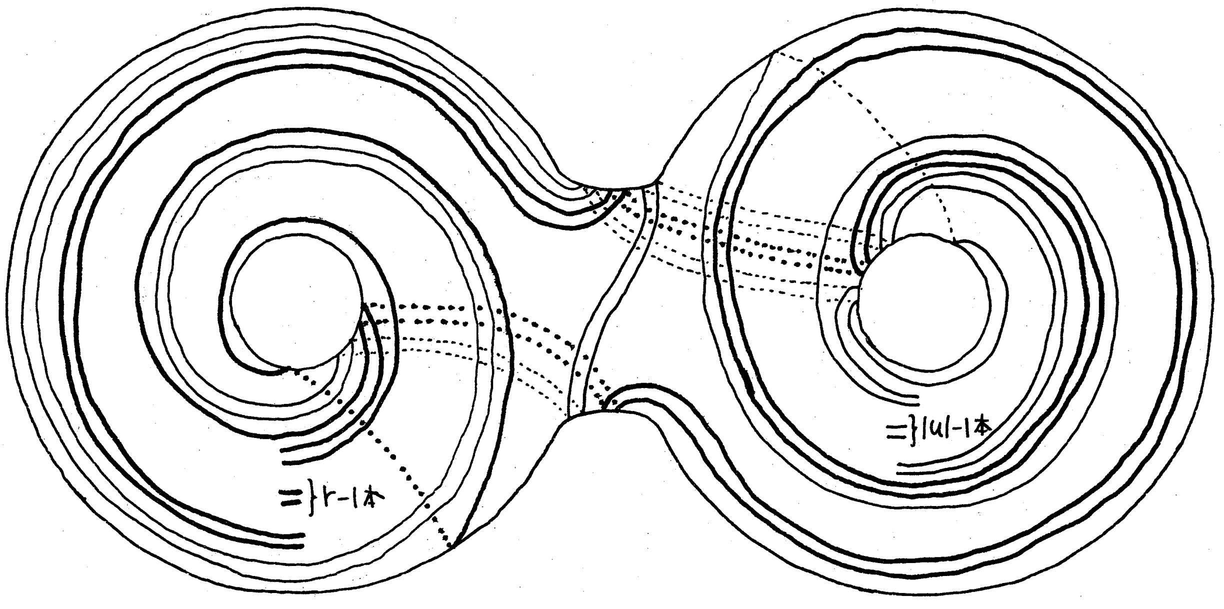
逆に $|s|=1$ のとき。$K(rstu)=K_1I \cup K_2I$ を、$\partial K_1I=\partial K_2I=T$ とおき、$cl(K(rstu)-T\times I)=K_1I \cup K_2I$ とみなして、$K(rstu)=K_1I \cup T\times I \cup K_2I$ とみる。この分割を用いることにより、$|s|=1$ に注意すれば、$K(rstu)$ のgenus 2のHeegaard splittingを得る。

以上でSapphire spaceのHeegaard genusが分かったが、今genus 2のHeegaard splittingを持つものに注目する。$|s|=1$ のとき、1.7Theoremより $K(rstu)=K(r\ 1\ ru-1\ u)$ とおける。このとき実際にgenus 2のHeegaard splittingを構成すればそのdiagramsは以下のようになる。

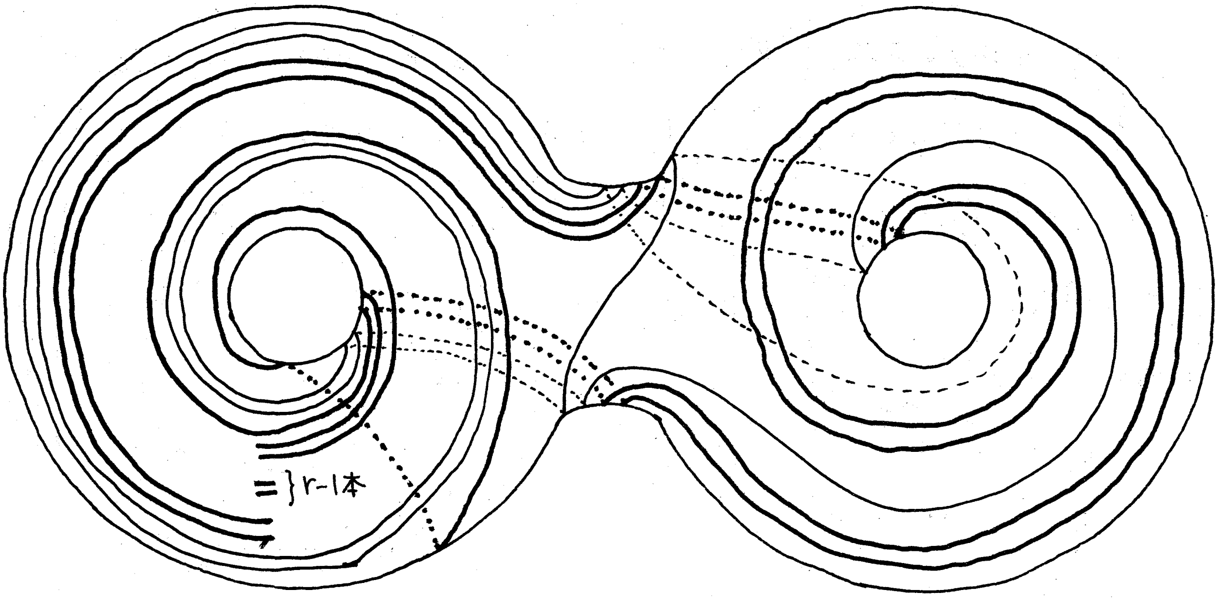
r>0 , u>0 のとき



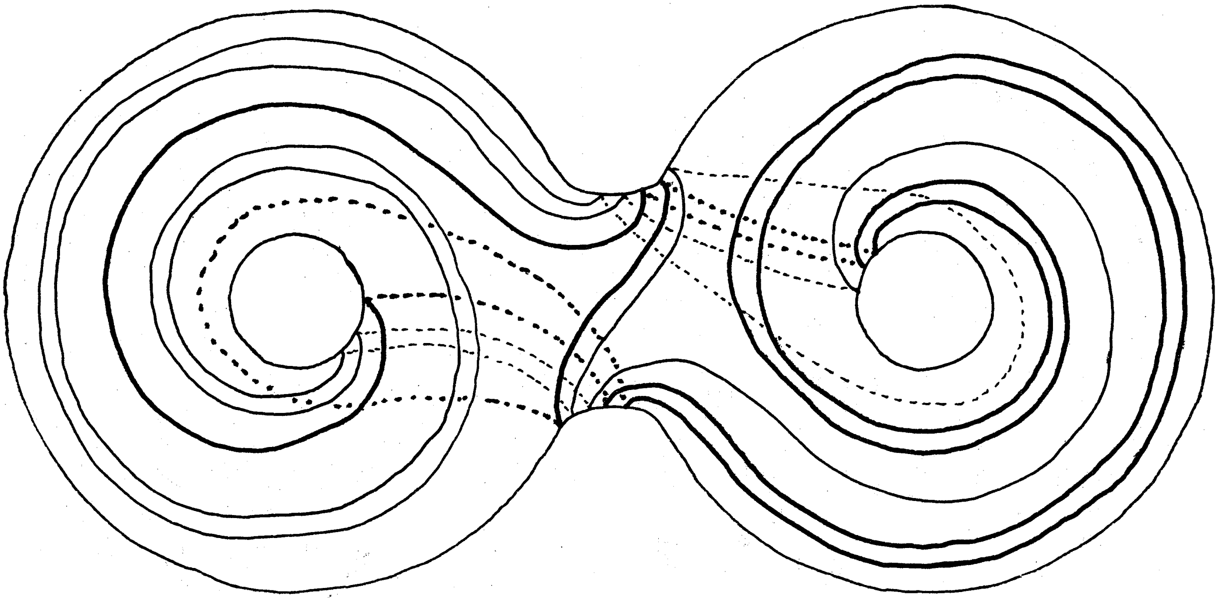
r>0 , u<0 のとき



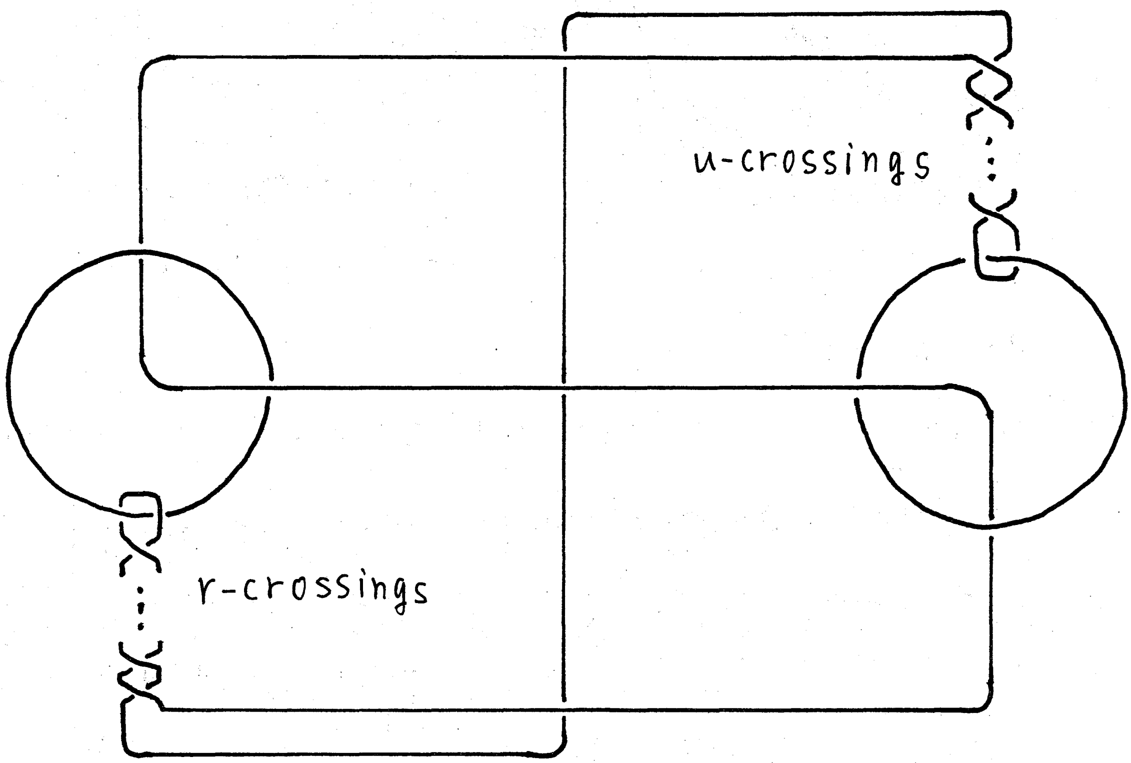
$r>0$, $u=0$ のとき



$r=u=0$ のとき



さて、[2],[8],[9]より、genus 2のHeegaard splittingを持つclosed orientable 3-manifoldはS^3内のあるlinkに沿ってbranchするS^3の2-fold branched covering spaceになる。故に[8]の方法によってそのlinkを構成すれば、$K(r1\ ru\text{-}1u)$は下のlinkに沿ってbranchするS^3の2-fold branched covering spaceである。



特に$r=u=0$のとき。$K(0110)$はBorromean ringsに沿ってbranchするS^3の2-fold branched covering spaceとなるが、このlinkがperiod 3の周期を持つことを利用すれば、$K(0110)$はfigure eight knotに沿ってbranchするS^3の3-fold cyclic branched covering spaceとなることがわかる。

—— References ——

[1] K. Asano : Homeomorphisms of Prism manifolds Yokohama Math. J. vol 26 (1978) 19~25

[2] J. S. Birman and H. M. Hilden : Heegaard splitting of branched coverings of S^3, Trans. Amer. Math. Soc. vol 213 (1975) 315~352

[3] J. Hempel : 3-manifolds, Ann. of Math. Studies No. 86 Priceton N. J., Princeton University Press 1976

[4] W. Jaco : Lectures of three manifold topology, Conference board of Math. Science, Regional Conference Series in Math. No. 43 1980

[5] P. K. Kim : Some 3-manifolds which admit Klein bottle, Trans. Amer. Math. Soc. vol 244 (1978) 299~312

[6] K. Morimoto : Klein bottles in genus two 3-manifolds, pre print

[7] D. Rolfsen : Knots and Links, Mathematics Lecture Series 7, Publish or Perish Inc., Berkeley, Ca, 1976

[8] M. Takahashi : An alternative proof of Birman-Hilden-Viro's Theorem, Tsukuba J. Math. vol 2 (1978) 27~34

[9] O. Ja. Viro : Linkings, Two-sheeted branched coverings and Braids, Math. sb. 87 (129) (1972) 216~228 = Math. USSR sb. 16 (1972) 223~236