

REDUCEによるLegendre陪関数 $P_\ell^m(\cos\theta)$ の差分化

広 大 工 広田良吾 (Ryogo Hirota)

§1 序 微分方程式の理論とくらべて差分方程式の理論は未発達である。その理由は色々と考えられるが、最大の原因は差分演算では極限操作 $\delta \rightarrow 0$ が無いので、演算結果が非常に繁雑になることである。ある程度は、演算形式の整備や、新しい関数の導入によって差分演算を簡素化できるが、微分と比較して差分は本質的に面倒なのである。この差分計算の面倒さとある程度救ってくれるのが、計算機による数式処理である。数式処理の出現により、差分学の発達が促進される事を期待している。

以下で、差分演算子の REDUCE 2 による表現について記述

1. Legendre 陪関数 $P_\ell^m(\cos\theta)$, もっと一般に Jacobi の多項式 $J_n^{\alpha, \beta}(\cos\theta)$ の差分化 (θ を離散化する) について結果を示す。

§2 中心差分演算子 Δ_x と平均化演算子 Π_x

差分計算では、前進差分、後退差分、中心差分など色々な差分を使うが、理論形式の美しさからここでは中心差分 Δ_x を採用する。中心差分 Δ_x と平均化演算子 Π_x を次のように定義する。 x の関数 $f(x)$ に対して

$$\Delta_x f(x) \equiv \delta^{-1} [f(x + \frac{\delta}{2}) - f(x - \frac{\delta}{2})], \quad (1)$$

$$\Pi_x f(x) \equiv 2^{-1} [f(x + \frac{\delta}{2}) + f(x - \frac{\delta}{2})], \quad (2)$$

とする。 δ は差分間隔で定数とする。 このとき二つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積に対する演算規則は

$$\Delta_x [f(x)g(x)] = [\Delta_x f(x)][\Pi_x g(x)] + [\Pi_x f(x)][\Delta_x g(x)], \quad (3)$$

$$\Pi_x [f(x)g(x)] = [\Pi_x f(x)][\Pi_x g(x)] + \delta^2 [\Delta_x f(x)][\Delta_x g(x)], \quad (4)$$

$$g \equiv (\delta/2),$$

となる。

(3), (4) 式を REDUCE 2 で表現すると (REDUCE 2 と REDUCE 3 ではマニュアルが異なっているので、以下の表現は REDUCE 3 ではエラーになる可能性がある)

OPERATOR DL, PI;

LINEAR DL, PI;

FORALL F, G, X LET

$$DL(F * G, X) = DL(F, X) * PI(G, X) + PI(F, X) * DL(G, X),$$

$$PI(F * G, X) = PI(F, X) * PI(G, X) + Q * 2 * DL(F, X) * DL(G, X);$$

となる。演算子の対応は次の通りである。

$$\Delta_x F(x) \Leftrightarrow DL(F, X), \quad (DL \text{ は } \textit{delta} \text{ の略})$$

$$\Pi_x F(x) \Leftrightarrow PI(F, X). \quad (PI \text{ は } \textit{pi})$$

§ 2. 階乗関数 $f(x)^{(n)}$

微分では x の指数関数の微分は簡単に

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1} \quad (5)$$

となる。この形式を差分でも保存するように階乗関数 $x^{(n)}$ を導入する：

$$\Delta_x x^{(n)} = n x^{(n-1)}. \quad (6)$$

中心差分 Δ_x に対する階乗関数は、 n は自然数として、

$$n=0 : \quad x^{(0)} = 1,$$

$$n=1 : \quad x^{(1)} = x,$$

$$n > 1 : \quad x^{(n)} = (x + (n-1)\delta/2) x^{(n-2)} (x - (n-1)\delta/2),$$

$$n > 0 : \quad x^{(-n)} = 1/x^{(n)},$$

と定義する。注： n が実数のときはガンマ関数によって表現される。

Legendre 陪関数 $P_n^m(\cos \theta)$ と Jacobi の多項式 $J_n^{\alpha, \beta}(\cos \theta)$ のように $\cos \theta$ と $\sin \theta$ の多項式の差分を計算するのに必要なので、上記の階乗関数を一般化する。 $f^{(n)}(x)$ を次式で定義する。自然数 n に対して

$$n=0 : \quad f^{(0)}(x) = 1, \quad (7)$$

$$n=1 : \quad f^{(1)}(x) = f(x), \quad (8)$$

$$n > 1 : \quad f^{(n)}(x) = f(x + (n-1)\delta/2) f^{(n-2)}(x) f(x - (n-1)\delta/2), \quad (9)$$

$$n > 0 : \quad f^{(-n)}(x) = 1/f^{(n)}(x). \quad (10)$$

$\therefore n f^{(n)}(x)$ に対して、次の差分規則が成立する。

$$\Delta_x f^{(n)}(x) = n f^{(n-1)}(x) \Delta_{x,n} f(x), \quad (11)$$

$$\Pi_x f^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x) \Pi_{x,n} f(x). \quad (12)$$

$\therefore \tau''$

$$\Delta_{x,n} f(x) \equiv (n\delta)^{-1} \{ f(x+n\delta/2) - f(x-n\delta/2) \}, \quad (13)$$

$$\Pi_{x,n} f(x) \equiv 2^{-1} \{ f(x+n\delta/2) + f(x-n\delta/2) \}. \quad (14)$$

である。

$$\begin{aligned} \text{例. } \Delta_{x,n} \sin x &= \frac{1}{n\delta} (\sin(x+n\delta/2) - \sin(x-n\delta/2)) \\ &= \left(\frac{2}{n\delta}\right) \sin\left(\frac{n\delta}{2}\right) \cos x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{x,n} \sin x &= \frac{1}{2} (\sin(x+n\delta/2) + \sin(x-n\delta/2)) \\ &= \cos(n\delta/2) \sin x, \end{aligned}$$

となるので、定数 $p_n, q_n \in \mathbb{R}$ となる。

$$P_n \equiv (\delta/2)^{-1} \sin(n\delta/2), \quad (15)$$

$$Q_n \equiv \cos(n\delta/2). \quad (16)$$

$\lim \delta \rightarrow 0$ では $P_n \rightarrow n$, $Q_n \rightarrow 1$ となる。

以上の演算規則により、次の公式を得る。

$$\Delta_x \sin^{(n)} x = P_n \sin^{(n-1)} x \cdot \cos x, \quad (17)$$

$$\Delta_x \cos^{(n)} x = -P_n \cos^{(n-1)} x \cdot \sin x, \quad (18)$$

$$\Pi_x \sin^{(n)} x = Q_n \sin^{(n-1)} x \cdot \sin x, \quad (19)$$

$$\Pi_x \cos^{(n)} x = Q_n \cos^{(n-1)} x \cdot \cos x. \quad (20)$$

式 (17), (18), (19), (20) は REDUCE 2 で表現する。

OPERATOR FS, FC, P, Q;

FORALL N, X LET

DL(FS(N,X),X) = P(N)*FS(N-1,X)*FC(1,X),

DL(FC(N,X),X) = -P(N)*FC(N-1,X)*FS(1,X),

$$PI(FS(N, x), x) = Q(N) * FS(N-1, x) * FS(1, x),$$

$$PI(FC(N, x), x) = Q(N) * FC(N-1, x) * FC(1, x),$$

$$DL(P(N), x) = 0, \quad DL(Q(N), x) = 0,$$

$$PI(P(N), x) = P(N), \quad PI(Q(N), x) = Q(N);$$

$$P(0) := 0 \quad Q(0) := 1$$

FORALL X LET

$$FS(0, x) = 0, \quad FC(0, x) = 1,$$

$$FS(-1, x) = 1/FS(1, x), \quad FC(-1, x) = 1/FC(1, x);$$

最初の4行が式(17), (18), (19), (20)に対応している:

$$FS(N, x) \Leftrightarrow \sin^{(n)} x,$$

$$FC(N, x) \Leftrightarrow \cos^{(n)} x.$$

FS は factorial sine, FC は factorial cosine である。

5, 6行は $P(N) \Leftrightarrow p_n$, $Q(N) \Leftrightarrow q_n$ が定数であることを示している。

7行目には $p_n = (d/2)^{-1} \sin(nd/2)$, $q_n = \cos(nd/2)$ の性質を加法定理を使って示したが、演算の早い段階で加法

定理を便うと、式の爆発が起り易いので、 $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$ だけ便った。

8, 9, 10行も同じで、式が複雑にならない限り、FSやFCの性質を便うようにしている。

式(15), (16) は加法定理により

IF NUMBERP N AND ARB $N > 1$ LET

$$P(N) = P(N-1) * Q(1) + Q(N-1) * P(1),$$

$$Q(N) = Q(N-1) * Q(1) - Q * 2 * P(N-1) * P(1);$$

$$(Q := (\delta/2) *)$$

と表現される。

以下実際には REDUCE 2 を便うて計算させてみると、思っ
かけない所で、人間と REDUCE 2 の数式の表現に対する理
解の差も見せつけられる。例えば

$DL(F**2, X)$ の計算は人間から演算の定義
より正しく行おうか、REDUCE 2 では $F * F$ と $F**2$
の内部表現が異なっているのか、 $DL(F**2, X)$ の計
算は教えないと書てくれない。

§3. 離散化された Legendre の陪関数 $P_\ell^m(\cos x)$

以下で述べる結果は、現在では手計算で証明できる結果であって、REDUCE 2 を使う必要は全くない。REDUCE 2 を使って示せるのはせいぜい $\ell=3$ 位までである。しかし $P_\ell^m(\cos x)$ の一般形や差分方程式の形を決定するためには、色々と試行錯誤的に予想を立て、 $\ell=0, 1, 2, \dots$ について、それが正しい事を示すために大量の計算を行う必要がある。その計算量は普通の人間の能力をはるかにオーバーしている。予想が正しくても計算ミスのため間違った結論を下す場合がある（これが一番恐ろしい）。このとき数式処理は最大の偉力を発揮する。

離散化された Legendre の陪関数 $P_\ell^m(\cos x)$ は次の差分方程式を満す。

$$\left\{ \frac{1}{\sin x} \Delta_x \sin x \Delta_x + P_\ell P_{\ell+1} - P_m^2 \frac{1}{\sin x} \nabla_x \frac{1}{\sin x} \nabla_x \right\} P_\ell^m(\cos x) = 0,$$

ここで $P_\ell^m(\cos x)$ は $P_\ell^0(\cos x)$ から Rodriguez の公式

$$P_\ell^m(\cos x) = \sin^{(m)} x \left[-\frac{1}{\sin x} \Delta_x \right]^m P_\ell^0(\cos x)$$

によって生成される。そして

$$P_\ell^0(\cos x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{1}{\sin x} \Delta_x \right)^\ell (\sin^{(2\ell)} x),$$

また $P_\ell! = P_\ell P_{\ell-1} \cdots P_2 P_1.$

$P_\ell^m(\cos x)$ は次の漸化式に満足す。

$$P_\ell^{m+1}(\cos x) = \left[-\rho_m \Delta_x + \rho_m \frac{\cos x}{\sin x} \Pi_x \right] P_\ell^m(\cos x),$$

$$C_\ell^m P_\ell^{m-1}(\cos x) = \left[\rho_m \Delta_x + \rho_m \frac{\cos x}{\sin x} \Pi_x \right] P_\ell^m(\cos x),$$

また $C_\ell^m = P_{\ell+m} P_{\ell-m+1}.$

§4. 離散化された Jacobi の多項式 $P_n^{\alpha, \beta}(\cos x)$

離散化された Jacobi 多項式 $P_n^{\alpha, \beta}(\cos x)$ は次の差分方程式をみたす。

$$\left\{ \rho_{\alpha+\beta+1} \Delta_x^2 + (\rho_{\alpha-\beta} + \rho_{\alpha+\beta+1} \cos x) \frac{1}{\sin x} \Delta_x \Pi_x + \rho_n \rho_{n+\alpha+\beta+1} \right\} P_n^{\alpha, \beta}(\cos x) = 0.$$

$P_n^{\alpha, \beta}(\cos x)$ は Rodrigues の公式をみたす。

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos x) = \frac{1}{n! W(\alpha, \beta, 0, x)} \left(\frac{1}{\sin x} \Delta_x \right)^n W(\alpha, \beta, n, x),$$

に $\tilde{W}$ (

$$W(\alpha, \beta, n, x) = \sin^{((2\alpha+n))}(\alpha/2) \cos^{((2\beta+n))}(\alpha/2) \sin^{((n))} x.$$

漸化式は

$$\begin{aligned} & 2 P_{n+1} P_{\alpha+\beta+n+1} P_{\alpha+\beta+2n} P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos x) \\ &= P_{\alpha+\beta+2n+1} (P_{\alpha+\beta+2n+2} P_{\alpha+\beta+2n} \cos x + \gamma_1 P_{\alpha-\beta} P_{\alpha+\beta}) P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos x) \\ &\quad - 2 \gamma_n \gamma_{\alpha+n} \gamma_{\beta+n} \gamma_{\alpha+\beta+n} P_{\alpha+n} P_{\beta+n} P_{\alpha+\beta+2n+2} P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(\cos x). \end{aligned}$$