数理解析研究所講究録
522巻 1984年 16-25

辺付加によるグラフの拡大構成問題

広島大学工学部 渡辺 敏正
広島大学工学部 中村 昭
広島大学大学院工学研究科 高橋 昌也

1、まえがき

拡大構成問題とは、（有向）グラフG＝（V，E）について、Vの異なる点を両端点とし、$e \notin E$である様なすべての辺eにそれぞれ重み$w(e)$（非負整数）が付いている時、G＋Aが性質を充たし、且つ，Aの辺の重みの総和が最小になる様な（有向）辺集合Aを求める問題である。

更に、本稿では、拡大構成問題の定義を若干拡張した次の問題も考えることにする：

指定された部分集合$V' \subset V$に対する拡大構成問題とは、G＋AがV'に関して性質Cを充たし、且つ，Aの辺の重みの総和が最小になる様な（有向）辺集合Aを求める問題である。但し、G＋AがV'に関して性質Cを充たすとは、性質Cを充たし，且つ，$V' \subset V_H$なるG＋Aの部分グラフH＝（V_H，E_H）

が存在することである。

この時、拡大構成問題は、次の条件の下で、いくつかの種類に分けることができる。例えば、

(i) Gが有向グラフの場合と、Gが無向グラフの場合。

(ii) 各辺の重みが異なる場合と、各辺の重みが等しい場合。

後者の場合、重みをもたない拡大構成問題といい、本稿では後者の場合にしか触れないので、特にことわりのない場合は、重みをもたない場合とする。

(iii) 指定された頂点部分集合V'に関する拡大構成問題で、$V' = V$の場合と、$V' \subset V$の場合。前者の場合は従来から考えられている（つまり、最初に定義した）拡大構成問題であり、後者の場合は、$G + A$がV'に関して性質Cを充たし、且つ，Aの辺の重みの総和が最小になる様な（有向）辺集合Aを求める問題となる。

である。本稿では主に、すべて重みをもたず、

(1) 有向グラフについて、$V' \subset V$で、性質Cが強連結

(2) 無向グラフについて、

(i) $V' = V$で、Cが3－辺連結 (ii) $V' \subset V$で、Cが、

①2－辺連結，②3－辺連結

の場合を取り扱う。

2、結果

得られた結果は次表の太枠の中に示されている。（その他は従来の結果）

		W	C	n=2	n=3	n≥4
無向グラフ	$V'=V$	有	VC	NPC[1]*	NPC[8]	
			EC	NPC[1]*		
		無	VC	$O(\|V\|+\|E\|)$[2]	$O(\|V\|^3)$[8][9]	
			EC	$O(\|V\|+\|E\|)$[1]	$\boxed{O(\|V\|^2(\|V\|+\|E\|))}$	
	$V'\subset V$	有	VC	△	△	
			EC	△		
		無	VC	$O(\|V\|+\|E\|)$[12]		
			EC	$\boxed{O(\|V\|+\|E\|)}$	$\boxed{O(\|V\|^2(\|V\|+\|E\|))}$	
有向グラフ	$V'=V$	有	SC	NPC[1]*		
		無	SC	$O(\|V\|+\|E\|)$[1]		
	$V'\subset V$	有	SC	△		
		無	SC	$\boxed{\text{NPC}}$		

		W	C	結果
有向木	$V'=V$	無	EC	P
空グラフ				P
2進有向木			VC	$O(n\|V\|)$

Wは重み，Cは性質，VCはn－連結，ECはn－辺連結，SCは強連結，NPCはNP－完全，Pは多項式である。

*は、$O(|V|^2)$の近似アルゴリズムが存在する。

又、△はそれぞれ、性質が同じ所の$V'=V$の結果より、NP－完全であることがわかる。

更に、今回得られた4つの結果について、(2)-(ii)-①については、与えられたグラフの余分な部分を取り去ることにより、その結果得られたグラフに対して、表の▨の所の方法を用いることができることが示された。また、同様に、(2)-(ii)-②についても、与えられたグラフGの余分な部分を取り去るこ

とにより、その結果得られたグラフに対して、(2)-(i)の方法を用いることができることが示された。

よって、以後の節では、(1)の結果と、(2)-(i)の方法についての概要を述べることにし、それ以外の方法は、ここでは省略する。（詳細は文献[14]に述べてある。）

3、基礎的定義

頂点v_1からv_nへのパス(path)とは、辺の列$(v_1, v_2), (v_2, v_3), \cdots, (v_{n-1}, v_n)$である。但し、$v_2, \cdots, v_{n-1}$は互いに異なる頂点とする。$v_1$から$v_n$へのパスのことを$v_1$-$v_n$パスということもある。

グラフGから何個かの辺を除去して非連結又は自明なグラフにする時の除去すべき最小個数を辺－連結度(edge-connectivity)と言い、$k_1(G)$と表わす。更に、$k_1(G) \geq n$なるグラフGのことをn－辺連結(n-edge-connected)という。

次に、ＮＰ－完全（ＮＰ－complete）の定義を述べる。

非決定論的チューリング機械(nondeterministic Turing-machine)によって、問題の規模(size)に関する多項式時間(polynomial time)で解くことのできる決定問題(decision problem)（答えが"yes"か"no"かであることを記述する問題）の集合を$\mathcal{NP}$という。２つの決定問題D_1，D_2に対して、D_1がD_2に多項式変換される(polynomialy reducible)とは、D_1に属する勝手な

問題P_1が与えられた時、P_1の規模の多項式時間でP_1からD_2に属する問題P_2が構成でき、しかも、P_1に対する答えが"yes"である時及びその時のみP_2に対する答えが"yes"であることが成り立つことである。この時、決定問題Dについて、次の(i)(ii)が成り立つ時、DはNP－完全であるという；(i) $D \in \mathcal{NP}$ (ii) NP－完全であることが知られている決定問題D'がDに多項式変換される。

4、有向グラフについて、$V' \subset V$の時の強連結化

次の様に定式化した決定問題LはNP－完全である。

L
- 入力(instance)；　与えられた有限有向グラフ$G=(V,E)$，指定された頂点部分集合$V' \subset V$，非負整数k
- 質問(Question)；　$|A| \leq k$，且つ，$G+A$がV'に関して強連結となる様な有向辺集合Aがあるか否か？

よって、与えられた有向グラフ$G=(V,E)$の指定された頂点部分集合V'に対して、$G+A$がV'に関して強連結となる様な最小有向辺集合Aを求める問題はNP－完全である。

5、無向グラフについて、$V'=V$の時の3－辺連結化

Gのある頂点部分集合V_1について、V_1が以下の様なことが成り立つ極大な集合である時、V_1をn－辺－成分という；

勝な2頂点$u, v \in V_1$，勝手な$n-1$本の辺$e_1, \cdots, e_{n-1}$について、$G-\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$に$u$-$v$パスが存在する。

又、勝手なn-辺-成分G_1について、G_1の頂点と、$G-G_1$以外の部分の頂点を結ぶ辺の本数をG_1の次数という。

この時、まず、Gの3-辺-成分を求め、更にGの2-辺-成分を求める。

ここで、Gの次数i $(i=0,1,2)$の3-辺-成分の集合をD_iとし、D_i以外の次数iの2-辺-成分の集合をP_iとし、D_2の元を$2-i$個しかもたないP_iの元の集合を$\tilde{P_i}$とする。この時、Gを3-辺連結化するための必要辺数の下界は、D_iの元の数をd_i，$\tilde{P_i}$の元の個数をp_iとすると、

$$\Pi = \lceil (3d_0+2d_1+d_2+p_0+p_1+p_2)/2 \rceil$$ である。

以下に、Π本の辺でGを3-辺連結化する方法を述べる。その概要は、まず、Gを最小辺数で2-辺連結化し[1]、次に、その結果得られたグラフを最小辺数で3-辺連結化するというものである。

まず、Gを2-辺連結化する方法を述べるが、その前にいくつかのことに触れておく。

GのP_1の元の個数をa，P_0の元の個数をbとする。又、次の様な3-辺-成分$v(1), v(2), v(3)$を定義する。

1、Gの各々のP_1の元について、次の様な3-辺-成分$v(1)$,

$v(2)$を定義する。

(i) D_1の元の時、$v(1)=v(2)$はそのD_1の元

(ii) $P_1-\tilde{P}_1$の元の時、$v(1), v(2)$はその元の異なる2つのD_2の元

(iii) $\tilde{P}_1$の元の時、$v(1)=v(2)$はその元の唯一のD_2の元

2、Gの各々のP_0の元について、次の様な$v(1), v(2), v(3)$を定義する。

(i) D_0の元の時、$v(1)=v(2)=v(3)$はそのD_0の元

(ii) $P_0-\tilde{P}_0$の元の時、$v(1), v(2), v(3)$は、その元の異なる3つのD_2の元

(iii) $\tilde{P}_0$の元の時、$v(1), v(2)=v(3)$は、その元の2つしかない異なるD_2の元

方法は次の通りである。

Gのn個の連結成分を文献[1]の方法で、n−1本の辺集合A_1で連結化し、次に$G+A_1$の$a'(=a+2b-2(n-1))$個の次数1の2−辺−成分を$\lceil a'/2 \rceil$本の辺集合A_2で結んで$G+A_1$を2−辺連結化する。この時、A_1，A_2の辺は、その辺の入る2−辺−成分の次の元に結ぶ；

GのP_1の$v(1)$に1本ずつ，GのP_0の$v(1), v(2)$に1本ずつ。但し、$a+2b$が奇数の時、$G+A_1$の$\lceil a'/2 \rceil$番目の2−辺−成分が、G上でP_1の元なら$v(2)$に、P_0の元なら$v(3)$に$\lceil a'/2 \rceil$番目の辺を

結ぶ。

この時、Gは最小辺数$\lceil a/2 \rceil+b$で2－辺連結化されている。

この時、$A'=A_1+A_2$とし、$G'=G+A'$とする時、G'の次数2の3－辺－成分の数は、

$K=3d_0+2d_1+d_2+p_0+p_1+p_2-(a+2b+j)$

但し、$j=0$（$a+2b$が偶数），$j=1$（$a+2b$が奇数）

この時、明らかに、G'を3－辺連結にするために必要な辺数の下界は$\lceil K/2 \rceil$であり、$\lceil K/2 \rceil+\lceil a/2 \rceil+b=\pi$である。よって、$\lceil K/2 \rceil$本で$G'$を3－辺連結にする様な辺集合を求めれば、Gを$\pi$本の辺で3－辺連結にすることができる。

次に、G'を$\lceil K/2 \rceil$本の辺で3－辺連結にする方法を示す。

まず、Depth-first-searchで、次数2の3－辺－成分をすべて見つけ出し、見つけ出した順に番号$x(1),x(2),\cdots,x(K)$を付ける。そして、辺集合$A_3=\{(x(i),x(i+\lfloor K/2 \rfloor))\mid 1\le i\le \lceil K/2 \rceil\}$を各$x(i)$の勝手な頂点に付加する。この時、$G'+A_3$が3－辺連結であることが示されたが、証明は略す。明らかに$|A_3|=\lceil K/2 \rceil$である。

よって、$A=A'+A_3$とすれば、AはGを3－辺連結にする最小辺集合である。

6、あとがき

本稿では、指定された頂点部分集合V'に対する強連結化、

n－辺連結化，V′＝Vの時のn－辺連結化の拡大構成問題の中で、前者の場合の強連結化と、n=2,3の場合の辺連結化，後者の場合のn=3の場合の辺連結化を対称としたが、辺連結化のn≥4の場合の増大問題が今後の課題である。

また、辺が重みをもつ場合に対する近似アルゴリズムが実用面には重要であるので、それらの研究も今後の課題である。

文献

[1] K.Eswaran and R.Tarjan ; Augmentation problem, SIAM J. Comput. 5,4 (1976) 653-665

[2] A.Rosenthal and A.Goldner ; Smallest augmentations to biconnect a graph, SIAM J. Comput. 6,1 (1977) 55-66

[3] G.Frederickson and J.Ja'ja' ; Approximation algorithms for several graph augmentation problems, SIAM J. Comput. 10,2 (1981) 270-283

[4] R.Tarjan ; A note on finding the bridge of a graph, Information Processing Lett. 2 (1974)

[5] S.Baase ; Computer Algorithms ; Introduction to design and analysis, Addison-Wesley, New York (1973)

[6] S.Even ; Graph Algorithms ; Computer Science Press (1979)

[7] F.Harary ; Graph Theory , Addison-Wesley (1969)
(池田貞雄訳 ; 「グラフ理論」, 共立(1971))

[8] 渡辺, 中村 ; 辺の付加による点-連結度の増加問題, 信学技報, AL81-26(1981-07)

[9] T.Watanabe and A.Nakamura ; On a smallest augmentation to triconnect a graph, Tech.Rep.C-18, Rep. of Appl. Math., Faculty of Engineering, Hiroshima University, Higashi-Hiroshima, Japan (1983)

[10] 梶谷, 上野 ; 有向木から拡大構成される最小k-枝連結有向グラフ, 信学技報, CAS83-3 (1983-05)

[11] H.Frank and W.Chou ; Connectivity considerations in the design of survivable networks, IEEE Trans. Circuit Theory, CT-17.(1970), 486-490

[12] 藤田, 渡辺, 翁長 ; グラフの2重連結化問題, 昭和58年度, 電気四学会中国支部連合大会予稿集52221 (1983-11)

[13] 増澤, 萩原, 和田, 都倉 ; k-頂点連結性に関する有向2進木の拡大構成問題, 電子通信学会論文誌, J67-D,1 (1984)77-84

[14] 高橋 ; ネットワークモデルの構成に関する基礎的研究, 昭和58年度広島大学大学院工学研究科修士論文(1984)