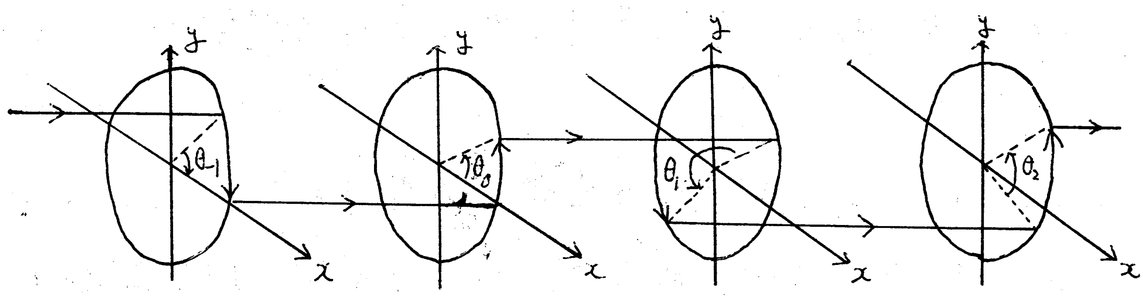
数理解析研究所講究録
523巻 1984年 169-182

推移作用素系の構造について

山形大　理　河村新蔵 (Shinzô Kawamura)

序



数学的対象として、時間と空間との関わりの問題はよく取り上げられる問題であるが、この講演におけるテーマもそうした問題の一つとして、時間変換に伴う空間上の線型作用素の族を取り扱う。これらの線型作用素は推移作用素と言われ、一つのまとまりとしての系の構造が研究される。この研究と関数環との関わりについて述べる事にしよう。

H を任意次元のヒルベルト空間としよう。$\mathcal{K}$ を H の可算無限個のコピー $\{H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ によって生成される直和（$\mathcal{K}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\oplus H_n$）とする。推移作用素として $\mathcal{K}$ 上のユニタリ作用素で $UH_n=H_{n+1}$ $(n\in\mathbb{Z})$ なる条件をもつ U を考えること

にする。特に、いわゆる推移作用素を $S\otimes I$ と書くことにする。すなわち $S\otimes 1(\{x_n\})=\{x_{n-1}\}$ $(\{x_n\}\in\mathfrak{H})$ である。推移作用素 U に対して、$W=U(S\otimes 1)^*$ とおけば W は $WH_n=H_n$ $(n\in\mathbb{Z})$ となるユニタリ作用素で $U=W(S\otimes 1)$ となる。$\mathfrak{H}$ 上の推移作用素からなる、ある一つの族を $\mathcal{S}$ とする。又 $\mathbb{W}(\mathcal{S})=\{W \mid U=W(S\otimes 1)\in\mathcal{S}\}$ とする。我々の研究の目的は、$\mathcal{S}$ の構造を知るという事である。その為に $\mathcal{S}$ その物ではなく、次の様な $\mathcal{S}$ と密接と関っている問題について考える。

I. $\mathcal{S}$ による不変部分空間の問題 [4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13].

II. $\mathcal{S}$ から生成されるフォン＝ノイマン環の問題 [7].

III. $\mathcal{S}$ から生成される C^*-環の分類 [8].

IV. $\mathcal{S}$ から生成される非共役環の構造 [11].

関数環との関連において、特に深い関係をもつのは I と IV である。I は元々、Beurling [1], Helson [3], Halmos [2] による推移作用素の不変部分空間の研究に基づいている。IV の研究は非可換ハーディ＝クラスと呼ばれ、現在、斎藤(吉) Muhly McAsey によって盛んに研究されている。この講演では、I についての現在の研究の様子を一つの角度から紹介することにする。

§1. Beurling - Helson - Halmos の定理.

最初に推移作用素の族 $\mathcal{S}$ が単に一個だけの場合について考えてみると、これは古典的な Beurling の定理 [1] に端を発し、Helson [3], Halmos [2] の任意の multiplicity の場合への拡張と続く。従ってこの定理から話を始めることにしよう。$\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$ ($\mathbb{C}$ は複素平面)、$L^2(\mathbb{T})$ を $\mathbb{T}$ 上の二乗可積分関数全体とする。この場合、測度は規格化されたルベーグ測度 $dx/2\pi$ を考えている。H を任意次元のヒルベルト空間とする。$L^2(\mathbb{T})$ と $\mathbb{T}$ に対して $\mathfrak{H}$ を二個のヒルベルト空間のテンソル積とする。これを

$$\mathfrak{H}=L^2(\mathbb{T})\otimes H$$

と書く。$\mathbb{T}$ 上の関数 $e_n : z \longrightarrow z^n$ は $L^2(\mathbb{T})$ の一つの基底であり、$H_n = e_n\otimes H$ とすれば、$\mathfrak{H}$ は $\{H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の無限直和として表わされる。それを $\mathfrak{H}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\oplus H_n$ と書く。小文字 S を $L^2(\mathbb{T})$ 上のいわゆる推移作用素とする。即ち

$$(Sf)(z)=zf(z)\ ,\quad f\in L^2(\mathbb{T}),$$

である。$(S\otimes 1)(\sum_{i=1}^{n} f_i\otimes\xi_i)=\sum_{i=1}^{n} Sf_i\otimes\xi_i$ であるが、$\mathfrak{H}$ $=L^2(\mathbb{T}, H)=\{F \mid F$ は H に値をとる $\mathbb{T}$ 上の二乗可積分関数$\}$ と見ることによって

$$((S\otimes 1)F)(z)=zF(z)\ ,\quad F\in L^2(\mathbb{T}, H)$$

と考えることができる。$L^\infty(\mathbb{T}, B(H))$ を $B(H)$ に値をとる

$\mathbb{T}$ 上の有界な可測関数全体とする。このとき $S\otimes 1$ は $S(z)=z1 \in L^\infty(\mathbb{T}, B(H))$ による $L^2(\mathbb{T}, H)$ 上の乗法作用素 M_S と考えることができる。又 $L^\infty(\mathbb{T}, B(H)) = L^\infty(\mathbb{T})\otimes B(H)$ であることを注意しておこう。

定理1．[1, 2, 3]．$\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{H}$ の $S\otimes 1$ に対する不変部分空間とする。このとき次の分解が成り立つ。

(1) $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_r \oplus \mathfrak{M}_p$,

$\mathfrak{M}_r$ は可約な部分空間（*reducing subspace*）で $\mathfrak{M}_p$ は純単純不変部分空間（*pure-simply invariant subspace*）である。

(2) $\mathfrak{M}_r = P\mathfrak{H}$,

P は $L^\infty(\mathbb{T}, B(H))$ の射影子である。即ち $P(z)$ は a.e. $z\in\mathbb{T}$ で H 上の射影子である。

(3) $\mathfrak{M}_p = V(H^2(\mathbb{T}, H)) = V(H^2(\mathbb{T})\otimes H) = V(\sum_{n=0}^{\infty}\oplus H_n)$,

V は $L^\infty(\mathbb{T}, B(H))$ の部分等距離作用素である。

上記の定理の (3) について少し考えてみよう。$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}\ominus[S\mathfrak{M}]$ とすると、$\mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}_0 \oplus \mathfrak{M}_1 \oplus \cdots$ であり、$\mathfrak{M}_n = VH_n$ であることがわかる。$R(\mathfrak{M}_p)$ を $\mathfrak{M}_p$ を含む最小の可約な部分空間とすると、$R(\mathfrak{M}_p) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(S^n\otimes 1)\mathfrak{M}_0$ となる。V の *initial*

射影子は $1\otimes e$ (e は H 上の projection で $V^*V=1\otimes e$)

となり、

$$\mathcal{R}(\mathcal{M}_p)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(S^n\otimes 1)\mathcal{M}_0 = V(L^2(T)\otimes H)=V(1\otimes e)(L^2(T)\otimes eH)$$

となる。即ち $\mathcal{M}_p$ は $\sum_{m=0}^{\infty}\oplus eH_n$、$R(\mathcal{M}_p)$ は $(1\otimes e)\mathfrak{K}$ の V による像であることがわかる。

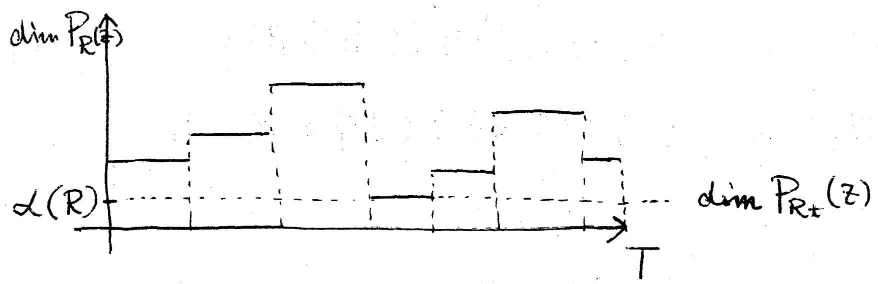
ここで可約空間の構造を射影子値可測関数を用いて調べてみよう。可約な部分空間 $\mathcal{R}$ に対し、それに対応する射影子を $P_{\mathcal{R}}$ とし、

$$\alpha(\mathcal{R})=\text{ess}\cdot\inf\{\dim P_{\mathcal{R}}(z)H \mid z\in T\}$$

とする。このとき $\mathcal{R}$ の中に純単純不変部分空間 $\mathcal{M}_p$ と純単純不変部分空間を含まない可約部分空間 $\mathcal{R}_t$ が存在し、

$$\mathcal{R}=\mathcal{R}_t\oplus\mathcal{R}(\mathcal{M}_p)$$

となる。又 $\dim P_{\mathcal{R}_t}(z)=\alpha(\mathcal{R})$ $(a.e.\ z\in T)$ となる。



特に $\dim H=1$ のときは自明でない可約部分空間は全て純単純不変部分空間を含まないことは周知の事である。可約な部分空間の分解の問題を一般の $\mathcal{S}$ について考えてみることにしよう。

§2. Beurling 型の不変部分空間.

最初に基本的な枠組について述べておく。$\mathcal{S}$ に対して $\mathbb{W}(\mathcal{S})=\{W \mid U=W(S\otimes 1)\in\mathcal{S}\}$ は $\mathfrak{H}$ 上のユニタリ作用素全体からなる群 $\mathbb{U}(\mathfrak{H})$ の部分集合であるので、$\mathbb{W}(\mathcal{S})$ は何の条件もないと、いろいろ複雑な不変部分空間が存在し、統一的な解析ができない [4;講究録398]

定理2 [4; Theorem 1.9]. $\mathbb{W}(\mathcal{S})$ が次の二条件をみたしているとする。

(1) $\mathbb{W}(\mathcal{S})$ は $\mathbb{U}(\mathfrak{H})$ の部分群である。

(2) $(S\otimes 1)\mathbb{W}(\mathcal{S})(S^*\otimes 1)=\mathbb{W}(\mathcal{S})$。

このとき、$\mathcal{S}$ の不変部分空間 $\mathcal{M}$ は

$$\mathcal{M}=\mathcal{M}_r\oplus\mathcal{M}_p$$

と分解される。$\mathcal{M}_r$ は可約な部分空間で、$\mathcal{M}_p$ は純単純不変部分空間である（可約な部分空間を含まない)。

定理2において $\mathcal{M}_r=\mathcal{M}_0\oplus\mathcal{M}_1\oplus\cdots$ となるが、$\mathcal{M}_0=\mathcal{M}\ominus[\mathcal{S}\mathcal{M}]$ で、$\mathcal{M}_n=\mathcal{S}^n\mathcal{M}_0$ $(n\geqq 1)$ であり、$\mathcal{M}_n$ $(n\geqq 2)$ は $\mathbb{W}(\mathcal{S})$ に対して不変であるが、$\mathcal{M}_0$ は必ずしも $\mathbb{W}(\mathcal{S})$ に対し不変ではない。そこで、純単純不変部分空間 $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{M}$ を含む最小の $\mathbb{W}(\mathcal{S})$ 不変部分空間 $\mathcal{N}$ は $\mathcal{N}=\mathbb{W}(\mathcal{S})\mathcal{M}$ となり、$\mathcal{N}_0$

$=\mathcal{W}(\mathcal{S})\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_n=\mathfrak{M}_n$ $(n\geqq 2)$ となる。従って本質的には $\mathfrak{M}$ の構造と $\mathfrak{N}$ の構造は違いがないことになり、以後我々は不変部分空間という用語を $\mathcal{S}$ と $\mathcal{W}(\mathcal{S})$ に対し共に不変であるという意味に用いる。又純準純不変部分空間 $\mathfrak{M}$ が

$$\mathfrak{M}=V(H^2(T)\otimes H)$$

となるとき、$\mathfrak{M}$ は Beurling 型であるという。ここで V は $\mathcal{S}$ の可換子環 $\mathcal{S}=\{T\in B(\mathfrak{H}) \mid TU=UT,\ \forall U\in\mathcal{S}\}$ の部分等距離作用素である。$\mathcal{S}$ が $S\otimes 1$ を含むことにより、$\mathcal{S}$ は $L^\infty(T)\otimes B(H)=L^\infty(T,B(H))$ の部分集合となっていることがわかっている。特に $\mathcal{S}=\{S\otimes 1\}$ の時は $\mathcal{S}=L^\infty(T)\otimes B(H)$ であり、定理1より任意の重複度の推移作用素族 $\mathcal{S}$ に対し、全ての純準純不変部分空間は Beurling 型である。一般の $\mathcal{S}$ について全ての純準純不変部分空間が Beurling 型になる為の条件は次の定理で与えられている。尚 $\mathcal{W}(\mathcal{S})$ は定理2の条件を充たしているとする。

定理3 [4; Theorem 2.12]　$\mathcal{S}$ の全ての純準純不変部分空間が Beurling 型であることと次の条件は同値である。

(1)　H 上にユニタリ作用素 u が存在して任意の $W=\sum\oplus w_n(\in\mathcal{W}(\mathcal{S}))$ は $w_{n+1}=u w_n u^*$ という形になっている。

(2)　e は次の条件をみたしている H 上の射影子とする。

即ち $W=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\oplus W_n\in \mathfrak{V}(\mathfrak{S})$ のうちの W_0 を H 上のユニタリ作用素とみて、任意の W_0 に対し $eW_0=W_0e$ である。又、任意の W_0 と可換な作用素 v とも可換である（$\forall W_0, W_0v=vW_0 \Rightarrow ev=ve$）。$D_0e$ の部分等距離作用素 v が $v^*v=e$ ならば $vv^*=e$ である。このような e に対して u は $ue=eu$ である。

上の定理の (1) と (2) は随分冗長な説明になってしまったが、ここで作用素環論（[14]）の言葉を借りて説明してみよう。$M(\mathcal{S})$ を $\mathcal{S}$ から生成されたフォン＝ノイマン環とする。$D(\mathcal{S})$ を $\mathfrak{W}(\mathcal{S})$ から生成されたフォン＝ノイマン環とする。D_0 を $D(\mathcal{S})$ の H_0 上への制限とする。D_0 は H 上のフォン＝ノイマン環とみることができる。$\alpha(x)=uxu^*$ とすると、α は D_0 上の自己同型写像となる。上記 (1) と (2) は次の様になる。

(1) $M(\mathcal{S})$ は D_0 と α による接合積である。これを $M(\mathcal{S})=D_0\times_\alpha\mathbb{Z}$ と書く。

(2) α は D_0 の中心元で D_0 の可換子環 D_0' の元とみての有限射影子を不変にする（$\alpha(e)=e$）。

この様に $\mathcal{S}$ の不変部分空間の構造とフォン＝ノイマン環

$M(\mathcal{S})$ 及び $D(\mathcal{S})$ は密接な関係があることが分る。次の章で、より深い関係の例として $\mathcal{S}$ の可約な部分空間の構造と $M(\mathcal{S})$ の型の種類（I, II, III 型等）との関係について述べる。

§3. 可約な部分空間の構造.

この章においては、$\mathcal{S}$ の不変部分空間は全て Beurling 型であるとする。すなわち $\mathcal{S}$ は定理3の (1), (2) の条件をみたすとする。更に議論の見通しを良くする為に D_0 は因子であるとする。すなわち D_0 の中心元は単位元のスカラー倍に限ると仮定する。第一章の事情が一般の $\mathcal{S}$ について、どの様になっているかを見る為に、最初に $M(\mathcal{S}) = L^\infty(T) \otimes D_0$ としてみよう。これは、任意の $W = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \oplus W_n$ が $W_n = W_m$ ($\forall n, m$) となっていることと同値である。この時、$M(\mathcal{S})' = L^\infty(T) \otimes D_0' = L^\infty(T, D_0')$ となっている。従って $M(\mathcal{S})'$ の射影子は D_0' の射影子に値をとる有界な可測関数である。第一章では、$\dim P_R(z)H$ を考えたが、この章では D_0' 上の trace τ が射影子の次元の役割を果す。$R(\tau) = \{\tau(P) \mid P$ は D_0' の射影子$\}$ とする。D_0' 上に $R(\tau) = \{0, 1, \cdots, n\}$, $R(\tau) = \{0, 1, \cdots, n, \cdots\}$, $R(\tau) = [0, 1]$, $R(\tau) = [0, \infty)$, $R(\tau) = \{0, \infty\}$ となる様な trace τ が存在するとき、D_0' はそれぞれ I_n, I_∞, II_1, II_∞, III 型といわれる。可約な部分空間 R に対し

て、対応する射影子 P_R は $L^\infty(T, D_0')$ の元であるから、

$$\alpha(R) = \text{ess.} \inf \{ \tau(P_R(z)) \mid z \in T \}$$

が定義でき、この $\alpha(R) \in [0, \infty)$ の値によって R が特徴付けられる。

定理4. R を $\mathcal{S}$ の可約な部分空間とする。このとき、R は次の様に分解される。

$$R = R_r \oplus R(m_p),$$

R_r は純単純不変部分空間を含まない可約な部分空間で、$\alpha(R_r) = 0$ となる。m_p は純単純不変部分空間で、$\tau(P_{R(m_p)}(z)) = \alpha(R)$ $(a.e.\ z \in T)$ である。

定理4は本質的には第一章の事実と変らないが、D_0' が II 型の場合、τ の値が連続的に存在するということにより、$P_R(z) \neq 0$ $(a.e.\ z \in T)$ であっても $\alpha(R) \neq 0$ とは限らない。この事は $\mathcal{S} = \{S \otimes 1\}$, D_0' が I 型あるいは III 型の場合、可約な部分空間が純単純不変部分空間を含む事と、$P_R(z) \neq 0$ $(a.e.\ z \in T)$ が同値であるという事と少々事情を異にしている。III 型の場合 $\tau(P_R(z)) \in \{0, \infty\}$ という事で、$\dim P_R(z)H \in \{0, 1\}$ となる重複度 1, $\mathcal{S} = \{S\}$ の場合と可約空間の構造定理に関する限り、全く同じ様相となっている。

定理4は、$M(\mathcal{S}) = D_0 \underset{\alpha}{\times} \mathbb{Z}$ を考えれば $\alpha = \mathrm{identity}$ の場合に相当する。 $\alpha \neq \mathrm{identity}$ の場合は可約な部分空間はいかなる形になるのであろうか。$\alpha \neq \mathrm{identity}$ である典型的な場合を考えてみよう。$[\alpha(x) = uxu^* \ (x \in D_0') \Rightarrow x = \lambda 1]$ とする。このとき、α は D_0' 上で ergodic に作用していると言われる。この様な現象は、D_0' が I 型の時にはおこらない事が知られており、D_0' は II 型と III 型に限るのである。しかもこの場合、$M(\mathcal{S})$ は因子 ($M(\mathcal{S}) \cap M(\mathcal{S})' = \mathbb{C}1$) となってしまい、D_0' が II_1, II_∞, III 型のとき、$M(\mathcal{S})$ はそれぞれ II_1、II_∞ 又は III, III 型となることがわかっている。いずれの場合でも、次の定理が成り立つ。

定理5 [6; Theorem 2.10, 11, 12]. α が D_0' 上で ergodic に作用しているとする。このとき、$\mathcal{S}$ の可約な部分空間は全て純単純不変部分空間を含む。

定理5は $\dim H = 1$, $\mathcal{S} = \{S\}$ の場合の「自明でない可約な部分空間は純単純不変部分空間を含まない」という事実と対極をなす。 α が ergodic でない場合はいろいろな場合に分けられる。以下それぞれの場合について考えてみよう。

定理6 [6; Theorem 2.5, 13]

(1) D_0'が I 型。この時、$\alpha(x)=uxu^*$ ($x\in D_0'$) となる $u\in D_0'$ が存在し、$M(\mathcal{S})$ は $L^\infty(T)\otimes D_0'$ と同型になる。従って $\mathcal{S}$ の可約部分空間の構造は定理4と同じ形になる。

(2) D_0'が II 型。この場合も定理4と同様に $\mathcal{R}=\mathcal{R}_r\oplus\mathcal{R}(m_p)$ と分解される。

(3) D_0'が III 型。この場合は、可約な部分空間 $\mathcal{R}$ は純単純不変部分空間を含まないか、$\mathcal{R}=\mathcal{R}(m_p)$ となる純単純不変部分空間が存在するかのどちらかである。

定理6の証明においては、$M(\mathcal{S})$ が因子にならないという事から、$M(\mathcal{S})$ から中心 $Z=M(\mathcal{S})\cap M(\mathcal{S})'$ への一般化された trace $\hat{\tau}$ を用いた。もう少し正確に言うと、Z が $L^\infty(T)$ と同型になり、$\hat{\tau}$ は $M(\mathcal{S})$ から $\widehat{L^\infty(T)}=\{f \mid f$ は T 上の必ずしも本質的に有限でない可測関数$\}$ への写像となり、$\dim\tau(P_{\mathcal{R}}(\mathcal{S}))$ に代る関数として $\widehat{L^\infty(T)}$ の関数 $\hat{\tau}(P_{\mathcal{R}})$ を計算するのである。作用素環論の一般論を多用するので、ここでは詳しい証明については述べない。

この講演においては Beurling 型となる不変部分空間の構造、特に可約部分空間の分解という問題に限って議論してきたが、今後の問題、特に Beurling 型でない不変部分空間の構造解析

は大変興味ある問題である。現在 McAsey [9, 10], McAsey - Muhly - Saito [12], Solel [13], Kawamura - Tomimori [7] 等によって盛んに研究が続けられている事を記して、この講演を終ることにする。

References

[1] A. Beurling, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Math., 81(1949), 239-255.

[2] P.R. Halmos, Shifts on Hilbert spaces, J. Reine Angew.Math., 208(1961), 102-112.

[3] H. Helson, Lectures on Invariant Subspaces, Academic Press, London Press, London-New York, 1964.

[4] S. Kawamura, Invariant subspaces of shift operators of arbitrary multiplicity, J. Math. Soc. Japan 34(1982) 399-354, 数理研·講究録 398(1980), 98-110, 399(1980), 38-52, 488(1983), 105-127.

[5] ——————, Invariant subspaces for shift operators of multiplicity one, Tôhoku Math. J. 34(1982), 15-21.

[6] ——————, A decomposition of reducing subspaces for shift operators, Tôhoku Math. J. 35(1983), 425-440.

[7] S. Kawamura and N. Tomimori, Some families of shift operators and invariant subspaces, Bull. Yamagata Univ.(Natural Science) 11(1984), 17-31.

[8] S. Kawamura and H. Takemoto, C*-algebras associated with shift dynamical systems, J. Math. Soc. Japan 36(1984), 279-293.

[9] M. McAsey, Invariant subspaces of non-self-adjoint crossed products, Pacific J. Math. 96(1981), 457-473.

[10] M. McAsey, Canonical Models for invariant subspaces, Pacific J. Math., 91(1980), 337-395.

[11] M. McAsey, P.S. Muhly and K-S. Saito, Non-self-adjoint crossed products (Invariant subspaces and maximality), Trans. Amer. Math. Soc. 248(1978), 381-409.

[12] ———, Equivalence classes of invariant subspaces in nonselfadjoint crossed product, preprint.

[13] B. Solel, The multiplicity functions of invariant subspaces for nonself-adjoint crossed products, to appear in Pacific J. Math.

[14] M. Takesaki, 作用素環の構造、岩波書店 (1983).