数理解析研究所講究録
523巻 1984年 153-168

finely harmonic morphism の除去可能性定理について

京大 理　　正岡弘照
(Hiroteru Masaoka)

古典的結果として解析関数の除去可能性定理としては, T. Radóの定理等が知られている. B. Øksendal [14] は確率論的手法を用いて, ある意味において解析関数の拡張である $\mathbb{C}$ の細領域(fine domain)上の finely harmonic morphism に対して同様の結果を得た. 彼は確率論の大道具を用いて, 3節の定理3.1.′の $n=2$ の場合を導き, その応用として上の結果を得た. ここでは, 定理3.1.′の言い換えである定理3. 1. の基本的な証明を与え, その応用として $\mathbb{R}^n(n\geq 2)$ の細領域上の finely harmonic morphism に対して T. Radó の定理と同様の結果を導く.

1. $\mathbb{R}^n(n\geq 2)$ に $n=2$ のときは少々異なるが, $n\geq 3$ のときはすべての正値優調和関数を連続にする最弱な位相である細位相(fine topology)を導入し, 通常の位相と区別するため,

この位相によるコンパクト性，連結性等には“細（fine）”という語を前につけることとする．細位相に関しては Brelot [2] を見られたい．以下で，本講で必要な細調和関数（finely harmonic function）に関する諸結果を述べる．

定義 1.1.（Fuglede [6]） 細開集合 U 上の実関数 u が次の条件を満たすとき u は U 上細調和であるという；

(i) u は U 上有限である．

(ii) u は U で細連続（finely continuous）である．すなわち，任意の開集合 $V(\subset \mathbb{R})$ に対し，$u^{-1}(V)$ は U の細開部分集合である．

(iii) 集合族 $\mathcal{U}$ が次の条件を満たすとする．

(イ) $V\in\mathcal{U}$ ならば，$V(\subset U)$ は細開集合である．

(ロ) $V\in\mathcal{U}$ ならば，$\widehat{V}\subset U$．但し，$\widehat{V}$ は V の細閉包（fine closure）である．

(ハ) $V\in\mathcal{U}$，$x\in V$ ならば，u は $\varepsilon_x^{V^c}$ − 可積分であり，

$$u(x)=\int u\, d\varepsilon_x^{V^c}$$

が成り立つ．但し，$\varepsilon_x^{V^c}$ は V と x に関する調和測度，すなわち，Dirac測度 ε_x の V^c への掃散測度である．

このとき，$\mathcal{U}$ は U の相対細位相を生成する基である．

定理 1.1. (Fuglede [6]) h を細開集合 U $(\subset \mathbb{R}^n)$ 上の実関数とする．このとき，次は同値である．

(i) h は U で細調和である．

(ii) 任意の $x \in U$ に対し，ある x のコンパクト細近傍 V_x とある V_x の近傍で調和な関数列 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して，

$$n \to \infty \text{ のとき } \quad h_n \to h \mid V_x \quad (\text{一様})$$

となる．

命題 1.1. (Debiard and Gaveau [4]) K $(\subset \mathbb{R}^n)$ をコンパクト集合とし，h を K 上の実連続関数，$\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ を K の近傍で調和な関数列とする．このとき，

$$n \to \infty \text{ のとき } \quad K' \text{上} \quad h_n \to h \quad (\text{一様})$$

であれば，任意の $x \in K'$ に対し，ある x の細近傍 V_x が存在して

$$n \to \infty \text{ のとき } \quad \nabla h_n \to \nabla h \quad \text{in } L^2(V_x, m)$$

となる．但し，K' は K の細開核 (fine interior) であり，m は $\mathbb{R}^n$ の Lebesgue 測度である．また，∇h は ∇h_n の L^2 ー極限として定義される．

定義 1.2. (Fuglede [7]) 細領域（細連結な細開集合）U から $\mathbb{R}^n$ への写像 φ が細連続であるとする．すなわち，任意の細開

集合$V(\subset \mathbb{R}^n)$のφの逆像がUの細開部分集合になる．このとき，φが次の条件を満たすならば，φはU上の finely harmonic morphism（以下，f. h. m. と略記する）であるという；

hが細開集合$W(\subset \mathbb{R}^n)$で細調和であれば，$h\circ\varphi$は$\varphi^{-1}(W)$で細調和である．

ここで，写像の細連続性と関数の細連続性は異なることに注意する．

2．$\{B_t, \Omega, \mathcal{F}, P_x\}$を$n$次元Brown運動とする．Brown運動については渡辺[16]を参照されたい．以下で調和関数と極集合の確率論的特徴付けを述べる．

補題 2.1．　Uを細領域，$\varepsilon_x^{U^c}$をUと$x\in U$に関する調和測度とする．τ_{U^c}をU^cへの到達時間(hitting time)，すなわち，

$$\tau_{U^c} \equiv \inf\{t>0\ ;\ B_t\in U^c\}$$

とする．このとき，

$$d\varepsilon_x^{U^c}(\xi) = P_x(B_{\tau_{U^c}}\in d\xi).$$

略証　Uが領域であれば補題の主張が成立することはよく知られている．たとえば，Port and Stone [13]を見られたい．調和測度の定義，Constantinescu und Cornea [3] P.35. 定理 4.2.，及び Blumentahl and Getoor [1] P.58. 定理(10.19)よりU^cを単調増大コンパ

クト集合列で近似することによって，所求の結果を得る．

(略証終)

Port and Stone [13] 6章によれば，次の補題が成り立つ．

補題 2.2. $D\ (\subset \mathbb{R}^n)$ を Green 関数が存在する領域，$A\ (\subset D)$ を Borel 集合とする．このとき，次は同値である．

(i) A は極集合である．

(ii) $P_x(\tau_A < \tau_{D^c}) = 0$ ，$\forall x \in D$ ．

補題 2.2. と Blumentahl and Getoor [1] P.58 定理 (10.19) により，次の補題が成り立つ．

補題 2.3. $U\ (\subset \mathbb{R}^n)$ を細領域，$A\ (\subset U)$ を Borel 集合とする．このとき，

$$P_x(\tau_A < \tau_{U^c}) = 0 \quad , \quad \forall x \in U .$$

ならば，A は極集合である．

3. この節では，f.h.m. の確率論的特徴付けを与える．その為，確率論の道具を以下で掲げる．$\{B_t, \Omega, \mathcal{F}, P_x\}$ を n 次元 Brown 運動とする．以下，$n \geq 2$ とする．

定義 3.1. φ を細開集合 $U\ (\subset \mathbb{R}^n)$ から $\mathbb{R}^n$ への細連続写像

とする．このとき，次の条件を満たす $[0,\infty)\times\Omega$ から $[0,\infty)$ への可測関数 $\sigma_t(\omega)$ が存在するならば，φ は Brown 運動の path を保存するという（以下，φ は BPP であると略記する）；

(i) P_x-a.e. の ω に対して関数 $t\mapsto\sigma_t(\omega)$ は連続かつ単調増加であり，$\sigma_0(\omega)=0$．

(ii) 任意の $t\in[0,\infty)$ に対して関数 $\omega\mapsto\sigma_t(\omega)$ は $\mathcal{F}_t$ に関し可測である．

(iii) $\sigma_t<\infty$ である P_x-a.e. の ω に対し，

$$\varphi^*(\omega)\equiv\lim_{s\uparrow\tau_{U^c}}\varphi(B_s(\omega))$$

が存在する．

(iv) $\{\hat{B}_t,\hat{\Omega},\hat{\mathcal{F}},\hat{P}_y\}$ を $\mathbb{R}^n$ の Brown 運動とする．任意の $t(\geq 0)$ と任意の $(\omega,\hat{\omega})\in\Omega\times\hat{\Omega}$ に対し，

$$A_t(\omega,\hat{\omega})\equiv\begin{cases}\varphi(B_{\sigma_t^{-1}}(\omega)) & ,\ t<\sigma_{\tau_{U^c}}\\ \varphi^*(\omega)+\hat{B}_{t-\sigma_{\tau_{U^c}}}(\hat{\omega}), & t\geq\sigma_{\tau_{U^c}}\end{cases}$$

とおく．このとき，

$\{A_t,\Omega\times\hat{\Omega},\mathcal{F}\times\hat{\mathcal{F}},P_x\times\hat{P}_0\}$ は $\mathbb{R}^n$ の Brown 運動と一致する．

但し，$x\in U$ とする．

<u>定義 3. 2.</u> 実確率過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ が局所マルチンゲール（local martingale）であるとは，次の条件を満たす停止時間（stopping time）列 $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである．

(i) $n\to\infty$ のとき $\sigma_n\uparrow\infty$, P_x − a.e.

(ii) 各 n に対し, $\{X_{t\wedge\sigma_n}\}_{t\geq 0}$ はマルチンゲールである.

次の命題は f.h.m. の特徴付けにおいて重要な役割を演じる.

命題 3.1. $\{X_t\}_{t\geq 0}$, $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ をそれぞれ, 実連続局所マルチンゲールとする. このとき, 次の性質を満足する唯一つの実連続確率過程 $\{\langle X,Y\rangle_t\}_{t\geq 0}$ が存在する.

(i) $\langle X,Y\rangle = A_1 - A_2$. ここで, A_1, A_2 はそれぞれ, P_x − a.e. の ω に対し, t に関して連続かつ非減少で, $A_1(0)=A_2(0)=0$ である.

(ii) $\{X_t\cdot Y_t - \langle X,Y\rangle_t\}_{t\geq 0}$ は実連続局所マルチンゲールである.

証明は Meyer [10] を見られたい.

f.h.m. は次のような確率過程によって, 特徴付けられる.

定義 3.3. $\{Z_t = Z_0 + X_t\}_{t\geq 0}$ を $\mathbb{R}^n$ 値確率過程とし, $Z_t=(Z_t^i)_{1\leq i\leq n}$ とおくとき, 各 i に対し, $\{Z_t^i\}_{t\geq 0}$ は連続局所マルチンゲールであるとする. このとき,

$$\langle X_t^i, X_t^j\rangle (\equiv \langle X^i, X^j\rangle_t) = \delta_{ij}\langle X_t^i\rangle (\equiv \delta_{ij}\langle X^i, X^i\rangle_t)$$

ならば, $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ は diagonal martingale であるという. (以下, d.m. と略記する) 但し, δ_{ij} は Kronecker の記号である.

d.m. が確率積分で表現されるときは，次のように言い換えられる．

補題 3.1.

(i) 二つの実確率過程

$$\{ X_t = X_0 + \int_0^t \alpha(s,\omega)\, dB_s \}_{t\ge 0}$$

$$\{ Y_t = Y_0 + \int_0^t \beta(s,\omega)\, dB_s \}_{t\ge 0}$$

に対して，

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \alpha(s,\omega)\, \beta(s,\omega)\, dB_s .$$

(ii) 実確率過程 $\{ X_t^i = X_0^i + \int_0^t \alpha^i(s,\omega)\, dB_s \}_{t\ge 0}$ ，$1 \le i \le n$ が与えられている．このとき，次は同値である．

(イ) $\{ X_t = (X_t^i)_{1\le i\le n} \}_{t\ge 0}$ は d.m. である．

(ロ) $\alpha^i(s,\omega)\cdot\alpha^j(s,\omega) = \delta_{ij}\, |\alpha^i(s,\omega)|^2 \qquad ds\times P_x - a.e.\ (s,\omega)$.

(i) の証明は渡辺[16] P33 の例 3.1. を見られたい．(ii) は (i) より従う．

この節の主要定理を述べよう．

定理 3.1. 細領域 $U\,(\subset \mathbb{R}^n)$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 φ が細連続であるとする．このとき，次は同値である．

(i) 任意の $x\,(\in U)$ に対して，ある x の細近傍 V_x が存在して，$\{ \varphi(B_{t\wedge\tau_{V_x^c}}) \}_{t\ge 0}$ は d.m. である．

(ii) 任意の $x\,(\in U)$ に対して，ある x の細近傍 V_x が存在して，

すべての細開集合 $V\ (\subset V_x)$ に対して，$\varphi|V$ は BPP である．

(iii) φ は U 上の f. h. m. である．

証明　(i) ⇒ (ii)　渡辺 [16] P.60 定理 5.3.(B) より従う．

(ii) ⇒ (iii)　u が細開集合 $W\ (\subset \mathbb{R}^n)$ で細調和であるとする．明らかに，$u\circ\varphi$ は $\varphi^{-1}(W)$ 上，有限で細連続である．従って，定義 1.1. の (iii) を調べればよい．$x \in \varphi^{-1}(W)$，$y \equiv \varphi(x)$ とする．定理 1.1. により，ある y のコンパクト細近傍 V_y とある V_y の近傍で調和な関数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して，

$$n \to \infty \text{ のとき } V_y \text{ 上，} \quad u_n \to u \quad (\text{一様})$$

となる．

φ の細連続性から，ある x の細近傍 U_x が存在して，次の条件を満たす．

(イ)　$\tilde{U}_x \subset U$

(ロ)　$\varphi(U_x) \subset V_y$

(ハ)　$u\circ\varphi$ は U_x 上有界である．

(ii) より，$\{(u_n\circ\varphi)(B_{\sigma_{t\wedge\tau}})\}_{t\geq 0}$ はマルチンゲールである．ここで，$\sigma_s(\omega)$ は定義 3.1. における関数であり，$\tau \equiv \tau_{U_x^c}$ である．

よって，$\{(u\circ\varphi)(B_{\sigma_{t\wedge\tau}})\}_{t\geq 0}$ はマルチンゲールである．

有界収束定理と補題 2.1. により，任意の $z \in U_x$ に対し，

$$\begin{aligned}(u\circ\varphi)(z) &= \lim_{t\to\infty} E_z\left((u\circ\varphi)(B_{\sigma_{t\wedge\tau}})\right)\\ &= E_z\left((u\circ\varphi)(B_{\sigma_\tau})\right)\end{aligned}$$

$$= \int (u \circ \varphi)(\zeta)\, d\varepsilon_z^{V_x^c}(\zeta).$$

このことは，$u \circ \varphi$ が $\varphi^{-1}(W)$ で細調和であることを意味する．ゆえに，φ は U 上の f.h.m. である．

(iii) ⇒ (i)　$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への恒等写像 I の座標関数は調和関数である．よって，定理1.1.と命題1.1.により，任意の $x\ (\in U)$ に対し，ある細近傍 V_x が存在して，各 i に対し，$\{\varphi_i(B_{t\wedge\tau})\}_{t\geq 0}$ は連続なマルチンゲールであり，

$$(*)\qquad \varphi_i(B_{t\wedge\tau}) = \varphi_i(z) + \int_0^{t\wedge\tau} \nabla\varphi_i(B_s)\, dB_s$$

となる．ここで，$\tau \equiv \tau_{V_x^c}$ である．

$i \neq j$ ならば，$x_i x_j$，$x_i^2 - x_j^2$ はそれぞれ，$\mathbb{R}^n$ 上の調和関数である．よって，(iii)の仮定と定理1.1.により，ある x の細近傍 $V_x'\ (\subset V_x)$ が存在して，$i \neq j$ ならば，$\varphi_i(B_{t\wedge\tau'}) \cdot \varphi_j(B_{t\wedge\tau'})$，$\varphi_i^2(B_{t\wedge\tau'}) - \varphi_j^2(B_{t\wedge\tau'})$ は連続なマルチンゲールである．ここで，$\tau' \equiv \tau_{V_x'^c}$ である．マルチンゲールの一般論より，(*)において，τ を τ' におき換えても(*)は成り立つ．従って，命題3.1.により，

$$\langle \varphi_i(B_{t\wedge\tau'}), \varphi_j(B_{t\wedge\tau'}) \rangle = \delta_{ij} \langle \varphi_i(B_{t\wedge\tau'}) \rangle$$

となる．ゆえに，$\{\varphi(B_{t\wedge\tau'})\}_{t\geq 0}$ は d.m. である．　　　　(証明終)

定理3.1.を B. Φksendal [14] が $n = 2$ のとき証明した形に直すと次のようになる．

定理 3.1.′　細領域 $U(\subset \mathbb{R}^n)$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 φ が細連続であるとする．このとき，次は同値である．

(i)′　$\{\varphi(B_{t\wedge\tau_{U^c}})\}_{t\geq 0}$ は d.m. である．

(ii)′　φ は BPP である．

(iii)　φ は U 上の f.h.m. である．

略証　(i)′ ⇒ (ii)′, (ii)′ ⇒ (iii) はそれぞれ，定理 3.1. において，(i) ⇒ (ii)，(ii) ⇒ (iii) を示したと同様の方法で証明される．定理 3.1. より，(iii) ⇔ (i) であるから，(i) ⇒ (i)′ を示せばよい．$\mathbb{R}^n$ に単調増大する同心球列を一つとる．Doob [5] の quasi-Lindelöf の原理と (i) の仮定により，各球に対し，W を球と $\varphi(U)$ との共通部分とすると，$\{\varphi(B_{t\wedge\tau_{W^c}})\}_{t\geq 0}$ は d.m. である．

4.　この節では，定理 3.1. の応用を述べる．B. Øksendal [14] の議論が $n\geq 2$ においても平行に成り立つ．

次の定理は Weyl の補題に相当するものである．

定理 4.1.　φ を細領域 $U(\subset \mathbb{R}^n)$ から $\mathbb{R}^n$ への写像とする．φ の座標関数は U で，細調和であるとする．このとき，Lebesgue 測度 0 の相対細閉集合 $F(\subset U)$ に対し，φ が $U\setminus F$ 上の f.h.m. であれば，φ は U 上の f.h.m. に拡張される．

証明　定理 1.1. と命題 1.1. 及び確率積分の定義により，任意の $x(\in U)$ に対し，ある x の細近傍 V_x が存在して，

$$\varphi(B_{t\wedge\tau}) = \varphi(x) + \int_0^{t\wedge\tau} \nabla\varphi(B_s)\,dB_s$$

となる．但し，$\tau \equiv \tau_{V_x^c}$ である．

仮定により，φ は $U\setminus F$ 上の f. h. m. であり，補題 3. 1. の (ii) により，任意の $x(\in U\setminus F)$ に対し，ある x の細近傍 $W_x(\subset U\setminus F)$ が存在して，

$$\nabla\varphi_i(B_s)\cdot\nabla\varphi_j(B_s) = \delta_{ij}\,\nabla\varphi_i(B_s)^2, \quad ds\times P_x-\text{a.e. on } [0,\tau')\times\Omega$$

とできる．但し，$\tau' \equiv \tau_{W_x^c}$ である．

$$\therefore\quad \nabla\varphi_i(z)\cdot\nabla\varphi_j(z) = \delta_{ij}\,\nabla\varphi_i(z)^2, \quad m-\text{a.e. on } W_x .$$

ここで，m は Lebesgue 測度である．

quasi-Lindelöf 原理により，

$$\nabla\varphi_i(z)\cdot\nabla\varphi_j(z) = \delta_{ij}\,\nabla\varphi_i(z)^2, \quad m-\text{a.e. on } U\setminus F.$$

$m(F) = 0$ であるから，

$$\nabla\varphi_i(z)\cdot\nabla\varphi_j(z) = \delta_{ij}\,\nabla\varphi_i(z)^2, \quad m-\text{a.e. on } U.$$

よって，任意の $x(\in U)$ に対し，ある x の細近傍 V_x が存在して，

$$\nabla\varphi_i(B_s)\cdot\nabla\varphi_j(B_s) = \delta_{ij}\,\nabla\varphi_i(B_s)^2, \quad ds\times P_x-\text{a.e. on } [0,\tau)\times\Omega$$

とできる．

ゆえに，補題 3. 1. の (ii) と定理 3. 1. により，φ は U 上の f. h. m. に拡張される．　　（証明終）

次に，R. Nevanlinna [11] P. 205 4.2. の定理に相当する結果を与えよう．

定義 4.1. 細領域 $U (\subset \mathbb{R}^n)$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 φ は細連続であるとする．$E (\subset \tilde{U})$ を Borel 集合とする．このとき，ある点 z $(\in E)$ に終わるある曲線 γ $(\subset U \setminus E)$ が存在して，γ にそって $x \to z$ のとき，φ が極限値 y $(\in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\})$ を持つならば，y は φ の E における漸近値 (asymptotic value) であるという．φ の E における漸近値の全体の集合を φ の E における漸近値集合 (asymptotic set) といい，$A_\varphi(E)$ と記す．ここで，Nguyen - Xuan - Loc and T. Watanabe [12] により，U は path - connected であることを注意しておく．

定理 4.2. 細領域 $U (\subset \mathbb{R}^n)$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 φ は f. h. m. とする．Borel 集合 E $(\subset \tilde{U})$ に対し，$A \equiv A_\varphi(E)$ とおく．このとき，$W \equiv (\varphi(U) \setminus A)' \neq \emptyset$ かつ A の W に関する調和測度が 0 であるならば，E の $U \setminus E$ に関する調和測度は 0 である．

略証. B. Øksendal [15] を見られたい．x $(\in U \setminus E)$ を固定しておく．$y \equiv \varphi(x)$ とおく．定理 3.1.′ により，

$$P_x(B_{\tau_{(U\setminus E)^c}} \in E) = P_y(\varphi(B_{\sigma^{-1}_{\tau_{(U\setminus E)^c}}}) \in A)$$

$$= P_y(B_{\tau_{W^c}} \in A).$$

定理の仮定と補題 2.1. により，所求の結果を得る．

（略証終）

最後に，T. Radó の定理（Gamelin [9] P.40）に相当する結果を与える．

定理4.3. $\mathcal{U}$ ($\subset \mathbb{R}^n$) を細領域，K ($\subset \mathcal{U}$) を相対細閉集合，$\mathcal{U}\setminus K$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 φ を有界 f.h.m. とする．$A \equiv A_\varphi(K)$ とおく．このとき，$G \equiv (\varphi(\mathcal{U}\setminus K)\setminus A)' \neq \phi$ かつ，A の G に関する調和測度が0であれば，φ は $\mathcal{U}$ 上の f.h.m. に拡張される．

証明　$\mathcal{W}$ を $(\varphi(\mathcal{W})\setminus A)' \neq \phi$ を満たす $\mathcal{U}\setminus K$ の成分とする．定理4.2. によって，K の $\mathcal{W}$ に関する調和測度は0である．補題2.1. より，$z \in \mathcal{W}$ に対して，

$$P_z(B_{\tau_{\mathcal{W}^c}} \in K) = 0.$$

$$\therefore \quad P_z(\tau_K < \tau_{\mathcal{U}^c}) = 0.$$

よって，補題2.3. により，K は極集合である．

従って，Fuglede [8] 定理9.15. により，φ の座標関数は $\mathcal{U}$ 上の細調和関数に拡張される．

ゆえに，定理4.1. により，φ は $\mathcal{U}$ 上の f.h.m. に拡張される．

（証明終）

参 照 文 献

[1] R.M. Blumenthal and R.K. Getoor, Markov Processes and Potential Theory, Academic Press, 1968.

[2] M. Brelot, On Topologies and Boundaries in Potential Theory, Lecture Note in Math. 175, Springer, 1971.

[3] C. Constantinescu und A. Cornea, Ideale Ränder Riemannscher Flächen, Springer, 1963.

[4] A. Debiard and B. Gaveau, Differentiabilité des fonctions finement harmonique, Invent. Math. 29 (1975), 111–123.

[5] J.L. Doob, Applications to analysis of a topological definition of smallness of a set, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 579–600.

[6] B. Fuglede, Fonctions harmonique et fonctions finement harmoniques, Ann. Inst. Fourier 24, 4 (1974), 77–91.

[7] __________, Finely harmonic mappings and finely holomorphic functions, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI 2 (1976), 113–127

[8] __________, Finely Harmonic Functions, Lecture Note in Math. 289, Springer, 1969.

[9] T. W. Gamelin, Uniform Algebras, Printice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961.

[10] P. A. Meyer, Integrales stochastiques I, II. Séminaire de Probabilités I. Lecture Notes in Math. 39, Springer, 1967.

[11] R. Nevanlinna, Analytic Functions, Springer, 1970.

[12] Nguyen-Xuan-Loc and T. Watanabe, Characterization of fine domains for a certin class of Markov processes, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 21 (1972), 167-178.

[13] S.C. Port and C.J. Stone, Brownian Motion and Classical Potential Theory, Academic Press Probability and Mathematical Statistics, 1978.

[14] B. Øksendal, *Finely harmonic morphisms, Brownian path preserving functions and conformal martingales, Invet. Math. 75 (1984), 179-187.*

[15] __________, *A stochastic proof of an extension of a theorem of Radó, Proc. Edinburgh Math. Soc. 26 (1983), 333-336.*

[16] 渡辺信三, 確率微分方程式 産業図書 数理解析とその周辺 9, 1975