数理解析研究所講究録
523巻 1984年 108-121

Fejér-Riesz の不等式

東北大学教養部　望月　望 (Nozomu Mochizuki)

1. 序

標題の不等式は [2] において $H^p(|z|<1)$ の関数について示されたが，[4] で上半面 $\mathbb{R}^2_+$ の場合にも成立することが証明された．即ち，$f\in H^p(\mathbb{R}^2_+)$ とするとき，任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$(1)\qquad \int_{\mathbb{R}_+}|f(x+iy)|^p dy \leq 2^{-1}\sup_{y>0}\int_{\mathbb{R}}|f(x+iy)|^p dx$$

が成立するのである．この不等式は，右辺の有限性から左辺の積分の存在が言えること，詰り $|f|$ の増大度について何事かを示している訳である（[8, p. 350]）．[4] では $1\leq p<\infty$ の場合に議論しているが，[6] の方法によって $0<p<\infty$ に対して成立することが示される．

さて，$H^p(\mathbb{R}^2_+)$ の高次元へのひとつの拡張は，第2種 Siegel 領域 D 上の Hardy space $H^p(D)$ である ([5])．

ここでは，(1) に相当する不等式を，或る種の Siegel 領域上の多重劣調和関数の族について考えてみたい．尚，有界な領域の場合については [3]，[7] を，有界でない場合についての他の方向の考察については [8] を参照して下さい．

2. 結果．

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を，原点から発する n 本の1次独立な半直線の convex hull の内部とする．$\Phi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ を，Ω-hermitian form として Ω と Φ によって定義される $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ の Siegel domain D を考える．即ち，

$$D = D(\Omega, \Phi) = \{(Z, W) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \mid \mathrm{Im}\, Z - \Phi(W, W) \in \Omega\}$$

とする．ここに，$Z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ 等とする．$\mathbb{R}^n$ 及び $\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{C}^m$ 上の Lebesgue 測度を dX, dW と表す．次に，D 上の実関数 u：

$$u \geqq 0,\ \log u \text{ は plurisubharmonic},$$

$$M(u, p) := \sup_{Y \in \Omega} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^m} u(X + iY + i\Phi(W, W), W)\, dX\, dW < \infty,$$

の全体の集合を $LH^p(D)$ と表す $(0<p<\infty)$. この記号を使えば, f が D 上正則で $M(|f|,p)<\infty$ のとき $f\in H^p(D)$ である. $f_j\in H^p(D)$, $j=1,\cdots,\ell$, のとき $\sum_{j=1}^{\ell}|f_j|\in LH^p(D)$ である. さて, (1) は次の如く拡張される:

定理. $D=D(\Omega,\Phi)\subset\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m$, $u\in LH^p(D)$, $0<p<\infty$, とする. このとき, 任意の $X\in\mathbb{R}^n$ に対して,

$$\int_{\Omega\times\mathbb{C}^m} u(X+iY+i\Phi(W,W),W)^p\,dY\,dW\leqq 2^{-n}M(u,p).$$

3. 証明

古典的な方法([1], [2])を, 有界でない場合に適用出来る様に改良して $\mathbb{R}^2_+$ の場合に議論をし, ついで Ω 上の tube domain $T\Omega$ 上の議論をし, 更に第1象限上の Siegel 領域の場合に話を進めて, 最終的な結論を得る. まず, 次が基本的である([10]).

補題0. u は $\mathbb{R}^2_+$ で subharmonic, $u\geqq 0$, ある $p\geqq 1$ に対して次をみたすとする(この u 全体を, $LH^p(\mathbb{R}^2_+)$ と表す):

$$\sup_{y>0}\int_{\mathbb{R}} u(x+iy)^p\,dx < \infty.$$

このとき，任意の $\rho>0$ に対して，$x^2+y^2\to\infty$, $y\geq\rho$, ならば $u(x+iy)\to 0$ である．

補題 1. $\mathbb{R}^2_+$ 上の正則関数 $f(x+iy)$ に対して次が成立する: $0<r<R$, $0<T$ に対し，

2) $$2\cdot\int_r^R |f(iy)|^2\,dy \leq \int_{-T}^{T}|f(x+ir)|^2\,dx+\int_{-T}^{T}|f(x+iR)|^2\,dx$$
$$+\int_r^R|f(-T+iy)|^2\,dy+\int_r^R|f(T+iy)|^2\,dy.$$

証明. $-T+ir$, ir, iR, $-T+iR$; ir, $T+ir$, $T+iR$, iR をそれぞれ頂点とする二個の長方形に於いて，$f(z)^2$ に Cauchy 積分定理を使って次をうる:

$$2\left|\int_r^R f(iy)^2\,dy\right| \leq \int_{-T}^{T}|f(x+ir)|^2\,dx+\int_{-T}^{T}|f(x+iR)|^2\,dx$$
$$+\int_r^R|f(-T+iy)|^2\,dy+\int_r^R|f(T+iy)|^2\,dy.$$

$f(z)$ が虚軸上実数値をとる場合，これは(2)そのものである．一般の場合には，$g(z)=2^{-1}(f(z)+\overline{f(-\bar{z})})$，$h(z)=(2i)^{-1}(f(z)-\overline{f(-\bar{z})})$，$z\in\mathbb{R}^2_+$，とおくと各々について(2)が成立すること，及び $|f(iy)|^2=g(iy)^2+h(iy)^2$，$y\in\mathbb{R}$，$|g(z)|^2+|h(z)|^2=2^{-1}(|f(z)|^2+|f(-\bar{z})|^2)$，$z\in\mathbb{R}^2_+$，であることから(2)が得られる．

補題2．$P(x,y)=\pi^{-1}y(x^2+y^2)^{-1}$: Poisson kernel，$\rho>0$，$u_\rho(x+iy)=u(x+i(\rho+y))$ とする．$u\in LH^1(\mathbb{R}^2_+)$ に対して，$u_{\rho,\varepsilon}(x+iy)=(u_\rho(x+iy)+\varepsilon)^{1/2}$，$\varepsilon>0$ とおいて，

$$(3)\qquad h_{\rho,\varepsilon}(x+iy)=\int_{\mathbb{R}}\log u_{\rho,\varepsilon}(t)\,P(x-t,y)\,dt,\quad x+iy\in\mathbb{R}^2_+,$$

とおくと，これは $\mathbb{R}^2_+$ 上，$\log u_{\rho,\varepsilon}$ の harmonic majorant である．

証明．上半連続関数は，連続関数の減少列によって近似される故，u を連続としておいてよい．補題0から，$\log u_{\rho,\varepsilon}(x+iy)\to 2^{-1}\log\varepsilon$，$x^2+y^2\to 0$，$y\geq 0$．従って，$\log u_{\rho,\varepsilon}(t)$ は $\mathbb{R}$ 上有界で $h_{\rho,\varepsilon}$ が定義され，$\mathbb{R}^2_+$ 上 harmonic である．subharmonic functions に対する最大値の原理を使えば，これが $\log u_{\rho,\varepsilon}\leqq h_{\rho,\varepsilon}$ を

満たすことが分る.

補題 3. $u \in LH^1(\mathbb{R}^2_+)$, $\rho>0$ とする. このとき, 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して次が成立する:

$$\int_{\mathbb{R}_+} u_\rho(x+iy)\,dy \leqq 2^{-1}\int_{\mathbb{R}} u_\rho(x)\,dx.$$

証明. $x=0$ として一般性を失わない. $\varepsilon>0$ とし, (3) によって $h_{\rho,\varepsilon}$ を定義する. 補題2 から, $u_\rho(z)+\varepsilon \leqq \exp(2h_{\rho,\varepsilon}(z)) = |F(z)|^2$; ここに, $F(z)=\exp(h_{\rho,\varepsilon}(z) + i g_{\rho,\varepsilon}(z))$, $z\in\mathbb{R}^2_+$, が正則となる様に $g(z)$ をとっておいた. さて, $0<r<R$, $0<T$ を任意にとって $F(z)$ に (2) を適用すると,

$$
\begin{aligned}
2I(r,R) := 2\int_r^R u_\rho(iy)\,dy &< 2\int_r^R |F(iy)|^2\,dy \\
&\leqq \int_{-T}^{T} |F(x+ir)|^2\,dx + \int_{-T}^{T} |F(x+iR)|^2\,dx \\
&\quad + \int_r^R |F(-T+iy)|^2\,dy + \int_r^R |F(T+iy)|^2\,dy .
\end{aligned}
$$

不等式 $|F(z)|^2 \leqq \left(\int_{\mathbb{R}} u_{\rho,\varepsilon}(t)P(x-t,y)\,dt\right)^2 \leqq \int_{\mathbb{R}} u_{\rho,\varepsilon}(t)^2 P(x-t,y)\,dt$

の各々を利用して，次を得る：

$$2I(r,R) < \int_{-T}^{T} dx \int_{\mathbb{R}} u_{\rho,\varepsilon}(t)^2 P(x-t,r)\,dt + \int_{-T}^{T}\left(\int_{\mathbb{R}} u_{\rho,\varepsilon}(t) P(x-t,R)\,dt\right)^2 dx$$
$$+ \int_{r}^{R} dy \int_{\mathbb{R}} u_{\rho,\varepsilon}(t)^2 P(-T-t,y)\,dt + \int_{r}^{R} dy \int_{\mathbb{R}} u_{\rho,\varepsilon}(t)^2 P(T-t,y)\,dt.$$

$\varepsilon \to 0$ として，

$$2I(r,R) \leqq$$
$$\int_{-T}^{T} dx \int_{\mathbb{R}} u_\rho(t) P(x-t,r)\,dt + \int_{-T}^{T}\left(\int_{\mathbb{R}} u_\rho(t)^{1/2} P(x-t,R)\,dt\right)^2 dx$$
$$+ \int_{r}^{R} dy \int_{\mathbb{R}} u_\rho(t) P(-T-t,y)\,dt + \int_{r}^{R} dy \int_{\mathbb{R}} u_\rho(t) P(T-t,y)\,dt$$
$$=: I_1(r,T) + I_2(R,T) + I_3(r,R,T) + I_4(r,R,T).$$

まず，$I_1(r,T) \leqq \int_{\mathbb{R}} u_\rho(t)\,dt$ は明かである．次に，I_j, $j=3,4$, を評価する．

$$v(\mp T, y) = \int_{\mathbb{R}} u_\rho(t) P(\mp T-t, y)\,dt$$

とおく．補題Dから $|t| \to \infty$ のとき $u_\rho(t) \to 0$ である故，$K>0$ をとり $u_\rho(t) < R^{-2}$, $|t|>K$, としておく．不等式

$y(a^2+y^2)^{-1} < a^{-1}$, $a, y > 0$, を利用すると, 任意の $T > K$ に対して

$$v(\mp T, y) < R^{-2} + \int_{|t| \leq K} u_p(t) P(\mp T - t, y)\, dt$$

$$< R^{-2} + (T-K)^{-1} \int_{\mathbb{R}} u_p(t)\, dt$$

を得, これから次を得る:

$$I_j(r, R, T) < R^{-1} + (T-K)^{-1} R \int_{\mathbb{R}} u_p(t)\, dt, \quad T > K, \quad j = 3, 4.$$

最後に,

$$G(x, y) = \int_{\mathbb{R}} u_p(t)^{1/2} P(x-t, y)\, dt, \qquad x+iy \in \mathbb{R}^2_+,$$

とおく. $u_p^{1/2} \in L^2(\mathbb{R})$ 故, これの Hardy-Littlewood maximal function $v(x)$ 及び constant $C > 0$ があって, $G(x, y) \leq C \cdot v(x)$, $y > 0$, である. ここに $v \in L^2(\mathbb{R})$ で, また $G(x, R)^2 \to 0$, $R \to \infty$, である. さて,

$2 I(r, R) \leq$

$$\int_{\mathbb{R}} u_p(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}} G(x, R)^2 + 2R^{-1} + 2(T-K)^{-1} R \int_{\mathbb{R}} u_p(x)\, dx, \quad T > K,$$

に於いて $T\to\infty$ とし，次いで $R\to\infty, r\to 0$ として，次を得る：

$$2\int_{\mathbb{R}_+} u_\rho(iy)\,dy \leqq \int_{\mathbb{R}} u_\rho(x)\,dx.$$

補題4. $T_\Omega=\{X+iY\in\mathbb{C}^n \mid X\in\mathbb{R}^n, Y\in\Omega\}$; $u\in LH^1(T_\Omega)$, 即ち，T_Ω 上の関数 u, $u\geqq 0$, plurisubharmonic で

$$\sup_{Y\in\Omega}\int_{\mathbb{R}^n} u(X+iY)\,dX<\infty$$

をみたすもの，をとり，$u_\rho(X+iY)=u(X+i\rho+iY)$, $\rho=(\rho_1,\cdots,\rho_n)\in\Omega$，とする．このとき，次が成立する：

$$\int_{\Omega} u_\rho(X+iY)\,dY \leqq 2^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} u_\rho(X)\,dX. \tag{4}$$

証明. Ω にうつる第1象限 $\{Y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n \mid y_1>0,\cdots,y_n>0\}$ 上で考えればよいから（線型写像を考えればよい，[10, p.118] の如く），初めから Ω を第1象限としておく．このとき，tube 領域 T_Ω は $\mathbb{R}_2^+\times\cdots\times\mathbb{R}_2^+$ (n 個) である．$\Omega'=\{Y'=(y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^{n-1} \mid y_2,\cdots,y_n>0\}$ とおけば $T_\Omega=\mathbb{R}_+^2\times T_{\Omega'}$ で，$X+iY\in T_\Omega$ は $(x_1+iy_1, X'+iY')$ と書ける．まず，$z_1\in\mathbb{R}_+^2$ を固定した

とき, $Z' \in T_{\Omega'}$ の関数 $u(z_1, Z')$ は $LH^1(T_{\Omega'})$ に属することを見る. $r>0$ をとり $\Delta = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z_1| \leqq r\} \subset \mathbb{R}^2_+$ とし, $\delta = \operatorname{Im} z_1 - r$ とおく. $Z' = X' + iY' \in T_{\Omega'}$ を固定するとき $u(w, Z')$ は $w = x_1 + iy_1$ の subharmonic function である故,

$$u(z_1, Z') \leqq (\pi r^2)^{-1} \int_\Delta u(x_1 + iy_1, Z')\, dx_1 dy_1$$

$$\leqq (\pi r^2)^{-1} \int_\delta^{2r+\delta} dy_1 \int_{\mathbb{R}} u(x_1 + iy_1, Z')\, dx_1 .$$

よって,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(z_1, Z')\, dX' \leqq (\pi r^2)^{-1} \int_\delta^{2r+\delta} dy_1 \int_{\mathbb{R}^n} u(x_1 + iy_1, Z')\, dX$$

$$\leqq (\pi r^2)^{-1}\, 2r\, M(u, 1) .$$

同様にして, $Z' \in T_{\Omega'}$ を固定するとき $z_1 \in \mathbb{R}^2_+$ の関数 $u(z_1, Z')$ が $LH^1(\mathbb{R}^2_+)$ に属することがわかる ([10, p.116]). さて, (4) が $n-1$ のとき成立すると仮定する. $n=1$ のときはすでに補題3で証明してある故, n のときを言えばよい. $\rho' = (\rho_2, \cdots, \rho_n) \in \Omega'$ とおいて,

$$\int_{\Omega} u_\rho(X+iY)\,dY = \int_{\mathbb{R}_+} dy_1 \int_{\Omega'} u(x_1+i(\rho_1+y_1), X'+i(\rho'+Y'))\,dY'$$

$$\leqq 2^{-(n-1)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dX' \int_{\mathbb{R}_+} u(x_1+i(\rho_1+y_1), X'+i\rho')\,dy_1$$

$$\leqq 2^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} u_\rho(X)\,dX.$$

定理の証明. $p=1$ としておいて十分である. $\varepsilon=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\Omega$ をとり, $W\in\mathbb{C}^m$ を固定して $v(Z;\varepsilon,W)=u(Z+i(\varepsilon+\Phi(W,W)),W)$, $Z=X+iY\in T_\Omega$, とおく. このとき, Zの関数として $v(Z;\varepsilon,W)\in LH^1(T_\Omega)$ であることが [9] と同じ議論によって言える. 従って, (4)から, 任意の $\rho\in\Omega$ に対して

$$\int_{\Omega} u(X+i(\rho+\varepsilon+Y+\Phi(W,W)),W)\,dY \leqq 2^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} u(X+i(\rho+\varepsilon+\Phi(W,W)),W)\,dX$$

を得る. 両辺を dW で積分し, $\rho+\varepsilon$ が任意であることを考慮して定理の不等式を得る.

4. その他

定理. $D=D(\Omega,\Phi)$, $u\in LH^p(D)$, $0<p<\infty$, とし,

$$\psi(Y)=\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m} u(X+iY+i\Phi(W,W),W)^p\,dX\,dW,\quad Y\in\Omega,$$

とおく. このとき, $\psi(Y)$は Ωの順序で Yの減少関数である. 更に, ある $Y_0\in\Omega$ で $Y\geq Y_0$, $|Y|\to\infty$, のとき $\psi(Y)\to 0$ である.

証明. 略.

さて, $H^p(D)$ の場合を考えると, Fejér-Riesz不等式の右辺は, 境界関数の積分になる. $f\in H^p(D)$のとき,

$$f^*(X+i\Phi(W,W),W)=\lim_{Y\to 0} f(X+iY+i\Phi(W,W),W)$$

が, a.e. $(X,W)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m$ に対して存在する. $f^*\in L^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{C}^m)$ で, $f_Y\to f^*$ は L^p-収束する ([9]). この事実と上の結果を考えて, 次を得る:

定理. $D=D(\Omega,\Phi)$, $f\in H^p(D)$, $0<p<\infty$, とする. こ

のとき，任意の $X \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\int_{\Omega \times \mathbb{C}^m} |f(X+iY+i\Phi(W,W),W)|^p dY dW \leqq$$

$$2^{-n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^m} |f^*(X+i\Phi(W,W),W)|^p dX dW.$$

文　献

[1] E. F. Beckenbach, On a theorem of Fejér and Riesz, J. London Math. Soc. 13 (1938), 82–86.

[2] L. Fejér und F. Riesz, Über einige funktionentheoretische Ungleichungen, Math. Z. 11 (1921), 305–314.

[3] M. Hasumi and N. Mochizuki, Fejér-Riesz inequality for holomorphic functions of several complex variables, Tôhoku Math. J. 33 (1981), 493–501.

[4] E. Hille and J. D. Tamarkin, On the absolute integrability of Fourier transforms, Fund. Math. 25 (1935), 329–352.

[5] A. Korányi, The Poisson integral for generalized half-planes and bounded symmetric domains, Ann. of Math. 82 (1965), 332–350.

[6] V. I. Krylov, On functions regular in a half-plane, Mat. Sb. 6 (48) (1939), English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. (2) 32 (1963), 37–81.

[7] N. Mochizuki, Inequalities of Fejér-Riesz type for holomorphic functions on certain product domains, Tôhoku Math. J. 34 (1982), 367–372.

[8] A. Nagel, W. Rudin, and J. Shapiro, Tangential boundary behavior of function in Dirichlet-type spaces, Ann. of Math. 116 (1982), 331–360.

[9] E. M. Stein, Note on the boundary values of holomorphic functions, Ann. of Math. 82 (1965), 351–353.

[10] E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press, 1975.

(以上)