

Douglas algebra に関連した最近の話題

神奈川県大工 泉池 敬司 (Keiji Izuchi)

H^∞ に関する分解定理はよく知られているが、ここでは $H^\infty + C$ 及び一般の Douglas 環の中での分解定理の周辺の話題を述べたい。

§1. 準備.

D を単位円円板, ∂D をその境界とする。 H^∞ を D 上の有界正則関数のなる環とする。境界関数を考えることによつて, H^∞ は L^∞ の *sup-norm* 閉部分環となる。 L^∞ は $\partial D/2\pi$ に関する有界 Borel 関数全体である。 H^∞ と L^∞ の中間にある環を Douglas 環としよう。 C を ∂D 上の連続関数全体とする時, $H^\infty + C$ は H^∞ を除いて最小の Douglas 環である (D. Sarason)。以下断りなしに B と書いたら $H^\infty + C$ より大きい Douglas 環とする。 Douglas 環における最も重要な定理は,

Chang-Marshall 定理 [3, 14]. B は H^∞ と \llcorner かの

interpolating Blaschke 積の複素共役で生成される。

$M(B)$ は B を maximal ideal space を表わす。 $M(H^{\infty} + C) = M(H^{\infty}) \setminus D$ である。 B は \mathbb{R} を Gelfand 変換と同視する。

$f \in B$ に對して

$$Z_B(f) = \{x \in M(H^{\infty} + C); f(x) = 0\}$$

とする。特に $B = H^{\infty} + C$ の時は $Z(f) = Z_{H^{\infty} + C}(f)$ と省略して置くことにする。 $M(H^{\infty})$ の中の二点 x, y に對して

$$S(x, y) = \sup \{|f(y)|; f \in H^{\infty}, \|f\| \leq 1, f(x) = 0\}$$

とおく。

$$P(x) = \{y \in M(H^{\infty}); S(x, y) < 1\}$$

は x を含む Gleason part と呼ばれる。 H^{∞} は logmodular 環であるから、 $P(x) \neq \{x\}$ ならば D から $P(x)$ 上への 1 対 1 連続写像 α で $\alpha(0) = x$, $f \circ \alpha$ が各 $f \in H^{\infty}$ に對して正則となる α が存在する。この時 $f \circ \alpha(z)$ の $z=0$ での zero 点の order をそのまま f の x での zero 点の order と考え $\text{Ord}_f(x)$ と表わす。 $\{z_n\} \subset D$ が $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - |z_n|| < \infty$ を満たす時、

$$b(z) = \prod \frac{-\bar{z}_n}{|z_n|} \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z}$$

を Blaschke 積と云う。特に $H^{\infty} \setminus \{z_n\} = \mathbb{R}^{\infty}$ とするとき、interpolating と云う名前を付ける。

Hoffman 定理 [10]. $x \in M(H^{\infty} + C)$ に對して $P(x) \neq \{x\}$ なら

ある条件は $b(x) = 0$ とする interpolating Blaschke 積 b が存在することである。

b が $\{z_n\}$ を zero 点列とする interp. Blaschke 積とある時、次の事は知られている。

- (1) $\{z_n\}$ の $M(H^\infty)$ での closure は βN と homeo. である。
- (2) $\text{Ord}_b(x) = 1$ ($x \in Z(b)$).

二次の H^∞ の分解定理は、 D の中の zero 点列に関して見ると大域的に分解出来ることを示している。

H^∞ の分解定理. $H^\infty = BS O$, B は Blaschke 積, S は singular inner 関数, O は outer 関数である。

次は K. Hoffman [10] によ、 Z と Z された, $M(H^\infty)$ の各点 x での分解定理である。

Hoffman 定理 2. $f \in H^\infty$, $x \in M(H^\infty)$ で $\text{Ord}_f(x) = k$ とある。 $k < \infty$ ならば $f = f_1 f_2 \dots f_k$, $f_i \in H^\infty$, $\text{Ord}_{f_i}(x) = 1$ と分解出来る。 $k = \infty$ ならば任意の n に対して $f = f_1 f_2 \dots f_n$, $f_i \in H^\infty$, $f_i(x) = 0$ と分解出来る。

§2. Wolff の分解定理.

事の始まりは次の Sarason 定理 [15] である。 $QC = (H^\infty + C) \cap \overline{(H^\infty + C)}$, $QA = H^\infty \cap QC$ とする。

Sarason 定理 1. $w \in QC$ での invertible と unimodular

関数, $|w|=1$ a.e. $d\theta/2\pi$, ならば $w = z^m \exp[i(u + \tilde{v})]$ である, $i = \sqrt{-1}$, $u, v \in \mathbb{C}$ であり, \tilde{v} は v の共役調和である。

Sarason は同時に次の問題を提出した。 w が $H^\infty \subset \mathbb{C}$ の unimodular 関数ならば, $w = uv$, u は inner 関数, v は $\mathbb{Q}\mathbb{C}$ で invertible か? これを解いたのが T. Wolff [17] である。

一方 S. Axler [1] は次の分解定理を与えた。

Axler 定理. $f \in L^\infty$ に對して, $bf \in H^\infty + \mathbb{C}$ とする Blaschke 積 b が存在する ($L^\infty / \{\text{Blaschke 積}\} = H^\infty + \mathbb{C}$)。

ただし b は interp. Blaschke 積には取れない。 [17] での Wolff の主定理は次のである。

Wolff 定理 1. $f \in L^\infty$ に對して $gf \in \mathbb{Q}\mathbb{C}$ とする outer 関数 $g \in \mathbb{Q}A$ が存在する ($L^\infty / \mathbb{Q}A = \mathbb{Q}\mathbb{C}$)。

この定理の応用は多く, Chang-Marshall 定理に次ぐ Douglas 環において深い定理に思われる。この定理を用いて [7] で次が示された。

Guillory-Sarason 定理 1. 各 inner 関数 I に對して, $I\bar{b} \in H^\infty + \mathbb{C}$ かつ $bI \in H^\infty + \mathbb{C}$ する Blaschke 積 b が存在する。

この定理は, singular inner 関数は考えなくとも Blaschke 積だけ考えれば用が足りることを示しているが, 又反面 Blaschke 積は interp. Blaschke 積の持つ性質と全く異なる。

のが存在することを示す定理でもある。後で関連してくるが、残さず $z < z$ 問題の多くは z の様な Blaschke 積に関するものである。W-定理1 と G-S 定理1 を合わせると次が得られる。

Wolff 定理2. w が L^∞ の unimodular 関数ならば,
 $w = B_1 \bar{B}_2 v$ である。ここで B_1, B_2 は Blaschke 積, v は \mathbb{D} 上で invertible 関数。

W-定理1 は次の2つの補題を結び合わせて示される。

補題1. $f \in L^\infty$ に対し Blaschke 点列 $\{z_n\}$ が次の性質を持つものが存在する: $g \in \mathbb{D}C$, $g(z_n) \rightarrow 0$ ならば $gf \in \mathbb{D}C$ 。

補題2. $\{z_n\}$ が Blaschke 点列ならば $g(z_n) \rightarrow 0$ なる outer 関数 $g \in \mathbb{D}A$ が存在する。

Wolff の証明はともに VM の技法で示される。後で、補題1 は interp. Blaschke 積の性質を使う証明を述べる。補題2 は存在定理で、 g を singular inner 関数に変えらなければならないというのが [7] における問題の1つで後述する。

§3. Guillory-Sarason の分解定理2.

[7] で示された一つの分解定理の周辺について述べる。

Guillory-Sarason 定理2. ψ を inner 関数, $\varphi \in H^p C$ とするとき次は同値である。

(i) $\varphi \bar{\varphi}^n \in H^\infty + C$, $n = 1, 2, \dots$

(ii) $\{x \in M(H^\infty + C); |v(x)| < 1\} \subset Z(\varphi)$.

この定理から出発して [2, 13, 1] の Douglas 環への拡張がある。それらを通し2次の2つが基本であることが理解出来る。一つは単純に Chang - Marshall 定理に含まれるものがあるが、明確に書かれていない所がなく、Marshall 氏によれば彼の博士論文に述べられていいるといふがない。

命題 1 (証明は [1] 参照). inner 関数 I に対し、interpolating Blaschke 積 b が $[H^\infty, I] = [H^\infty, \bar{b}]$ なるものが存在する ($\{x \in M(H^\infty + C); |I(x)| < 1\} = \{x \in M(H^\infty + C); |b(x)| < 1\}$ と同じこと), ここで $[\cdot]$ は中味より生成される内部分環を表わす。

もう一つは [2, 9] で同時に独立に得られた結果である。

A-G-G-I-S 定理. b を interpolating Blaschke 積, $f \in H^\infty + C$, $\sigma \cap Z(f) \supset Z(b)$ ならば, $f\bar{b} \in H^\infty + C$ である。

H^∞ の分解定理は, $f \in H^\infty$, b を Blaschke 積とし, もし $\text{Ord}_f(z) \geq \text{Ord}_b(z)$ (z は b の D での zero 点) ならば, $f\bar{b} \in H^\infty$ であることを示してゐる。この場合 $\text{Ord}_b(z) < \infty$ である。よって割算について自然に $H^\infty + C$ に拡張を考へるならば, $\text{Ord}_b(x) < \infty$ ($\forall x \in Z(b)$) の時に考へることになる。その場合, b は interpolating Blaschke 積の有限個の積の形に表わす

れるから A-G-G-I-S 定理が自然な拡張になつてゐることがわかる。 $\text{Ord}_b(x) = \infty$ とする $x \in Z(b)$ がある時は $f \in H^0 + C$ が $\text{Ord}_f(x) \geq \text{Ord}_b(x)$ ($\forall x \in Z(b)$) を満たしかつ $f\bar{b} \notin H^0 + C$ なる例は簡単に作れる。この点は Guillois-Sarason 定理 3 に関係してゐる。分解定理で残された難かしきはすべて、zero 点の order が ∞ になる場合に集約される。この場合はあまりわからなかつた。

この G-S 定理 2 を命題 1 と A-G-G-I-S 定理より導いてみよう。(12)

証明. (i) \Rightarrow (ii) は自明である。(逆) ψ に対して命題 1 の b を取る。 $Z(b) \subset \{x \in M(H^0 + C); |\psi(x)| < 1\} \subset Z(\psi)$ であるから、A-G-G-I-S 定理より、 $\psi\bar{b} \in H^0 + C$ である。この上 $Z(b) \subset Z(\psi\bar{b}) = Z(\psi)$ より、 $\psi\bar{b}^2 \in H^0 + C$ 。繰り返して、 $\psi\bar{b}^m \in H^0 + C$ を得る。

A-G-G-I-S 定理は Chang-Marshall 定理をいふものように使つて容易に一般の Douglas 環の場合に拡張出来る、よつて G-S 定理 2 も拡張出来る。G-S 定理 2 の最終的な形は次の様になる ([18] を参照)。

命題 2. B_1, B_2 を Douglas 環とし $f \in B_2$ とする。次は同値である。

(i) $f B_1 \subset B_2$.

(ii) $Z_{B_2}(f) \supset M(B_2) \setminus M(B_1)$.

Wolff 補題 1 の別証. $f \in L^\infty$ とする. C-M 定理より $f, \bar{f} \in [H^\infty, \bar{1}]$ なる inner 関数 I が存在する. 命題 1 より $[H^\infty, \bar{1}] = [H^\infty, \bar{b}]$ なる interp. Blaschke 積 b があす. $g \in \mathbb{Q}C$ を $g(z_n) \rightarrow 0$ とおくと, A-G-G-I-S 定理より $g\bar{b}^m \in H^\infty + C$ を得る. これは $[H^\infty, \bar{b}] \cap g \subset H^\infty + C$ であり証明が終る.

この証明は命題 2 の特別な場合である: $B_1 = [H^\infty, f, \bar{f}]$, $B_2 = H^\infty + C$, $f = g \in \mathbb{Q}C \subset H^\infty + C$. 証明は同じである. 又補題 1 の Douglas 環への拡張も出来る. ただ補題 1 を証明するだけならば, A-G-G-I-S 定理は~~必要~~なく, 命題 1 より明らかになる.

関連して生ずる問題は: Wolff 補題 1 の結論が成立する Blaschke 点列 $\{z_n\}$ は interpolating 点列の有限個の合併集合か?

最後に § 2 の終りに述べた事柄について述べる. [7] に次の問題がある: 各 inner 関数 I に対して singular inner 関数 S が $S I^m \in H^\infty + C (\forall m)$ をみたすものが存在するか?

この解は最近 P. Gonkin [6] によつて与えられた. Gonkin は [7] での手法を使つてゐる為, 上半平面でその構成をしてゐるが単位円板 D で議論した方が簡単で又 singular 測度を作る時, 準積分にも又 discrete にも取れるから便利である.

singular 測度の構成.

まず Sarason の問題に答えるように問題を变形して置く。
 I を inner 関数とすると命題 1 より $[H^\infty, I] = [H^\infty, \bar{b}]$ なる
 interpolating Blaschke 積 b がある。その zero 点列を $\{z_n\}$ とす
 る。 $S(z_n) \rightarrow 0$ なる singular inner 関数 S の存在が示され
 れば、A-G-G-I-S 定理より $S\bar{b}^m \in H^\infty + C$ となり、 $S\bar{I}^m \in$
 $H^\infty + C$ が得られる。よ、2 問題は $S(z_n) \rightarrow 0$ なる S の作り方
 だけである。(Wolff 補題 2 と比較すると問題変換は同じになる)。

ここで $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ とおく。 $\sum_{n=1}^{\infty} (1-r_n) < \infty$ だから、正数列
 $\{b_n\}$ として $b_n \rightarrow \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (1-r_n) < \infty$ なるものを取り、 $a_n =$
 $b_n(1-r_n)$ とおく。 S_n を $e^{i\theta_n}$ での単位真測度とし、 $\mu =$
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n S_n$ とおき、 μ は discrete 測度である。 $S[\mu]$ として μ によ
 り作られる singular inner 関数とすると

$$\begin{aligned} |S[\mu](z_n)| &\leq |S[a_n S_n](z_n)| \\ &= \left| \exp \left[-a_n \frac{e^{i\theta_n} + r_n e^{i\theta_n}}{e^{i\theta_n} - r_n e^{i\theta_n}} \right] \right| \\ &= \exp \left[-a_n \frac{1+r_n}{1-r_n} \right] = \exp \left[-b_n(1+r_n) \right] \rightarrow 0. \end{aligned}$$

もし連続 singular inner 関数を望むならば S_n の代わりに

$$\operatorname{Re} \int \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu_n(\theta) \geq \frac{1+r_n}{2(1-r_n)}$$

を用いた連続 singular 確率測度を選べばよい。証明終り。

この結果から Hoffman の本, p. 179 に述べられている,

$x \in M(H^\infty C) \setminus M(L^\infty)$ の特長づけの所に次の条件を加えることが出来る。

(a) $S_d(x) = 0$ ($S_c(x) = 0$) なる discrete (連続) singular inner 関数 S_d (S_c) が存在する。

又 L^∞ が H^∞ と $\overline{S_d}$ (又は $\overline{S_c}$) で生成され得ることになる。おもしろい所は、 S_d に対して $S_c \overline{S_d}^m \in H^\infty + C$ なる S_c が存在する所である。同様に S_c に対して $S_d \overline{S_c}^m \in H^\infty + C$ なる S_d が存在する。singular inner 関数の分解定理の研究はあまり進んでいないが、上の議論を押し進めていくと何かがある様子が気がする。主として、Axler 定理はこれらの事を用いて得ることが出来る。(しかし Axler 定理の証明自体は簡単なものごとごと係、という Douglas-Rudin 定理 [4] と結びつけて考えると新しい見方が出て来り様な気がする。

§4. Guillory-Sarason 定理 3.

次も [7] に示された結果である。

Guillory-Sarason 定理 3. 次をみたす自然数 N が存在する: $\varphi \in H^\infty + C$ 且、 φ は inner 関数とする。もし $M(H^\infty + C)$ 上で $|\varphi| \leq |\psi|$ が成立しているならば、 $\varphi^N \overline{\psi} \in H^\infty + C$ である。

この定理は分解定理の中で深く $H^\infty + C$ の構造又は Douglas 環の構造に関連している様に見える。また N の出所がある

が Carleson の corona 定理の証明の中に出る構成法の中
 の自然数に依存する N である。問題の一つは具体的に N が
 よである。もう一つは一般の Douglas 環で $G-S$ 定理が成
 立するかである。とてに難しい問題の様に思われる。寧ろは
 $N=2$ (もう少し 1^+ という所まで拉げ出さず) と予想する。

ψ が interpolating Blaschke 積とすると, $|\psi| \leq |\psi|$ は $Z(\psi)$
 $\subset Z(\psi)$ を意味するから $A-G-I-S$ 定理より $\psi \bar{\psi} \in H^\infty + C$
 となる。つまり ψ が interpolating Blaschke 積ならば $N=1$
 と取れる。有限個の積論で ψ が interpolating Blaschke 積の
 有限個の積の場合に $N=1$ である。 ψ が $N=2$ ならば、
 interpolating Blaschke 積 b で $\psi \bar{b}^m \in H^\infty + C$ なるものが存
 在する。 $\varphi = \psi \bar{b}$ とすると, $|\varphi| = |\psi|$ ($M(H^\infty + C)$ 上) であ
 り, $\varphi \bar{\varphi} = \bar{b} \in H^\infty + C$ であり $\varphi^2 \bar{\varphi} = \psi^2 \bar{b}^2 \bar{\psi} = \psi \bar{b}^2 \in H^\infty + C$
 である。 $\varphi = \psi \bar{b}^m$ とし m を偶数とすると, $\varphi^2 \bar{\varphi} = \psi \bar{b}^{2m} \in H^\infty + C$ と同じ
 事になる。 もう一つの例は U を $M(L^\infty)$ の部分、角集合で χ を
 U 上で 1 , U^c 上で定数 α , $|\alpha|=1$ とする。 Wolff 定理より,
 $\chi = u B_1 \bar{B}_2$ なる Blaschke 積 B_1, B_2 と QC が invertible
 なる u が存在する。 $B_1 \bar{B}_2 \in H^\infty + C$ である。又

$$B_1^2 \bar{B}_2 = \chi^2 \bar{B}_2 \bar{u}^2 \bar{B}_2 = \bar{u}^2 \chi^2 \bar{B}_2$$

であるから $B_1^2 \bar{B}_2 \in H^\infty + C$ を示すには, $\chi^2 \bar{B}_2 \in H^\infty + C$ を示
 せばよい。 $\alpha = \pm 1$ の時はあたりまえ。よって $\alpha \neq \pm 1$

の時を考へる。 $X^2 B_2 \notin H^\infty + C$ とおくと、或る $x \in M(H^\infty + C)$ により $X^2 B_2|_{\text{supp} \mu_x} \notin H^\infty|_{\text{supp} \mu_x}$ となる。条件より $X B_2 \in H^\infty + C$ より $X B_2|_{\text{supp} \mu_x} \in H^\infty|_{\text{supp} \mu_x}$ かつ $B_2|_{\text{supp} \mu_x} \in H^\infty|_{\text{supp} \mu_x}$ となる。かつ

$(X^2 - X) B_2|_{\text{supp} \mu_x} \notin H^\infty|_{\text{supp} \mu_x}$ かつ $(X - 1) B_2|_{\text{supp} \mu_x} \in H^\infty|_{\text{supp} \mu_x}$
 X_0 を \cup して 0 , \cup^c して 1 とおくと

$X_0 B_2|_{\text{supp} \mu_x} \notin H^\infty|_{\text{supp} \mu_x}$ かつ $X_0 B_2|_{\text{supp} \mu_x} \in H^\infty|_{\text{supp} \mu_x}$ となり矛盾が生ずる。この議論を押し進めると、 w が有限個の値を取る unimodular 関数の時、Wolff 定理 2 より得られる $w, B_1, \bar{B}_2 \in QC$ となる Blaschke 積 B_1, B_2 に \neq し $B_1^2 \bar{B}_2 \in H^\infty + C$ となることがわかる。もし $G-S$ の証明方法を話しを進めようとしたら corona 定理の精密化が必要に見える。

自然数の 2 と 3 に関係する問題がいくつかあるのをご存知の方を御紹介したい。

早大の羽島氏より注意された事であるが、corona 定理に
 関係 (2 次) の問題がある (Wolff の問題, [5, p. 329]):

$f_1, f_2, \dots, f_n, g \in H^\infty$ 且 $|g(z)| \leq |f_1(z)| + |f_2(z)| + \dots + |f_n(z)|$
 ならば $g^2 = g_1 f_1 + g_2 f_2 + \dots + g_n f_n$ なる $g_i \in H^\infty$ が存在するか?

この時 n は一般の k での問題設定が出来ず $k \geq 3$ の時には Wolff によって示されている。 $k=1$ の時は NO である。残されているのは n の問題である。これは問題として以前の N

の問題とにされる。この場合は D 上での評価式の条件であるが、こゝら辺の難かしは境界の近くでの 0 に近づく早急の order を評価しなくともならない所がある。 N の問題も同じである。しかし2つの問題の相関関係はあまりはっきりしない。羽島氏は Wolff の問題は 2^+ に当る所までは 0 まで 2^- は $N0$ という結果を得ていられる様である。

次は Sarason の問題である。 B を Douglas 環で \mathcal{U} を B の中で invertible な inner 関数の集まりとする。 u を \mathcal{U} より生れし C^* -環の中の unimodular 関数とする。問題は u が \mathcal{U} の中の2つの関数の商で近似出来るか？ u^2 は近似出来ること Marshall によつて知られていられる ([5, p. 399]).

最後に Sarason 定理 2 [16] について述べる。

Sarason 定理 2. φ_1 と φ_2 を inner 関数で

$\{x \in M(H^2_C); |\varphi_1(x)| < 1\} \cap \{x \in M(H^2_C); |\varphi_2(x)| < 1\} = \emptyset$
 とする。 \mathcal{Q} を任意の \mathcal{Q} -level set \mathcal{Q} に對して $\varphi_1|_{\mathcal{Q}}$ 又は $\varphi_2|_{\mathcal{Q}}$ の少なくとも一方は定数となる。こゝで \mathcal{Q} -level set とは \mathcal{Q} の関数で分離出来ない X の中の極大集合をいう。

こゝで2つの inner 関数が出でくるが、3つの場合はどうなるかというのが Sarason の問題である。この定理 2 の Douglas 環への拡張も知られていない。又この定理の応用として b の interpolating Blaschke 積ならば

(*) $\bigcup \{ \text{supp } \mu_x; x \in Z(b) \}$ の閉包は H^0 の weak peak set になつており, これは Wolff 補題 2 の精密化に當つてゐる。その話しを述べることは、多少 QC -level set に関する情報が得られる [11]。G-S 定理 3 と Sarason 定理 2 は今の所関係がない様に見えるが、将来は何らかの形で繋がつて来る様に見える。Sarason 定理 2 は Wolff 定理 1 を使つて示されるが、一つの応用として (*) が得られ、それより

(**) 任意の $M(L^0)$ の閉集合は QC -level set を含むことが示される [6, 11]。もしこの事実が Wolff 定理 1 を使わないで示すことが出来れば、そこから Wolff 定理 1 を示すことは難かしくなる。QA 関数の outer factor は QA 関数になることに注意すればよい。(**) は Wolff 定理 1 から容易に出る様うには思われまい。その意味では Wolff の QA 関数の構造は初等的である。より深く見ていくためには [8, 9] から手掛りが見られるのではないかと期待する。

§5. 他の分解定理と問題.

inner 関数の $H^0 + C$ の中での分解定理を考へる時、G-S 定理 1 より、Blaschke 積 b について考へればよい。そこで b を Blaschke 積とす。まず A-G-G-I-S 定理より、

次の問題が出てくる。

問題1. $Z(b) \supset Z(c)$ なる inner 関数 b に対し Z , W が $|f| \leq |b|$ ($M(H^\infty C)$ 上) とする b の特長が何か?

A-G-G-I-S 定理より b が interpolating Blaschke 積の場合は問題1の性質を持つ。よ、 Z 問題は上の解答が interpolating Blaschke 積に存在かである。 b が interpolating でない時、問題1の条件を満たさないことをいえるが次の場合分けがある。

- (1) $2 \leq \text{Ord}_b(x) < \infty$ なる $x \in Z(b)$ が存在するとき。
- (2) $\{z_n\}$ が b の D 内での zero 点列とある時, $\text{Ord}_b(z_n) \geq 2$.
- (3) $\rho(z_n, z_m) \geq \delta$ $\forall n \neq m$.

ケース1と2は残った2つの場合は

$$\text{Ord}_b(x) = 1 \text{ 又は } \infty \quad (\forall x \in Z(b))$$

の場合である。最終的には [10] で見られる様な他の Blaschke 積の分解定理が必要に思われる。

問題2. $f \in H^p + C$, $x \in M(H^\infty C)$, $\text{Ord}_f(x) \geq 2$ とする。

$f = f_1 f_2$, $f_i \in H^\infty + C$, $f_i(x) = 0$ と分解出来るか?

Hoffman 定理2は局所的 (fiber 上) に分解出来ることを示している。問題は全域的に分解する所である。 x が特殊な点の時、たとえば interpolating 点列 $\{z_n\}$ が $f(z_n) \rightarrow 0$ かつ $\rho\{z_n\} \geq \delta$ の時には A-G-G-I-S 定理より分解出来る。

この問題に關して得られた結果はない。

問題3. I を inner 関数で, $\text{Ord}_I(x) < \infty$ ($\forall x \in Z(I)$) とする。この時 I は interpolating Blaschke 積の有限個の積になる。 $\text{Ord}_I(x) = n$ ($\forall x \in Z(I)$) ならば I は n 個の interpolating Blaschke の積で表わせるか? これは Y. Izuchi [12] によつて答は Yes である。 $\text{Ord}_I(x) = \infty$ ($\forall x \in Z(I)$) の時は, 問題1の特殊な場合となり $I = b_1 b_2$, $Z(I) = Z(b_1) = Z(b_2)$ なる Blaschke 積 b_1, b_2 が存在するかどうかはわからない(ただし I を Blaschke 積とすべき時)。

問題4. (Guillory-Sarason [7]). $S_1 \overline{S_2}, \overline{S_2} S_1 \in H^\infty + C$ をみたす singular inner 関数 S_1, S_2 が存在するか?

$S_1 \overline{S_2} \in H^\infty + C$ となる2つの singular inner 関数の關係についてそれは, 2つはいい。 §3の最後に述べたことから, S_2 を固定した時 $S_1 \overline{S_2} \in H^\infty + C$ となる S_1 はかなり多い。その特長づけは難かしい様に見える。 $S_1 \overline{S_2}^n \in H^\infty + C$ ($\forall n$) なる S_1 の特長づけは §3か §5の様子は想像出来るが, きちんとした条件で与えるのはもう少し時間が必要と思われる。問題4をみたす S_1, S_2 が見つかるとおもしろいと思う(たぶん存在しないと思う)。

References

1. S. Axler, Factorization of L^∞ functions, Ann. of Math., 106 (1977), 567-572.
2. S. Axler and P. Gorokin, Divisibility in Douglas algebras, to appear in Michigan Math. J..
3. S.-Y. Chang, A characterization of Douglas subalgebras, Acta Math., 137 (1976), 81-89.
4. R. Douglas and W. Rudin, Approximation by inner functions, Pac. J. Math. 31 (1969), 313-320.
5. J. Garnett, Bounded analytic functions, Academic Press (1981).
6. P. Gorokin, Singular inner functions and division in $H^{\infty}C$, preprint.
7. C. Guillory and D. Sarason, Division in $H^{\infty}C$, Michigan Math. J., 28 (1981), 173-181.
8. C. Guillory and D. Sarason, The Algebra of quasicontinuous functions, preprint.
9. C. Guillory, K. Izuchi and D. Sarason, Interpolating Blaschke products and division in Douglas algebras, to appear in Proc. Royal Irish Acad..
10. K. Hoffman, Bounded analytic functions and Gleason

- and Gleason parts, *Ann. of Math.*, 86(1967), 94-111.
11. K. Izuchi, QC -level sets and quotients of Douglas algebras, preprint.
 12. Y. Izuchi, A note on interpolating Blaschke products, preprint.
 13. D. Luecking, Division in Douglas algebras, *Michigan Math. J.*, 29(1982), 307-314.
 14. D. Marshall, Subalgebras of L^∞ containing H^∞ , *Acta Math.*, 137(1976), 91-98.
 15. D. Sarason, Algebras of functions on the unit circle, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79(1973), 286-299.
 16. D. Sarason, The Shilov and Bishop decompositions of $H^{\infty} + C$, *Conference Harmonic Analy.*, in honor of A. Zygmund (1981), 461-474.
 17. T. Wolff, Two algebras of bounded functions, *Duke Math. J.*, 49(1982), 321-328.
 18. R. Younis, Division in Douglas algebras and some applications, preprint.