

### 3次元多様体, Fake Surfaces, D-S graphs

神戸大 教養 池田裕司

神戸大 教養 井上善允

1. Fake surface と云うのは

"  $\forall x \in P$ ,  $lk(x, P)$  が circle  $S^1$ ,  $\theta$ -curve  $\theta$ ,  
4頂点完全グラフ  $K_4$  のいずれかである "  
を満たす2次元 polyhedron の事である。

$P$  を fake surface とする時, 次の記号を用いる。

$$S_2(P) = \{ x \in P \mid lk(x, P) = \theta \} \text{ の closure in } P,$$

$$S_3(P) = \{ x \in P \mid lk(x, P) = K_4 \}$$

$M(P) = P - U(P)$  の closure in  $P$ , 又はその  
connected components の set, 但し  $U(P)$  は  
 $S_2(P)$  の  $P$  に於ける regular neighborhood.

Closed 3-manifold  $W$  に対して,

" fake surface  $P$  が  $W$  の spine である "

と云うのは

$$\text{" } \exists \text{ 3-ball } B \subset W \rightarrow W - \overset{\circ}{B} \rightarrow P \text{ "}$$

を意味する事にして、以下この状況で考える。

更に、 $S_2(P) = \emptyset$  ならば  $P$  は必然的に 2-manifold となるし、 $S_3(P) = \emptyset$  の場合も  $W$  が何であるか簡単に解けてしまうので、我々は  $S_3(P) \neq \emptyset$  を仮定する。

Prop. 1.  $M(P)$  は 2-ball を含む。

Prop. 2.  $H_1(P)$  が直和因子として  $\mathbb{Z}_2$  を含まない  
 $\Rightarrow M(P)$  の element は punctured 2-ball.

以後、" $M(P)$  の element は 2-ball" を仮定するが、これは全く不当なものではない。即ち、一般性を損なうものではない。

Prop. 3.  $\#M(P) = \#S_3(P) + 1$

今、 $M = W - \overset{\circ}{B}$  とおくと、 $M \rightarrow P$  だから、 $M$  から  $P$  への整形された collapsing map の  $M$  への restriction  
 $f: M \rightarrow P$  を考える事が出来る。上の Prop.1. から Prop.3.

は  $f$  の性質から導かれるのであるが、ここでは証明よりも紹介を重視したい。

$f$  の諸々の特徴の中、覚えて置いて欲しいのは次である。

Prop. 4.  $f$  は locally homeomorphism である。

即ち,  $\forall x \in M, \exists x$  の  $M$  に於ける近傍  $N$

$\rightarrow f|N: N \rightarrow f(N)$  は homeomorphism.

Prop. 5.  $W = B/f$

Prop. 6.  $f^{-1}(S_2(P))$  は  $S^2$  に embed された 3-regular connected graph で頂点数は  $4\#S_3(P)$  である。

2.  $G$  は  $S^2$  に embed された graph とする。  $G$  が D-S graph と呼ばれるのは,

$\exists$  fake surface  $P, \exists$  locally homeo  $f: S^2 \rightarrow P$

$\rightarrow$  (1)  $f$  の mapping cylinder  $C_f$  は 3-manifold.

(2)  $G = f^{-1}(S_2(P))$

(3)  $v(G) = f^{-1}(S_3(P))$ , 但し  $v(G)$  は  $G$  の頂点の集合を示す。

を満たす時であると定める。この時、 $f \in (S^2, G)$  又は  $G$  の  $P$  に関する *identification* と云う。  $S^2$  の subset  $X, Y$  に対して  $f(X) = f(Y)$  の時、 $X \sim Y$  と書く事もある。

Remark.  $S^2$  を 3-ball  $B$  の boundary と考えて

$$W = B \cup C_f$$

と置けば、 $W$  は closed 3-manifold で、 $P$  は  $W$  の spine になっている。

$f$  としては、元来、整形された collapsing map の制限を想定している訳だから、 $G$  も相応の条件を具えている。

即ち、 $G$  は Prop. 6 を満たす所からスタートする。

$S^2 - G$  の connected component  $X$  が  $p$  角形であると言ふのは次のように考える事にする。

$G$  の  $S^2$  に於ける regular neighborhood を  $N$  として、 $\varphi: N \rightarrow G$  を整形された collapsing map の  $N$  への制限とおく。

- (1)  $\varphi^{-1}(v(G)) \cap X$  を  $X$  の頂点と云って  $v(X)$  と書く。
- (2)  $\varphi^{-1}(e(G)) \cap X$  を  $X$  の edge と云って  $e(X)$  と書く。
- (3)  $X$  が  $p$  角形と言ふのは  $\#v(X) = p$  の事と定める。

Prop. 7.  $\exists p$  角形  $X \rightarrow 1 \leq p \leq 5$ .

この証明は殆ど明らかなのであるが、後々結構役に立つ事がある。

Prop. 8.  $\forall p$  角形  $X, \exists \perp p$  角形  $X'$   
 $\rightarrow X \sim X', X \cap X' = \emptyset$ .

$S_2(P)$  を、頂点  $S_3(P)$ , edge は頂点によって自然に定まる 4-regular oriented graph と考える。それに伴って  $G$  の orientation は、常に、 $f$  によって  $S_2(P)$  の orientation から自然に定まるものと考えられる事がある。同様に、 $S^2 - G$  の connected component  $X$  の edge  $e(X)$  にも  $\varphi$  によって  $G$  から自然に orientation を定める事が出来る。

$v(G) \cup e(G)$  の element  $a$  に対して、 $a$  の "名前" は  $f(a)$  であると言って、図には  $f(a)$  を書き込んでおけば  $(S^2, G)$  の identification の様子を示す事が出来る。

同様に、 $v(X) \cup e(X)$  に対しても  $\varphi$  を用いて名前を付けて置く。

次に、 $X$  の名前  $[X]$  について説明する。

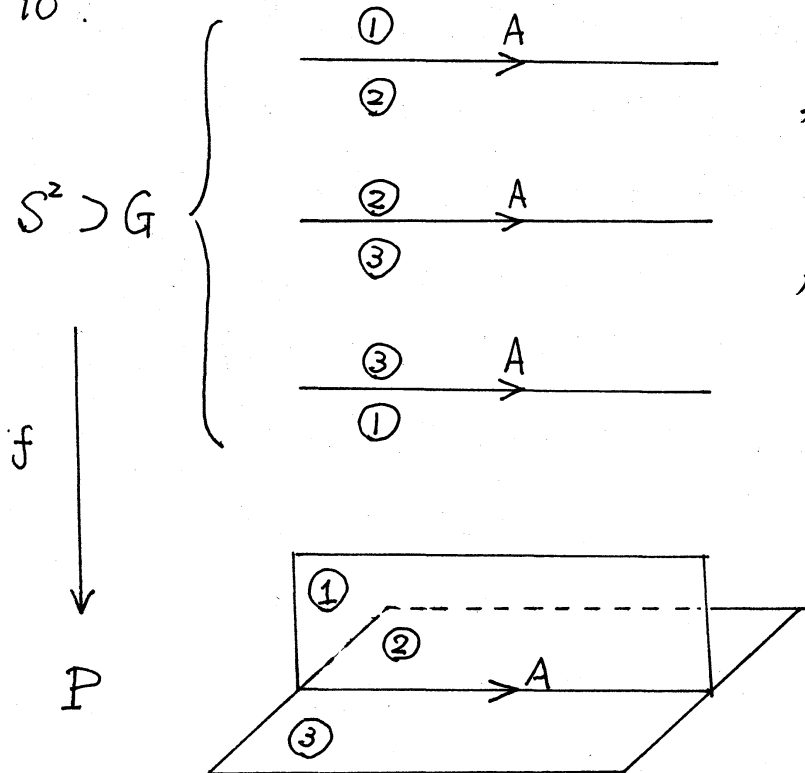
まず、 $\cup e(X)$  にある orientation  $\circ$  を与える。  $e(X)$  の

element  $a$  の orientation が  $\theta$  と一致している時には  $f(a)$ , そうでない時には  $(f(a))^{-1}$  を  $a$  に対応させる。  
 $X$  のある edge  $a$  から始めて,  $\theta$  に従って順次  $f(a)$  又は  $(f(a))^{-1}$  を並べたものを  $[X]$  で表わす。当然の事であるが, start する edge  $a$  及び  $\theta$  の選び方による差異は全て identify するものとする。

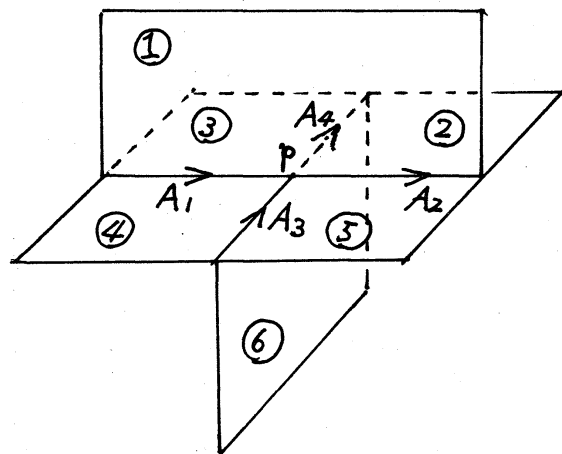
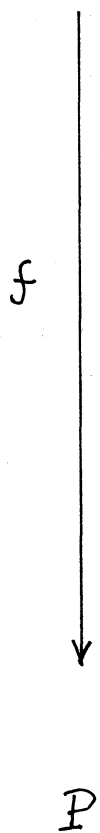
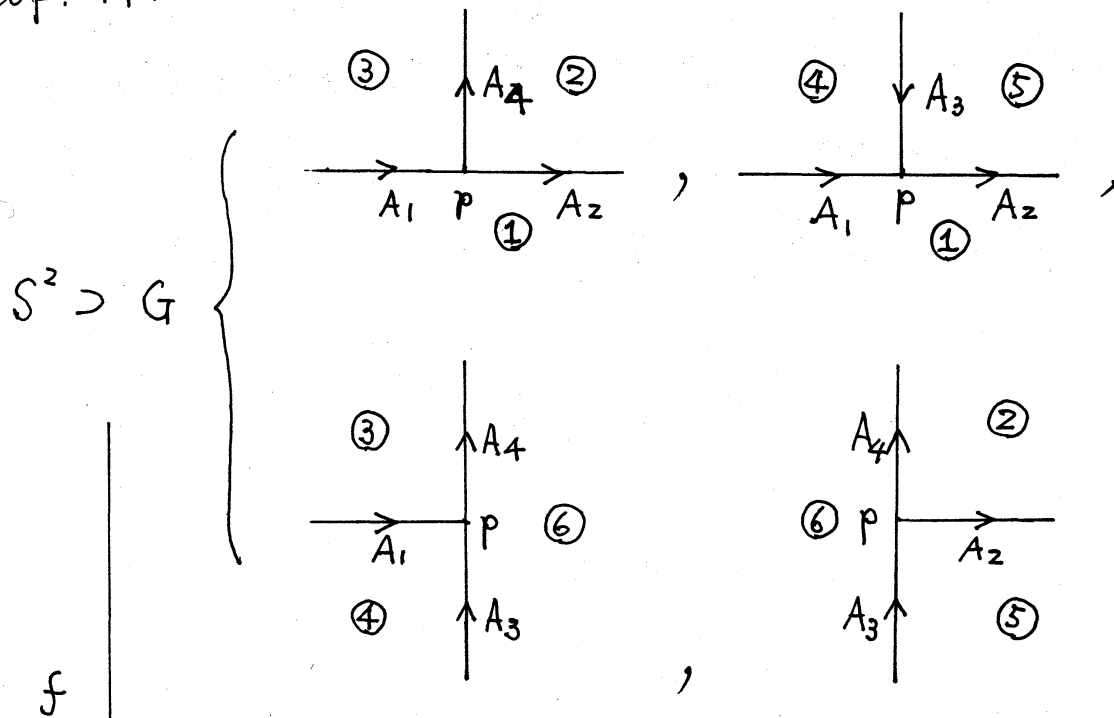
$$\text{Prop. 9. } X \sim X' \iff [X] = [X']$$

これを示すには色々と言っておく必要がある。

Prop. 10.



Prop. 11.



$G$ には、同じ名前前の頂点が丁度4個、又、同じ名前前の辺は丁度3本ある。

3.  $A$  と云う名前を持つ edge の  $(S^2, G)$  に於ける位置の問題を考える。  $S^2 - G$  の同じ名前を持つ disks を  $X^+$ ,  $X^-$ , その名前を  $[X]$  と書く。又  $\bar{X}$  は  $X$  の  $S^2$  に於ける closure を表わすものとする。

Prop. 12.  $[X] \neq AA^{-1} \dots$

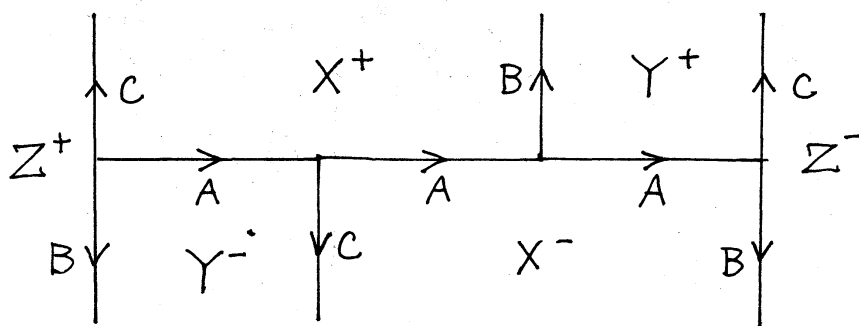
Prop. 13.  $[X] \neq A^3 \dots$

Prop. 14  $\exists X \rightarrow [X] = A^2 \dots$  又は  $[X] = A$   
 $\Leftrightarrow A$  は  $S_2(P)$  の loop.

Prop. 15.  $[X] = A^2 w$

$\Rightarrow$  (1)  $w \neq \emptyset$

(2)



orientation を調整して,  $B=C$  となる事もあるが, その場合は後述の通り完全な分類

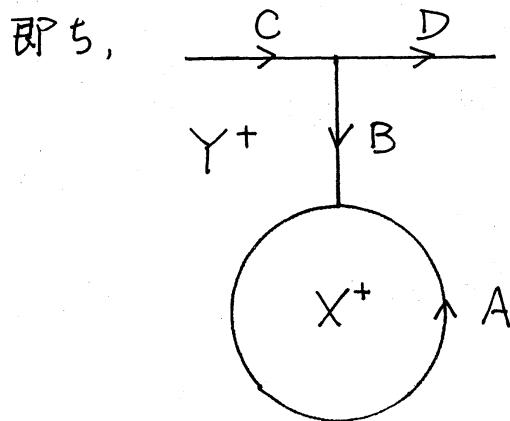


が出来る。

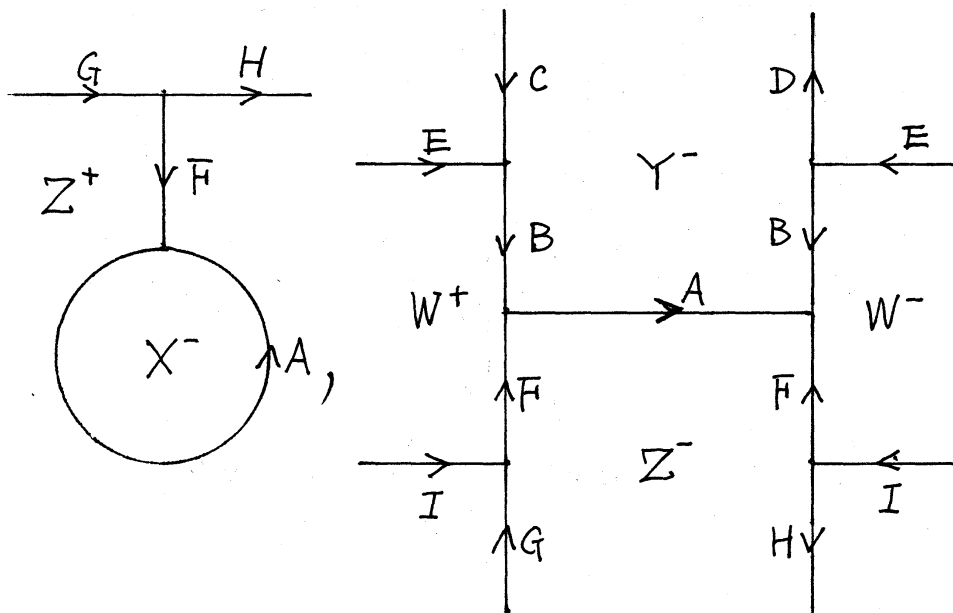
(3)  $w$ に  $A$ が現われる時  $X^+ = Y^\pm, X^- = Y^\mp$

(4)  $w$ に  $A$ が現われないう時  $X^+ \neq Y^\pm, X^- \neq Y^\mp$

Prop. 16.  $[X] = A$



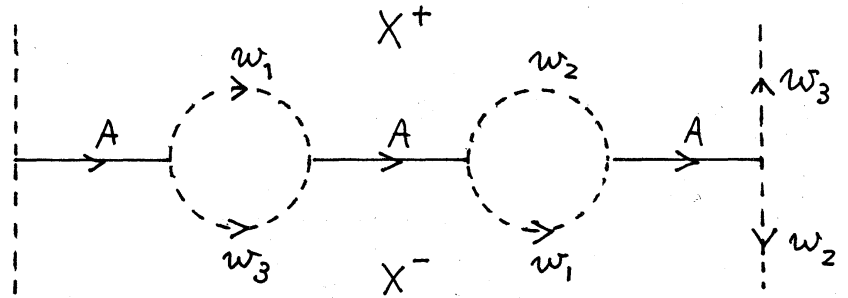
⇒



Prop. 17.  $A$  は  $[X]$  に 3 回現われて,  $[X] \neq A^2 \dots$

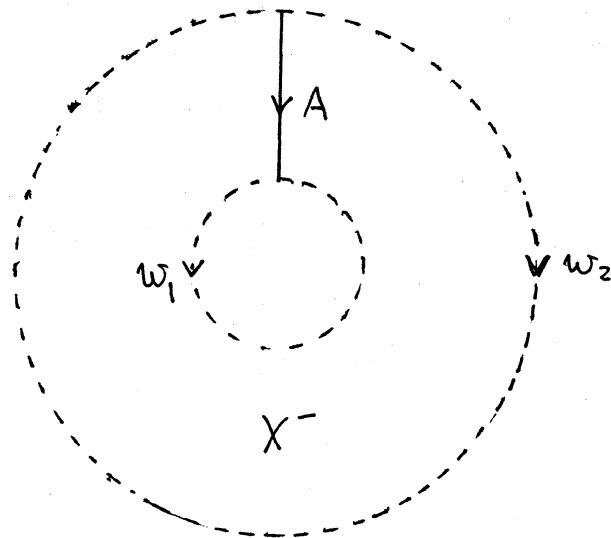
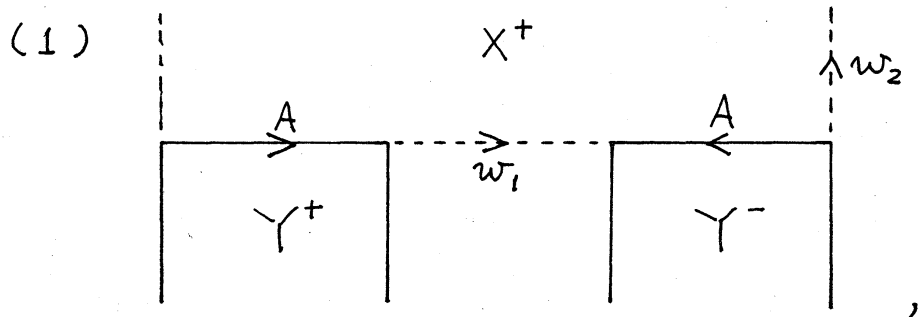
$$\Rightarrow [X] = A w_1 A w_2 A w_3, \quad w_i \neq \emptyset$$

かつ,

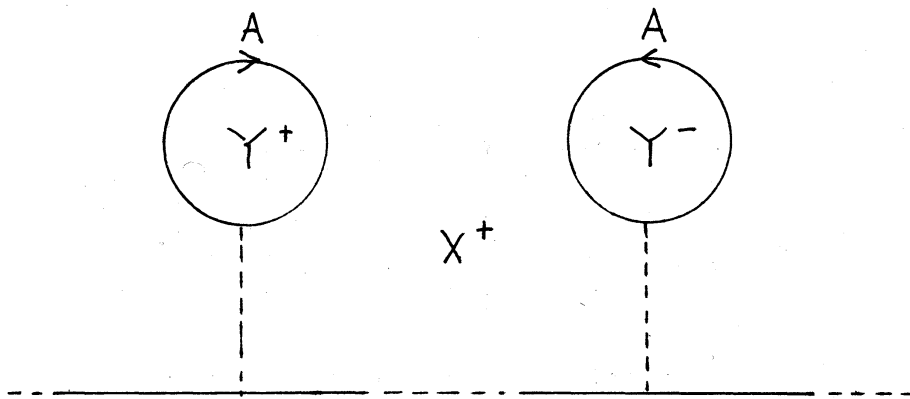


Prop. 18.  $[X] = A w_1 A^{-1} w_2$

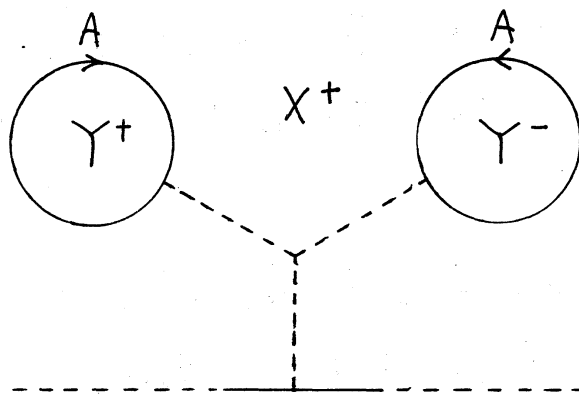
$\Rightarrow$



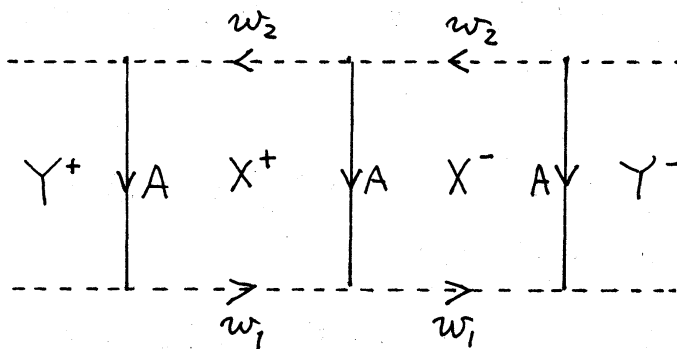
(2)  $X^-$  に於ける A の状態は (1) と同じ,



(3)  $X^-$  に於ける A の状態は (1) と同じ,

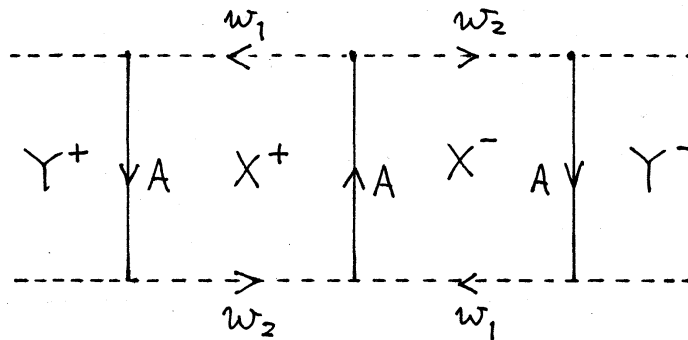


(4)



Prop. 19.  $[X] = A w_1 A w_2$ ,  $w_i \neq \emptyset$

$\Rightarrow$



Prop. 20.  $[X]$ には同じ名前の edge は 2 度現われない。

$\Leftrightarrow$  (1)  $\bar{X}^+$ ,  $\bar{X}^-$  は共に 2-ball

(2)  $\bar{X}^+ \cap \bar{X}^- = \emptyset$

Prop. 21.  $[X] = A w_1 A^{-1} w_2$  となる  $A$  が存在しない。

$\Rightarrow$   $\bar{X}^+$ ,  $\bar{X}^-$  は共に 2-ball.

次の Proposition は本当は最初の方に書くべきであった。

Prop. 22.  $\bar{X}^+ \cap \bar{X}^- \neq \emptyset$  のとき。  $A$  は  $\bar{X}^+ \cap \bar{X}^-$  に含まれる edge とする。

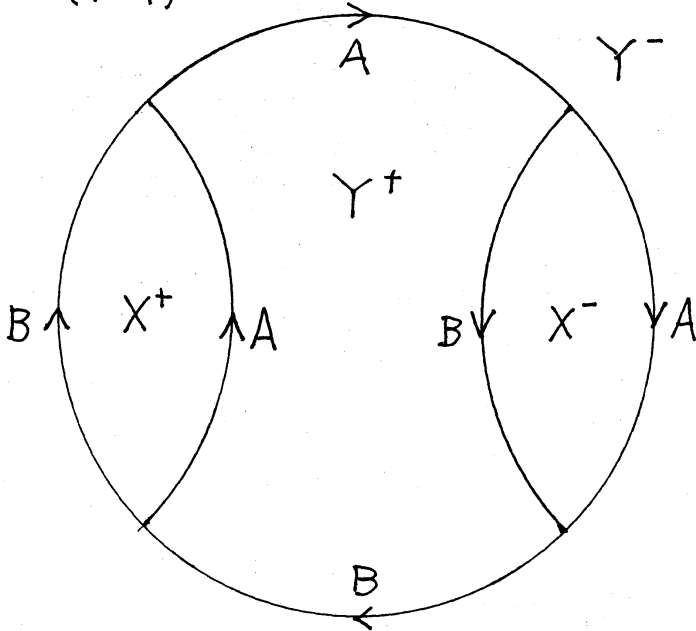
$\Rightarrow$   $A$  は  $[X]$  に 2 回以上現われる。

かつ、 $A$  が 1 度 2 本  $\bar{X}^+ \cap \bar{X}^-$  に含まれる状態は起らない。

4. 先述の通り, ここでは具体例を示す。

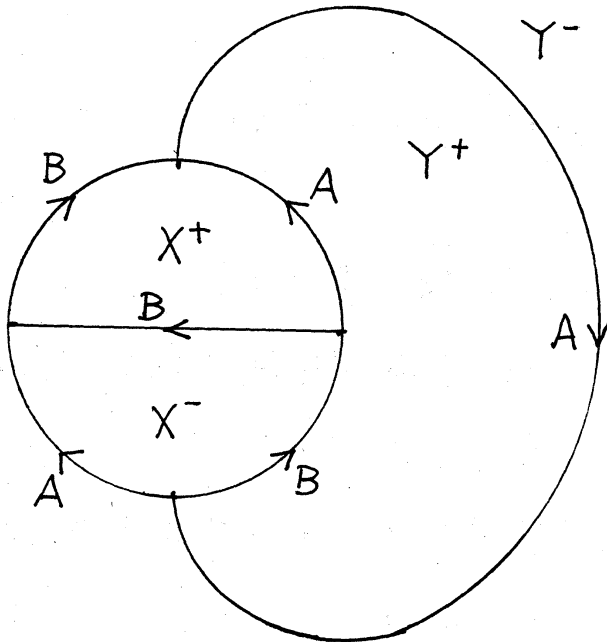
(1)  $S_3(P)$  が一点の場合,  $G$  は 4 頂点である。

(1-1)



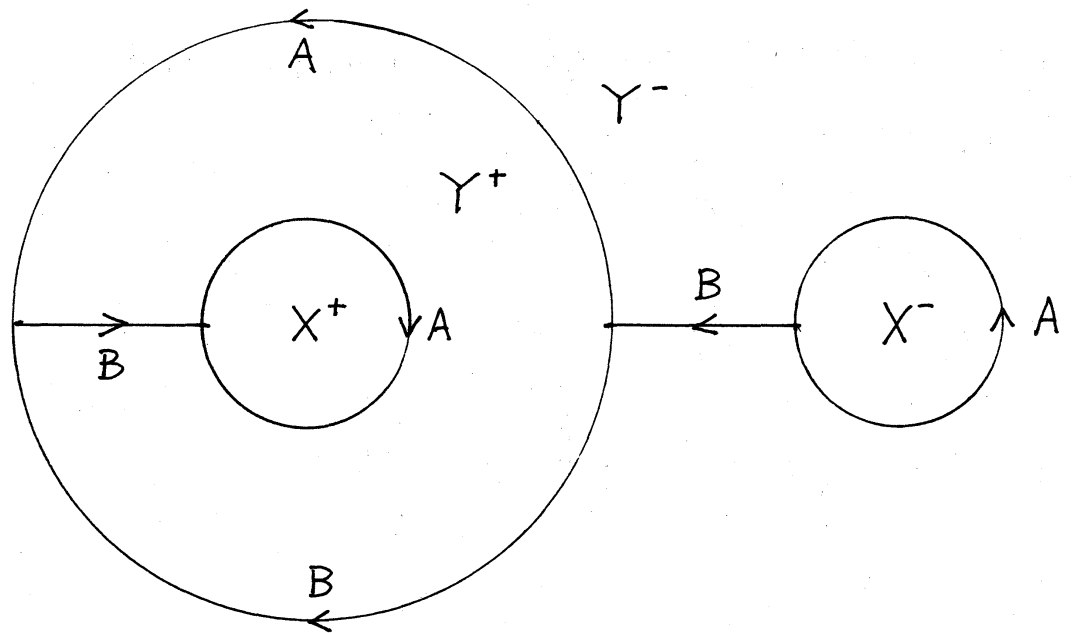
$$\pi_1 = \mathbb{Z}_4$$

(1-2)



$$\pi_1 = \mathbb{Z}_5$$

(1-3)

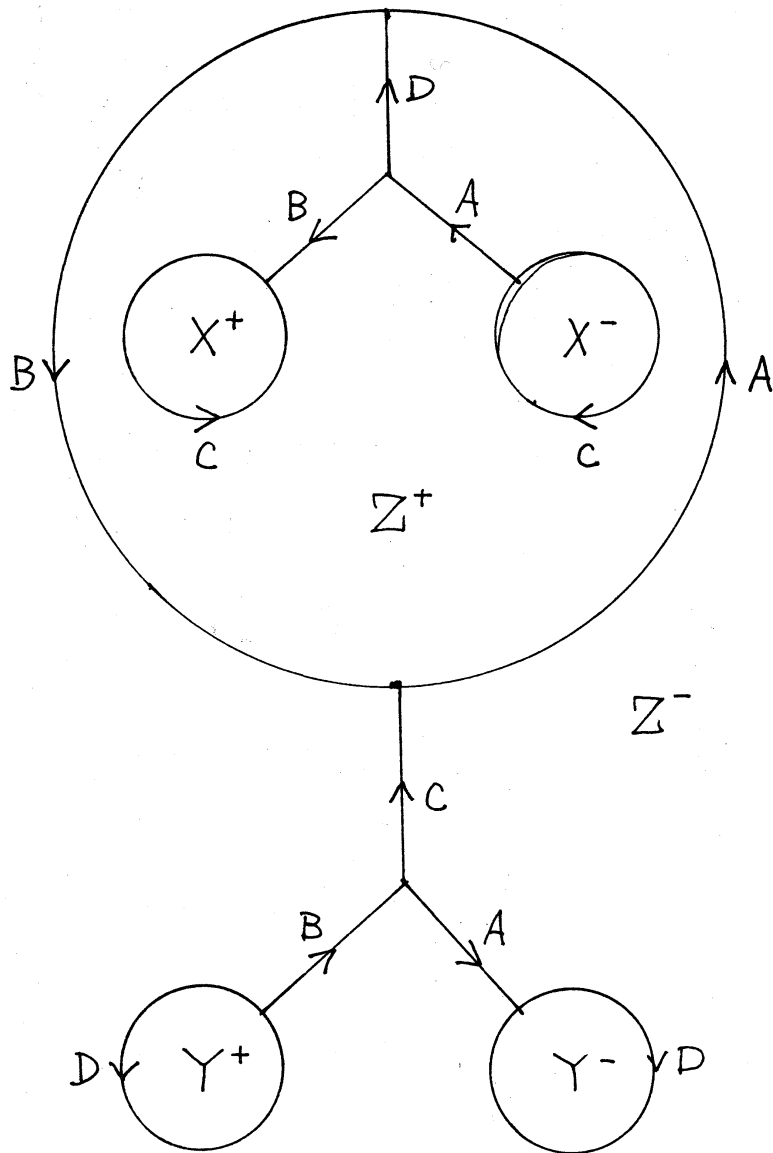


$$\pi_1 = 1$$

以上で, 4頂点 D-S graph 全てが尽されている。

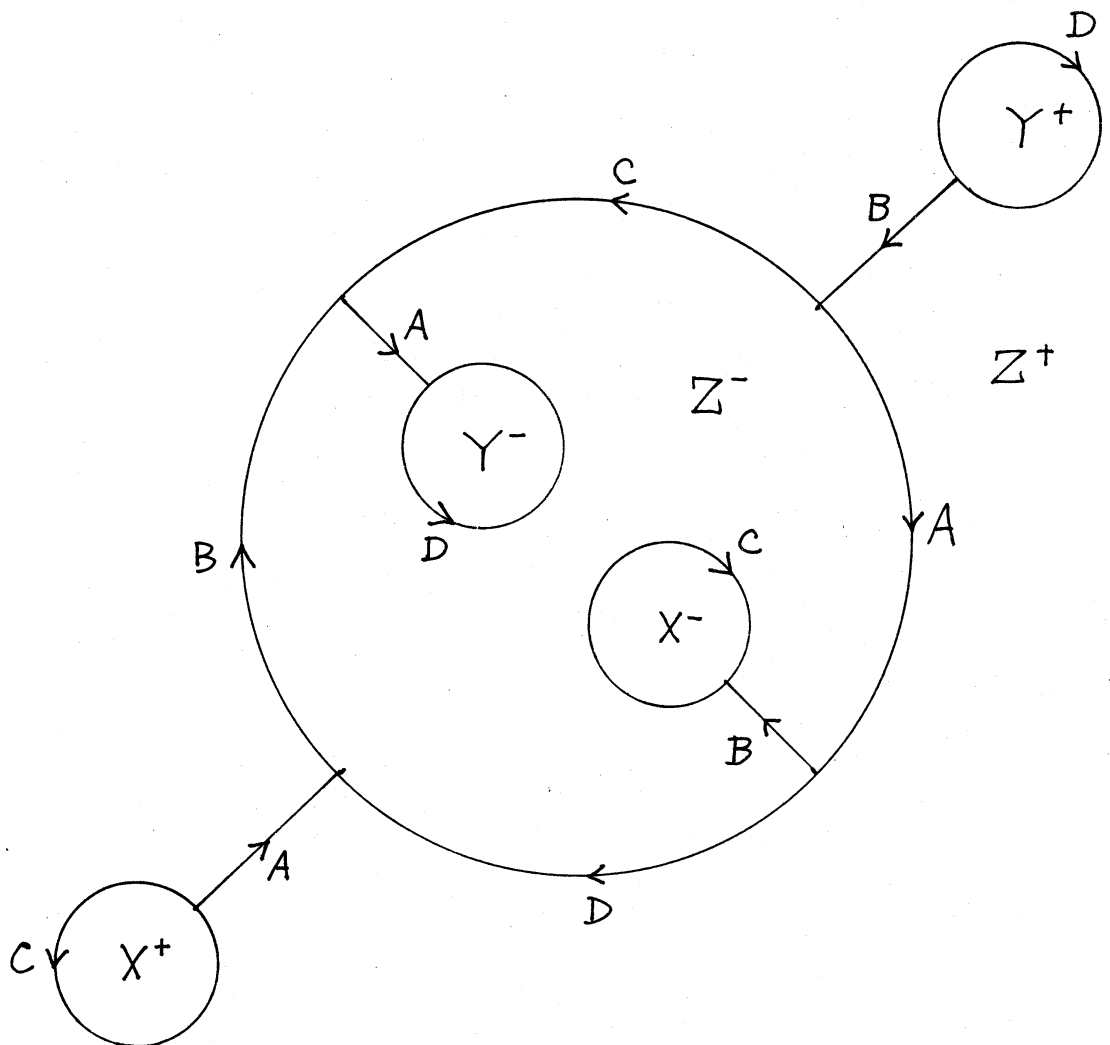
(2) 8頂点 D-S graph を全て挙げる。computer を用いて, 8頂点 3-regular graph の同型類を求め, その中から, connected planar なものを選び出す。加えて,  $S^2$  への embedding で Prop. 8. を満たすものを許容する graph のみを採用する。最後に, その embedding に対して, "名前" をうまく付ける, という作業を行なった結果である。

(2-1)



$$\pi_1 = 1$$

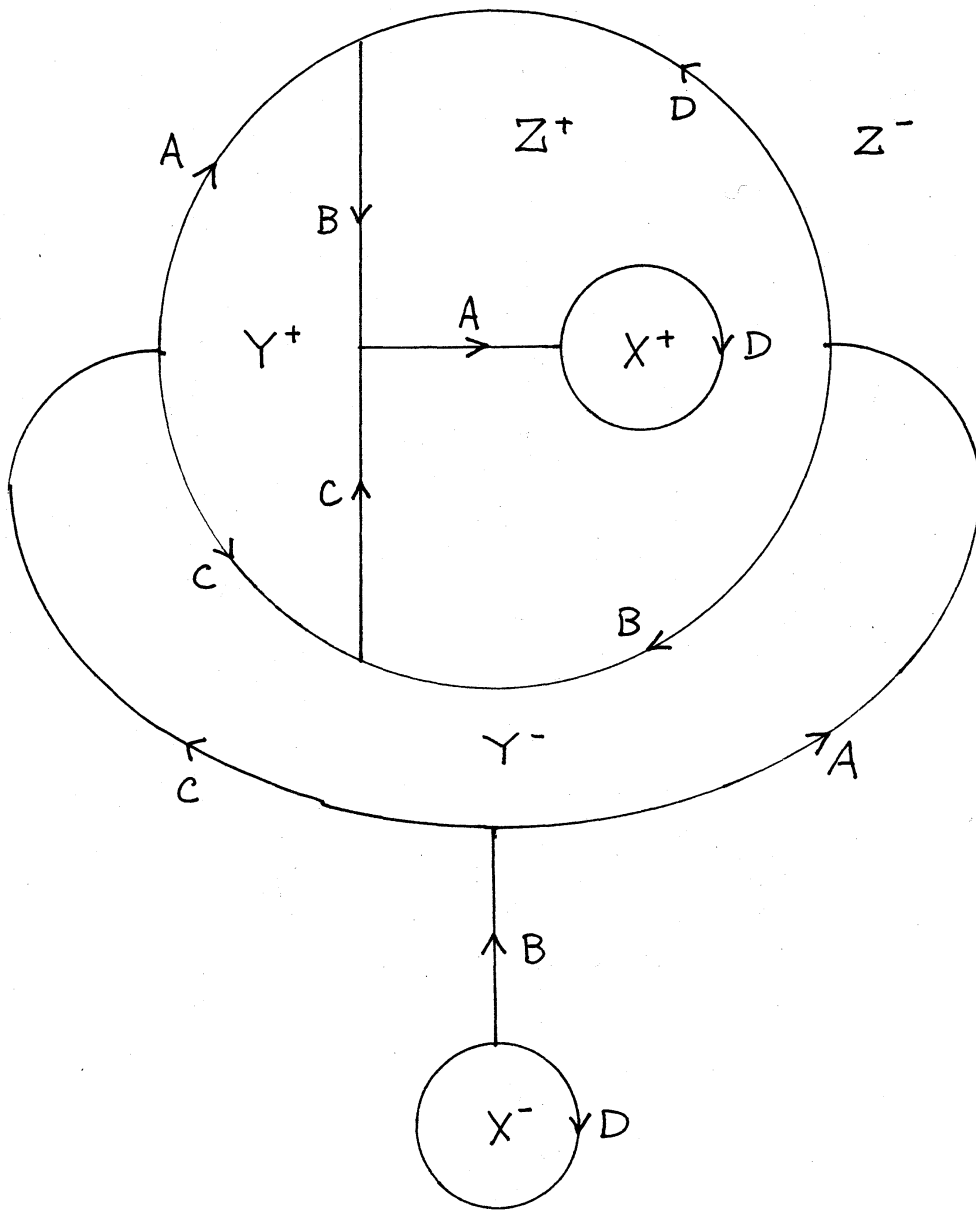
(2-2)



$$\pi_1 = 1$$

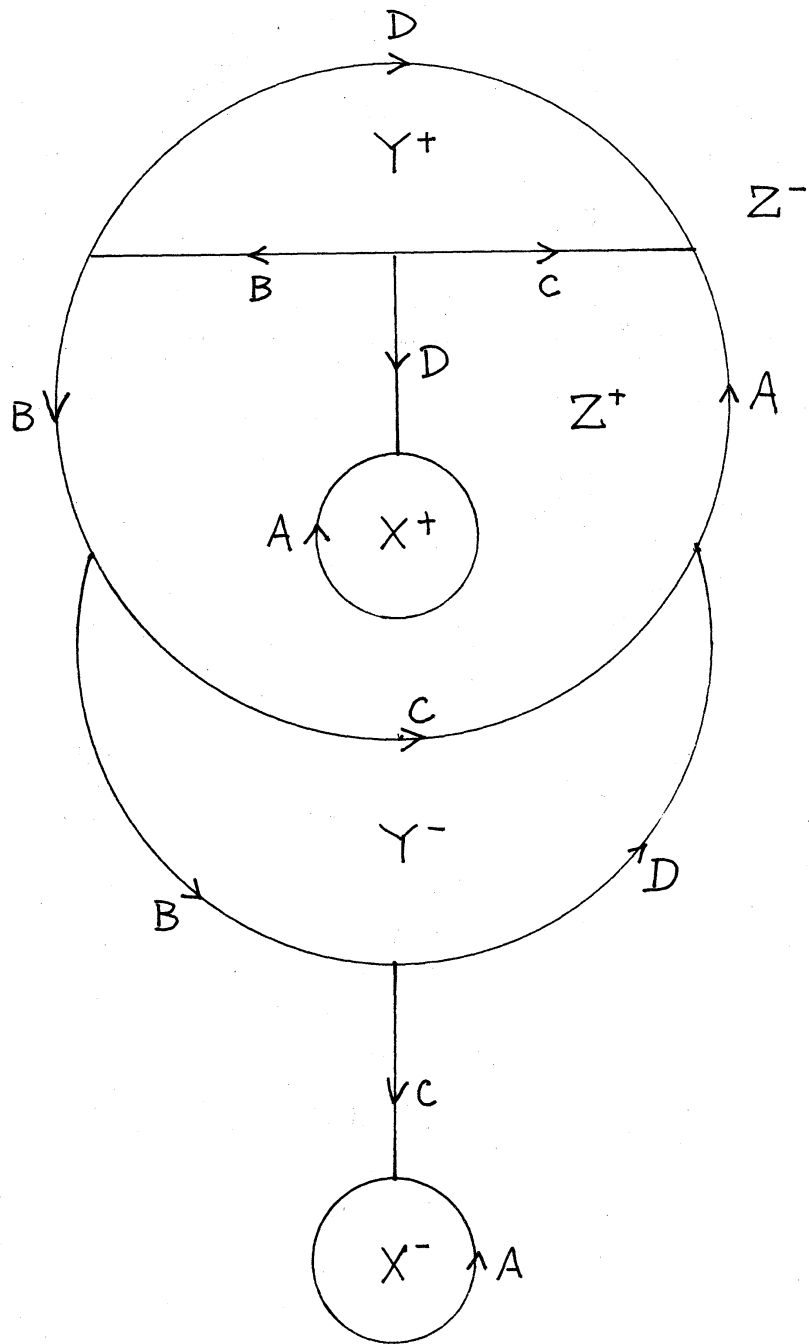


(2-3)



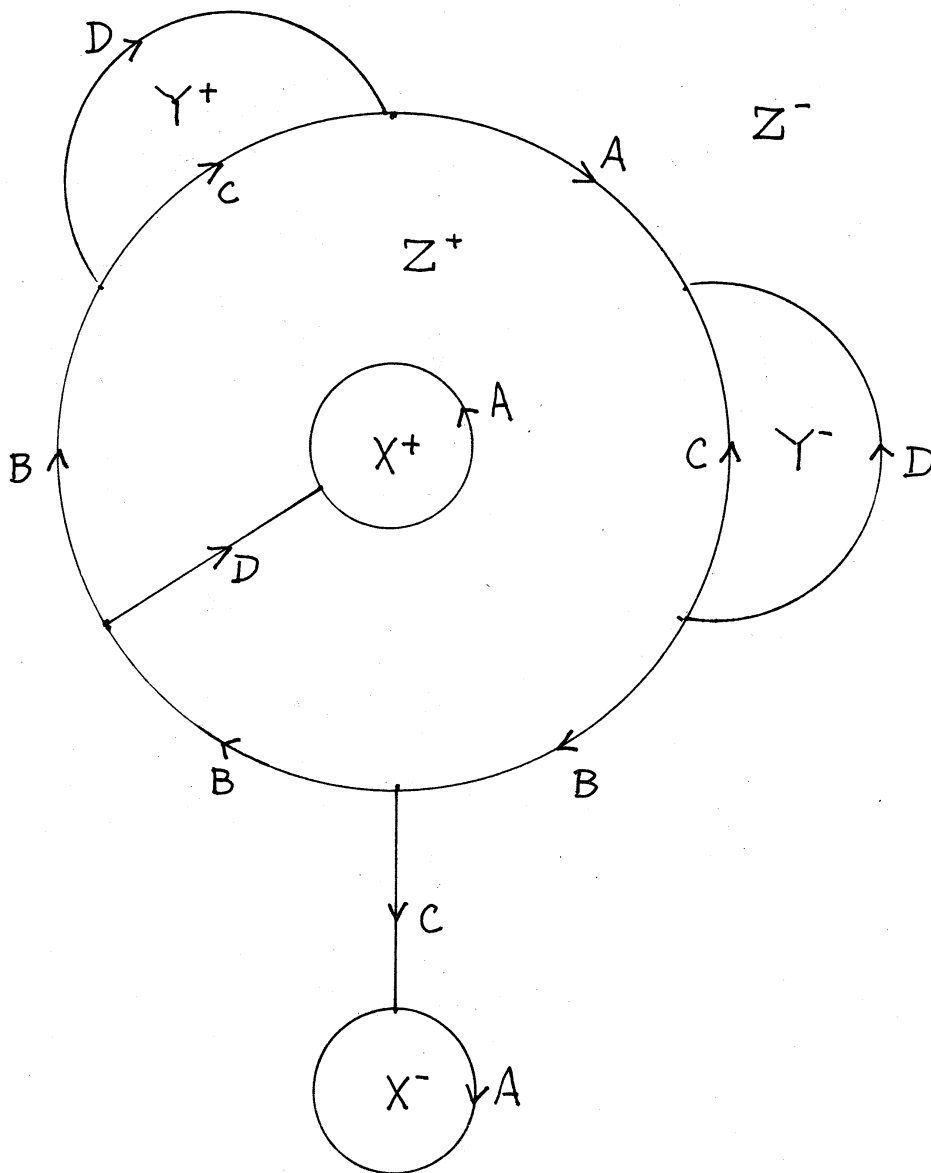
$$\tau_1 = 1$$

(2-4)



$$\pi_1 = \mathbb{Z}_2$$

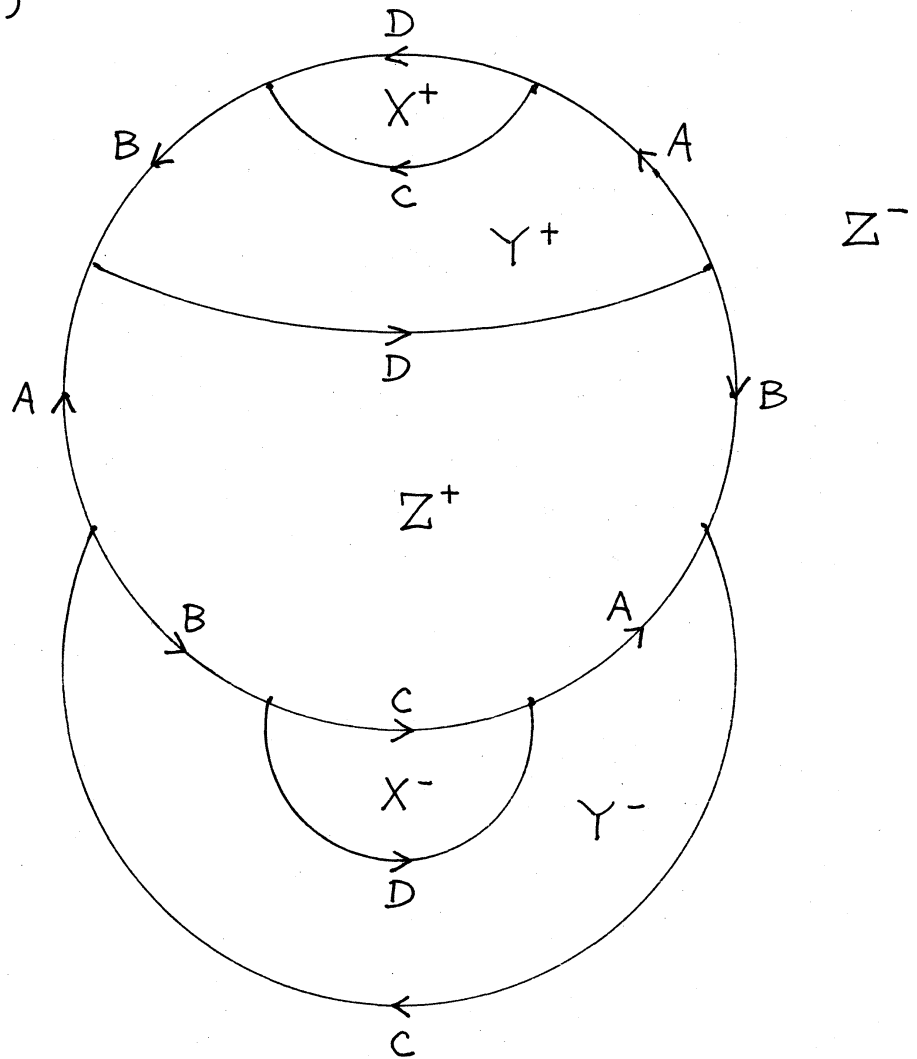
(2-5)



$$\pi_1 = \mathbb{Z}_3$$

$$H_2 = 0$$

(2-6)

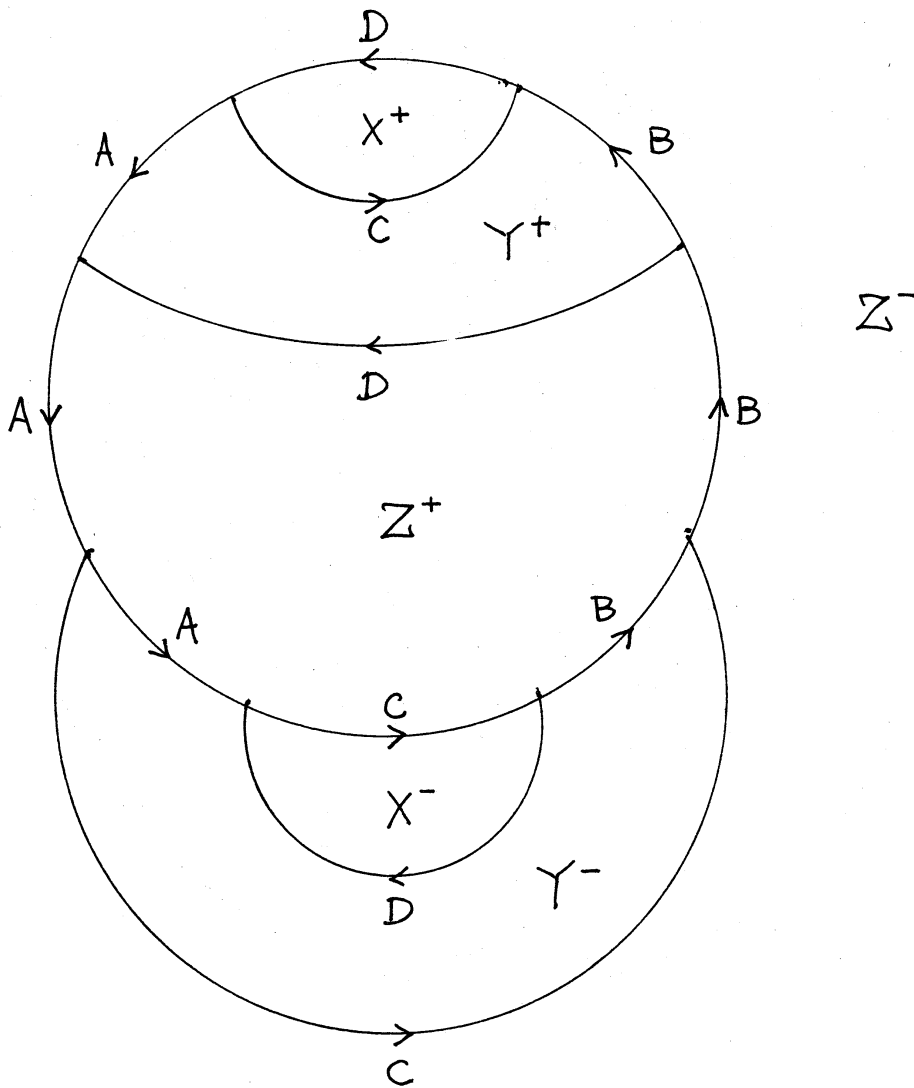


$$\pi_1 = \mathbb{Z}$$

non-orientable

$$H_2(W) = \mathbb{Z}_2$$

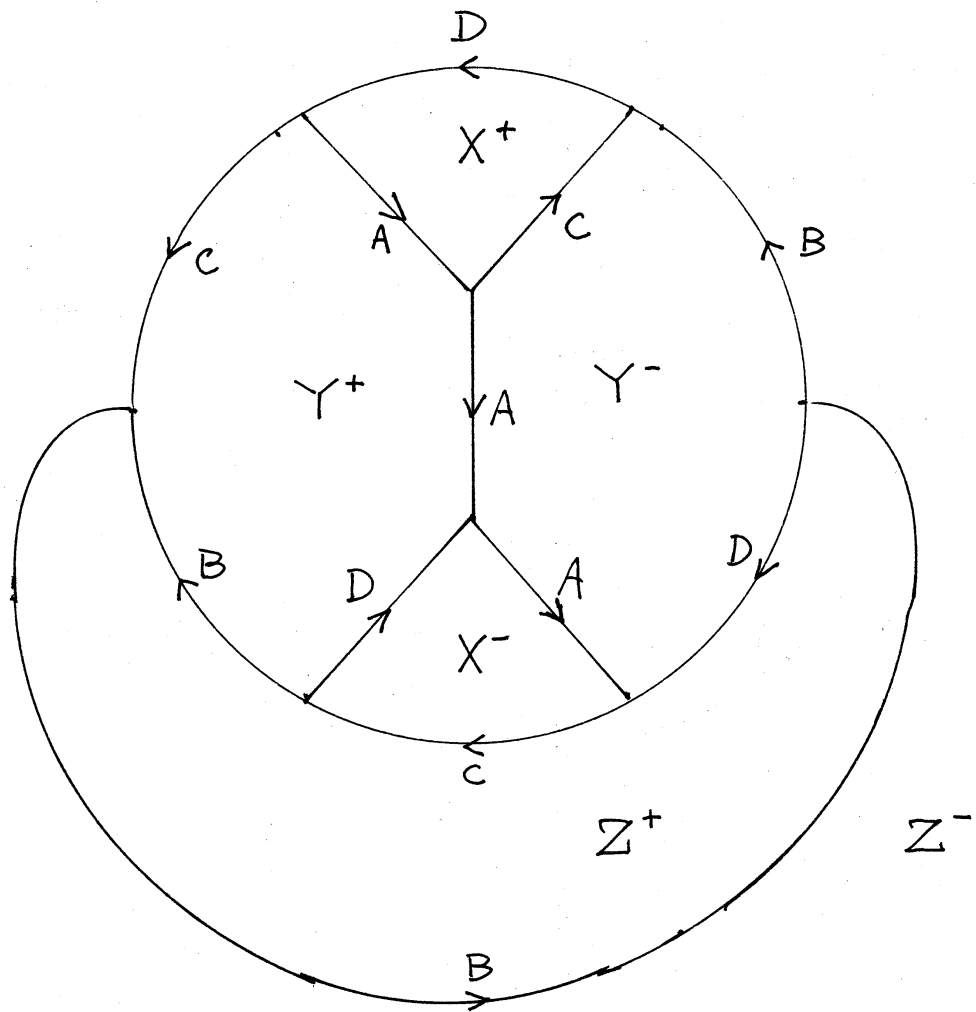
(2-7)



$$\pi_1 = \mathbb{Z}$$

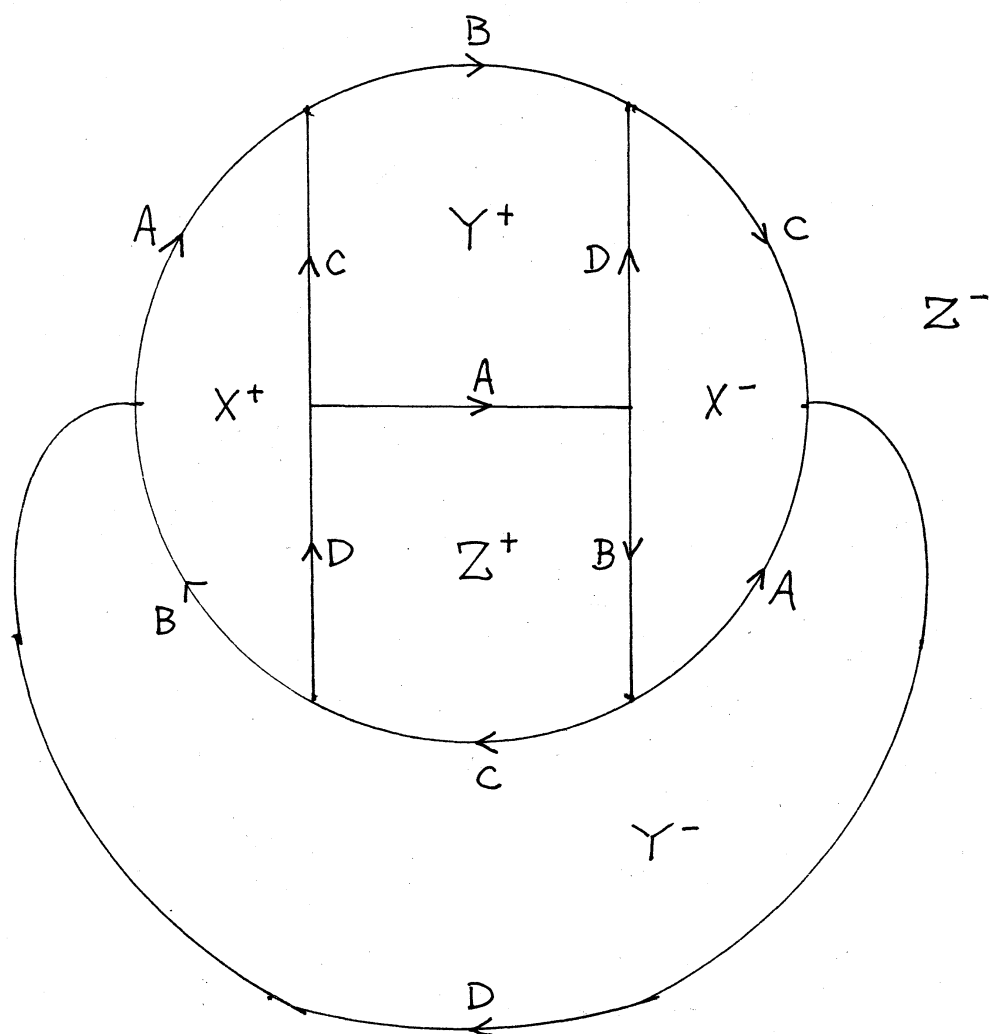
$$H_2(W) = \mathbb{Z}$$

(2-8)



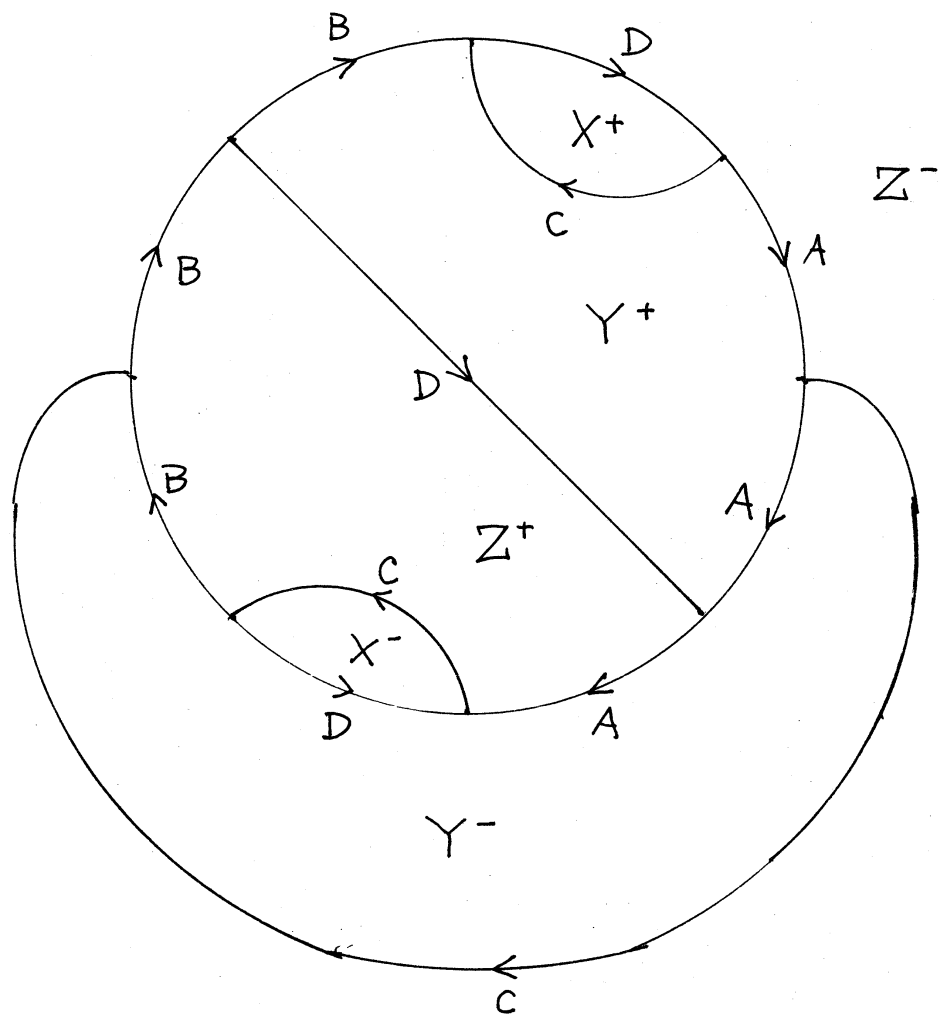
$$\pi_1 = \mathbb{Z}_7$$

(2-9)



$$\pi_1 = \{g_1, g_2; g_1 g_2 g_1 g_2^{-1}, g_2 g_1 g_2 g_1^{-1}\}$$

(2-10)



$$\pi_1 = \mathbb{Z}_3$$

$$H_2 = 0$$

(注) 3-manifold は (2-5) と homeo. 証明は  
山下, 横山両氏の手法で出来る。



以上で、8頂点  $D-S$  graphs を全て公開した。ここから先、道は幾通りもあると思われる。その中、一つのメインストリートであろうと思われる、同じ *manifold* を与える  $D-S$  graphs の相互関係については、山下正勝(東洋大・工)、横山和夫(上智大・理工)の両氏が本巻で述べている。

そろそろ紙にも見放されそうなので、昨年度の事件を記して置く。石井一平氏(慶応大・理工)による "Flow から来た spine" である。そこでもたらされる *fake surfaces* は注目に値する良質のものである。本稿との関連に限って見ても、氏の言う *normal pair* は  $D-S$  graphs と異常接近しているので、その情報を旨く引き出せば、 $D-S$  graphs を相当程度に決定してしまう可能性を秘めている。3次元多様体の標準形は *new type* の *fake surfaces* で与えられるかも知れない。石井氏の *idea* は不老不死かしら？