

3-Manifold の Normal spine と Ball covering

相模工大 津久井 康之

§0. boundary を持つ compact 3-manifold W^3 は一般に 2次元 polyhedron P^2 に collaps する。 W と P (または、 ∂W と P) の関係については池田-山下の精密な研究が進行中であるがむつかしさも、もちろん、多い [略]。一方、 closed 3-manifold M 内の disjoint な 3-ball B_1, \dots, B_k に対して $(M - \bigcup_{i=1}^k \overset{\circ}{B}_i) \searrow P^2$ なるとき、 P は M の almost-spine と呼ばれるが (Fenn-Rourke), almost spine が spine に対してどのような「良い(?)」性質を持つかはほとんど知られていない (と報告者は思う)。

この note ではこれらについて考察を進めてみる。そして、 closed 3-manifold が 球面の三角形分割を与えるグラフ (複数) とそれらのマッチングで represent されること、およびそれらの性質、 S^3 の representation の問題についての予想についてもふれてみたい。

§1. 3-Manifold の Ball covering

compact connected manifold M^n に対して M^n 内の (closed) n -ball B_i^n の set $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$ は, (1) $\bigcup B_i = M$, (2) $B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j$ は $(n-1)$ -manifold (connected を要求しない) であるとき M の ball covering と言う。 M に対して最小の k を M の covering number と言い $b(M)$ と記す。 $b(M^n) \leq n+1$, $b(M^n) = 2$ ならば $M^n = S^n$ 。 3次元では次の事が知られている。

Proposition 1. M^3 : connected closed 3-manifold

$$b(M) = 3 \iff M \cong k(S^1 \times S^2) \# \varepsilon(S^1 \times_{\tau} S^2)$$

ここで $k + \varepsilon \geq 1$, $\varepsilon = 0$ or 1 , $S^1 \times_{\tau} S^2$ は non trivial S^2 -bundle over S^1 (non orientable)。

Proposition 2. M : connected closed 3-manifold

$$1) M \cong M' \# (S^1 \times S^2), M \cong M' \# (S^1 \times_{\tau} S^2)$$

(このような M を handle free と呼ぶ)

$$2) \mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\} : \text{ball covering of } M.$$

$$3) M \cong S^3 \text{ のときは } B_i \cap B_j \neq \emptyset \ (i \neq j) \text{ を仮定する。}$$

$$\implies B_i \cap B_j = 2\text{-disks} \quad (i \neq j)$$

ball covering $\{B_1, \dots, B_k\}$ は $i \neq j$ に対して $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ のとき non-degenerate と呼ばれる。 以後, 主として handle-free な 3-manifold の non-degenerate ball covering のみについて考えることとする。

$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ を handle free closed 3-manifold M の non-degenerate ball covering とする。

- a) $B_i \cap B_j$ は disjoint な 2-disks ($i \neq j$)
 b) $B_i \cap B_j \cap B_k$ は disjoint な 1-disks (edges) ($i < j < k$)
 c) $\bigcap_{i=1}^4 B_i$ は disjoint な 0-disks (vertices).

これらの構造から \mathcal{B} は M の cell 分解を与えている。

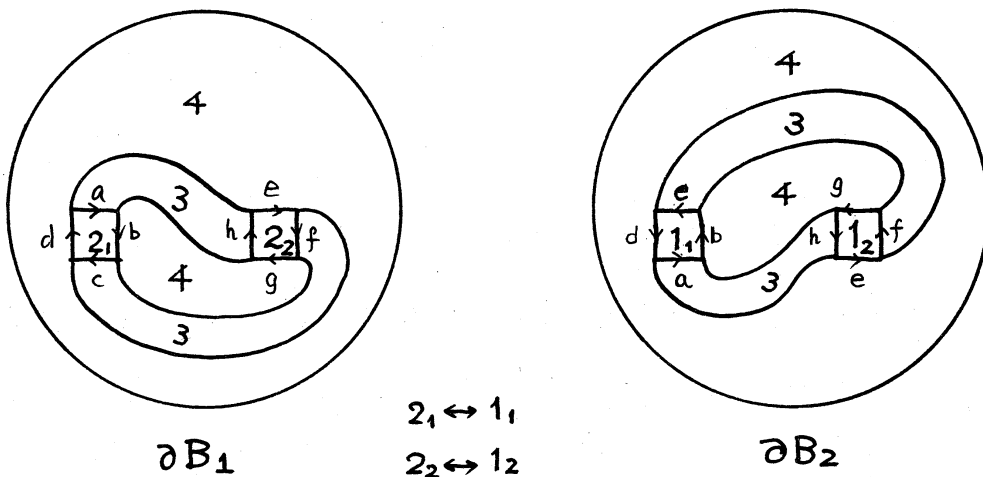
同じ記号 \mathcal{B} で M の, 上記で定まる, cell complex を表わす。

$$\deg(\mathcal{B}) = \#\mathcal{B}^{(0)} = \#\left(\bigcap_{i=1}^4 B_i\right) : \mathcal{B} \text{ の degree.}$$

$$C(\mathcal{B}) = \frac{1}{2} \sum_{i < j} \#(B_i \cap B_j) : \mathcal{B} \text{ の complexity}$$

とすると

$$\text{Proposition 3. } C(\mathcal{B}) = \sum_{j \neq i} \#(B_i \cap B_j) = \frac{1}{2} \deg(\mathcal{B}) + 2 \\ \text{for } 1 \leq i \leq 4.$$



(図 1) P^3 の表現. (B_3, B_4 省略)

§2. Almost spine

$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ を handle free 3-manifold M の non degenerate ball covering とする。

$P(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^{(2)}$: cell complex \mathcal{B} の 2-skelton.

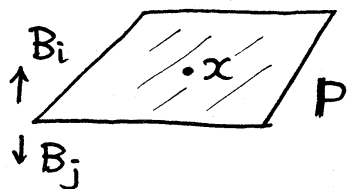
$$P(\mathcal{B}) = |P(\mathcal{B})| = \bigcup_{i=1}^4 \partial B_i$$

$x \in P$ の neighbourhood をみると,

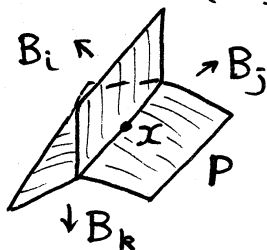
1) $x \in (B_i \cap B_j)^\circ$

2) $x \in (B_i \cap B_j \cap B_k)^\circ$
($i < j < k$)

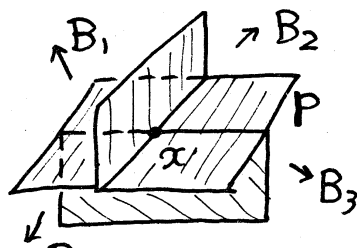
3) $x \in \bigcap_{i=1}^4 B_i$



$\mathcal{G}_1(P)$



$\mathcal{G}_2(P)$



$\mathcal{G}_3(P)$

すなわち $P(\mathcal{B})$ は M の almost spine 2 (closed) fake-surface (normal/spine) である。また $(M - \mathring{B}^3)$ の spine P' を P の sub polyhedron (sub complex) として取れることも明らか。

Remark 1. 上の考察から $k(S^1 \times S^2) \# \varepsilon(S^1 \times_\tau S^2)$ の almost spine として 3) の type の点を含まないものをとれる。

2. 上の $P(\mathcal{B})$ は S^2 の M への immersion (not in general position) の image としてとれる。

§3. Ball covering の reduction

$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ を handle free 3-manifold M の non-degenerate ball covering とする。

[operation A]

「 $B_i \cap B_j \supset \exists D^2$ component ($i \neq j$), $\#(D \cap (\bigcap_{i=1}^4 B_i)) = 2$
 $\Rightarrow \exists \mathcal{B}' : M$ の ball covering, $c(\mathcal{B}') < c(\mathcal{B})$ 」
 $i=1, j=2$ とする。

D の B_2 での regular neighbourhood を N とする。

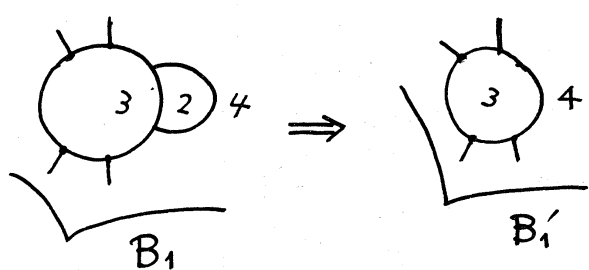
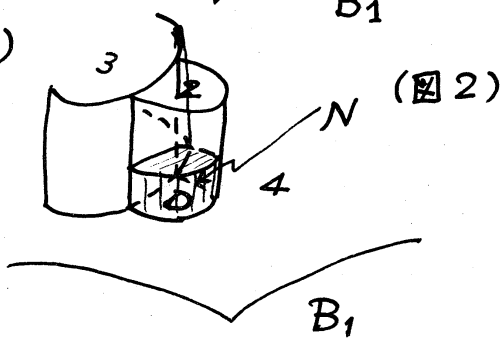
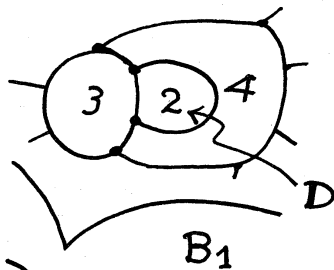
$N \cap B_k = \partial N \cap B_k : 2\text{-disk } (k \neq 2)$

$N \cap (\overline{B_2 - N}) : 2\text{-disk}$

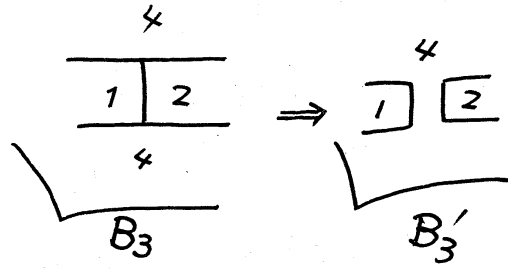
$B'_1 = B_1, B'_3 = B_3,$

$B'_4 = B_4 \cup N, B'_2 = \overline{B_2 - N}$

$\mathcal{B}' = \{B'_1, B'_2, B'_3, B'_4\}$ は明らかに M の ball covering であり $c(\mathcal{B}') = c(\mathcal{B}) - 1$.



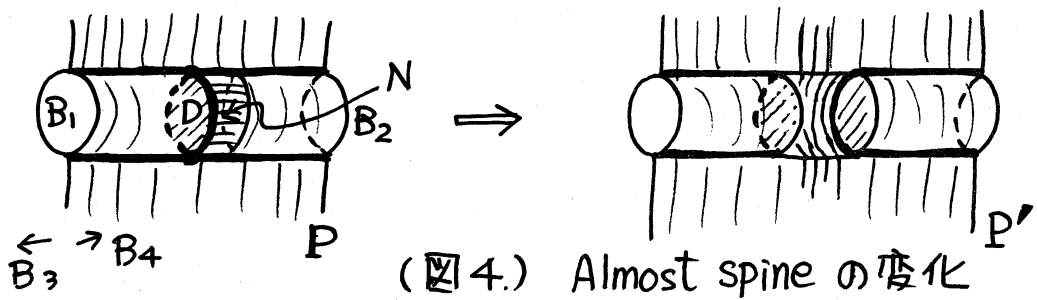
(B_2 上でも同様)



(B_4 上でも同様)

(図3) $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}'$ の変化 (operation A)

Remark 3. Operation A を Almost spine P の P' への変化として見ると, polyhedron に 3-ball N を attach して Collaps する次の図4のようなよく知られたものである。



(図4.) Almost spine の変化

[Operation B]

$\{D \mid B_i \cap B_j \supset D : \text{component}, i \neq j\} \ni D_1, D_2, D_1 \neq D_2.$

$\#(D_1 \cap D_2) \geq 2 \Rightarrow \exists B' : \text{ball covering of } M, c(B') < c(B).$

$D_1 \subset B_1 \cap B_4, D_2 \subset B_2 \cap B_4$ とする。

$D_1 \cap D_2 \supset A, B$ arcs

$(D_1 \cup D_2)^\circ \supset \ell$ simple loop τ

A と B に各 1 点 τ で交わる。

$B_4 \supset C^2 : \text{proper 2-disk } \partial C = \ell.$

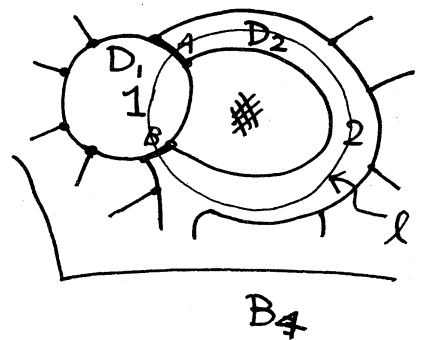
N を B_4 τ の C の regular-neighbourhood とする。

$B_{41} \cup B_{42} = \overline{B_4 - N} : \text{disjoint 3-balls.}$

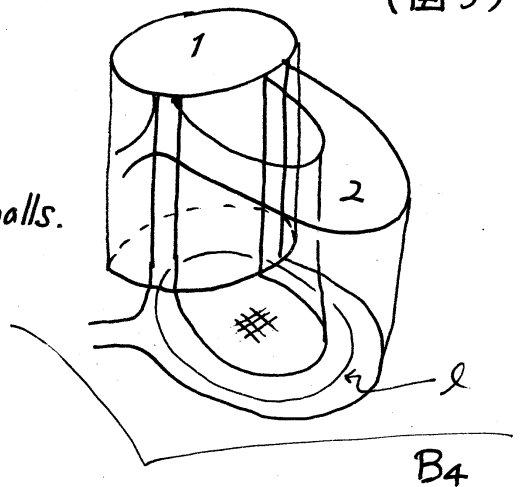
$N \cap B_i = \partial N \cap \partial B_i : 2\text{-disk } (i=1,2)$

$N \cap B_{4j} = 2\text{-disk, } (j=1,2)$

$N \cap B_3 = \emptyset$



(図5)



$B'_1 = B_1 \cup N$, $B'_2 = B_2$, $B'_3 = B_3$, $B'_4 = (B_{41} \cup B_{42})$ とすると、

$B'_i \cap B'_j = \partial B'_i \cap \partial B'_j$: 2-manifold.

$\partial B'_3 = \partial B_3$ の上での考察から $\exists \alpha \subset B'_3 \cap B'_2 \cap B'_1$ component,
 α は B_{41} と B_{42} を結ぶ。

α の $B'_3 \cup B'_2 \cup B'_1$ での
 regular neighbourhood
 を W とすると

$W \cap \overline{B'_j} - W$: 2-disk. ($j=1,2,3$)

$W \cap B_{4j}$: 2-disk ($j=1,2$)

そこで、

$B''_j = \overline{B'_j} - W$ ($j=1,2,3$)

$B''_4 = B'_4 \cup W$

$\mathcal{B}'' = \{B''_1, B''_2, B''_3, B''_4\}$ は M の

ball covering. M が handle free K^4 から

$B''_i \cap B''_j$: 2-disks. ($i \neq j$)

$\#(B'_1 \cap B'_2) = \#(B''_1 \cap B''_2) = \#(B_1 \cap B_2) - 1$

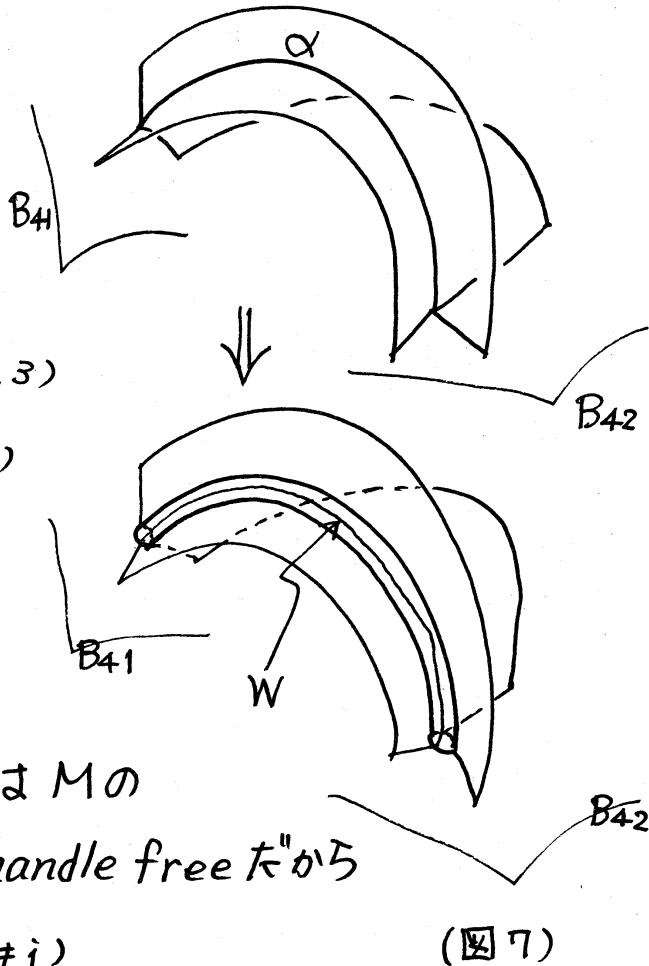
$\#(B'_1 \cap B'_3) = \#(B''_1 \cap B''_3) = \#(B_1 \cap B_3)$

$\#(B'_1 \cap B'_4) = \#(B_1 \cap B_4) + 1$

$\#(B'_2 \cap B'_3) = \#(B''_2 \cap B''_3) = \#(B_2 \cap B_3)$

$\#(B'_2 \cap B'_4) = \#(B_2 \cap B_4) + 1$, $\#(B'_3 \cap B'_4) = \#(B_3 \cap B_4)$

$\#(B''_4 \cap B''_j) = \#(B'_4 \cap B'_j) - 1$ ($j=1,2,3$).



従って、

$$\sum_{i=1}^3 \#(B'_4 \cap B'_i) = \sum_{i=1}^3 \#(B_4 \cap B_i) - 3 = \sum_{i=1}^3 \#(B_4 \cap B_i) - 1$$

$$\therefore c(B') = c(B) - 1.$$

Remark 4. operation A, B の後に ball covering B' が non degenerate は一般には保証されないが、 M が handle free で S^3 でなければ nondegenerate.

5. handle free でない manifold に対しても operation A, B は適用できる、ただ B' について $B'_i \cap B'_j$: 2-disks が保証されないだけである。

6. operation A は適用できるが operation B は適用できない例がある (次節 S^3 についてのもの)。

Proposition 4. $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ を handle free M の non degenerate ball covering とするとき、 $\forall D \subset B_i \cap B_j$ ($i \neq j$) に対して $\# \{D \cap (\bigcap_{i=1}^4 B_i)\}$ (even) ≥ 4 としてよい。

Proposition 5. \mathcal{B} を上と同じ、 $\{D \mid B_i \cap B_j \supset D \text{ component, } i \neq j\} \ni D, D' \implies D \cap D' = \begin{cases} \emptyset & \text{or} \\ \text{an arc} \end{cases}$ としてよい。

§4. 球面グラフ.

$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ を handle free M^3 の nondegenerate ball covering で Proposition 4.5 の性質を持つものとする。

$P_i = P(\mathcal{B} \mid B_i)$ で ∂B_i の cell 分割 $P_i = P(\mathcal{B} \mid B_i)$ を表わ

す。すなわち $P_i = \{C \cap \partial B_i \mid C \in \mathcal{B} \text{ (complex と } \mathcal{L}?)\}$.

このとき Proposition 4, 5 から

Proposition 6. M : handle free

$\forall \mathcal{B}'$: non-degenerate ball covering

$\Rightarrow \exists \mathcal{B}$: ball covering of M such that

1) $\#\mathcal{B} < 4$ or

2) \mathcal{B} is non degenerate with $C(\mathcal{B}) < C(\mathcal{B}')$,

G_i を P_i の dual cell 分割の 1-skelton とすると

① G_i の vertex の degree は even で ≥ 4

② G_i は ∂B_i の 三角形分割 となっている。(Simple)

Remark 7. proposition 6 の G_i は S^2 の embedding が unique である。

8. Proposition 6 と Remark 7 から S^3 でない handle free manifold は 4 つの グラフ G_i とそれらの頂点の (近傍も含めた) 対応によって表現される (グラフは 2 つだけで M が決定される)。

§5. 3-spher の ball covering

$b(S^3) = 2$ であるが、かんたんな S^3 の ball covering について見てみよう。

$$(1) S^3 = B_1^3 \cup B_2^3 \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \partial B_1 = \partial B_2$$

$$(2) S^3 = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \Rightarrow B_i \cap B_j = 2\text{-disk } i \neq j$$

(3) $S^3 = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ (degenerate な場合)

\Rightarrow (say) $B_2 \cap B_4 \cong S^1 \times I$, $B_1 \cap B_3 = \phi$.

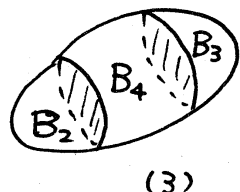
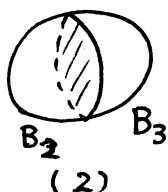
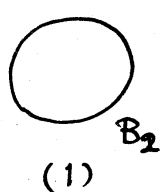
$B_2 \cap B_1 \cong B_2 \cap B_3 \cong 2\text{-disk}$
 $\cong B_4 \cap B_2 \cong B_4 \cap B_3$

(4) $S^3 = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ non-degenerate

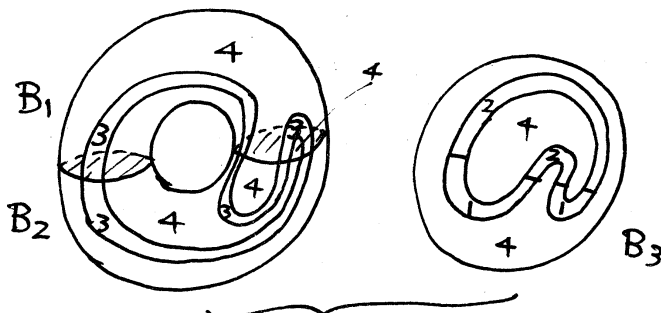
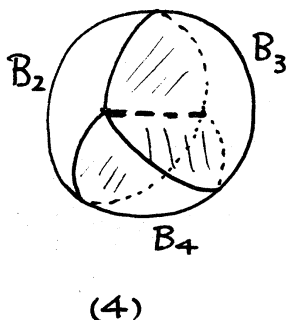
$B_i \cap B_j = 2\text{-disk}$ Operation A 可能

(5) $S^3 = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$

$B_i \cap B_j = 2$ の 2-disk operation A, B 可能



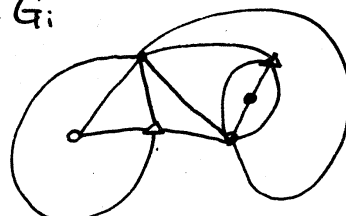
(1) ~ (5) とともに $M - B_1$ を示す



dual graph G_i



dual graph G_i



(図 8) かんたんな S^3 の ball covering

Conjecture. $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ が S^3 の non-degenerate ball covering ならば operation B (and/or A) が適用可能である。

この予想が Yes なら、これは 3-sphere の非常に分かりやすい幾何的特徴付けになり、アルゴリズムとなる。

『 S^3 以外の handle free manifold に対して 2つの ball covering \mathcal{B} と \mathcal{B}' , $c(\mathcal{B}) < c(\mathcal{B}')$, があるとき \mathcal{B} に対して operation B (or A) が適用可能であろう』という予想はかなり虫が良すぎるだろう。

問題. Proposition 6 の 球面グラフ (球面の三角形分割を与える) G_i の各頂点は三色に別分けできる。そのような球面グラフを特徴づけよ。またそのようなグラフを (全て) 構成するアルゴリズムを示せ。 $G_1 \sim G_4$ の間の関係はどのようなものか。

§6. Elementary collaps と ball covering

polyhedron P, Q について $P = Q \cup B^n$, $B^n \cap Q = B^{n-1} \subset \partial B^n$ のとき P は Q に elementally に collaps するとい

$P \searrow Q$ と記す。 P が Q に有限回の elementary collapsing で到達するときその最小回数を P から Q への e-collapsing の長さとい $lc(P, Q)$ と記す。

boundary を持つ compact connected m -manifold W^m に対

して W^n から $(n-1)$ -polyhedron (どんなものでも良い) Δ の e -collapsing の長さを $lc(W^n)$ と書く。closed connected n -manifold M^n に対しては $lc(M^n) = lc(M - \mathring{B}^n) + 1$ と定める。明らかに $lc(W^n) = 1 \Leftrightarrow W \cong B^n$

Proposition 7. $lc(W^n) = b(W^n)$.

$lc(W^n) \leq b(W^n)$ は明らか ($B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j = (n-1)$ -mfd.)

$lc(W^n) = k$ のとき $W^n \xrightarrow{e} \dots \xrightarrow{e} P^{n-1}$ とすると

$W^n = B_1^n \cup B_2^n \cup \dots \cup B_k^n \cup P^{n-1}$. W^n は n -manifold 故

$P^{n-1} \subset \bigcup_{i=1}^k B_i$. $B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j$ ($i \neq j$) は明らか。

もし $B_i \cap B_j$ に manifold でない点があるときは $B_2 \dots B_k$ の順に regular neighbourhood を用いて取り直してやれば、
 $B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j : (n-1)$ -manifold とできる。