

高木関数とその一般化について

京大理・数 畑 政義 (Masayoshi Hata)

京大理・数 山口 昌哉 (Masaya Yamaguti)

高木貞治は、1903年に、連続であったとしても微分不可能な関数の例を発表した。その様な関数の例としては、おどに Weierstrass が 1872 年に発見しているのであるが、Weierstrass の例は、lacunary Fourier 級数の形で与えられ、その微分不可能性の証明は、必らずしも安易ではない。それに反して、高木の例の方は、定義そのものが geometrical であり、その微分不可能性の証明も、いたゞ簡単であり、筆者らの知る限りにおいて、最も簡単な例の様である。

ここでは、その高木関数、あるいは、その一般化した関数の持つ、数々の興味深い性質を明らかにしていきたい。

§ 高木関数 $T(x)$.

高木貞治の与えた例というのは、次の様にして定義される。

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} p(2^n x).$$

ただし、 $p(x)$ は実軸上の周期 2 の piece-wise linear な関数で、正確には、

$$p(x) = \left| x - 2 \left[\frac{x+1}{2} \right] \right|.$$

である。 $[y]$ は実数 y の整数部分を表す記号とする。

$p(x)$ のグラフは、Fig. 1 の様

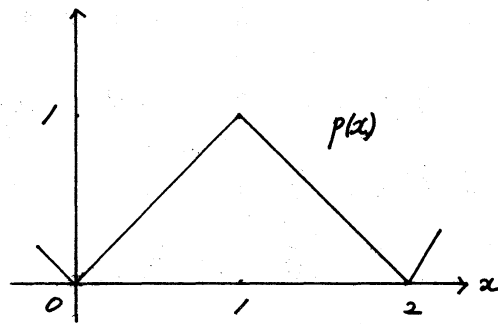


Fig. 1.

である。次に $\frac{1}{2} p(2x)$ のグラフを考えれば、それは、 $p(x)$ の周期を半分にし、かつ高さを半分にしたものであるから、

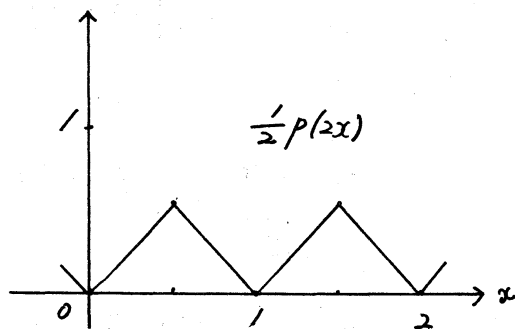


Fig. 2.

そのグラフは、Fig. 2 の様になる。この様にして、一般に関数 $\frac{1}{2^n} p(2^n x)$ は、傾き ± 1 のギガギガの関数であり、高木関数は、それらの無限個の和で表わされるものである。

高木関数のこうした簡単な構造が、 $T(x)$ のいたるところでの微分不可能性を示す際に、役立つのである。

ところで、ここを比較のために、Weierstrass の関数 $W(x)$ を考えよう。丁度 $T(x)$ に対応する Weierstrass の関数は、次の

のようたものである。

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(\pi 2^n x).$$

実際には、この関数の11E子と13の微分不可能性は、1916年、G. H. Hardyによつて示された。

12. $T(x)$ と $W(x)$ の違いは、同期関数 $p(x)$ と $\cos \pi x$ の違いのみであることがわかる。ともに、ある1つの同期関数を基本に12、それらの倍同期のものをどんどん積み重ねて出来ているという点で共通している。

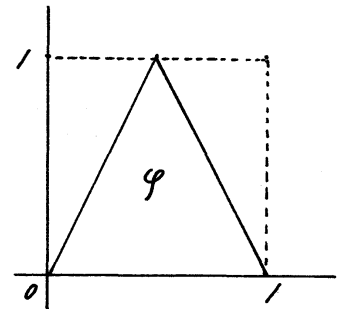
次に、見方を変えて、次の様な、簡単な一次元力学系 φ を導入しよう。

$$\varphi(x) = \left| 2x - 2 \left[x + \frac{1}{2} \right] \right|, \quad x \in [0, 1]$$

ここで、

$$\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n \text{ 個}}, \quad \varphi^0 = Id$$

と約束すれば、 $T(x)$, $W(x)$ は、この φ を用いて、次の様に表わせることがわかる。



$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi^n(x), \quad W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos \pi \varphi^n(x).$$

両者ととも、 φ は generator とある母関数の形を表わしている。

ることに注意可。 もう1つの注意として、 $W(x)$ の方は別の generator $\varphi_0(x) = 4x(1-x)$ を用い2.

$$W\left(\frac{2}{\pi} \sin^{-1} \sqrt{x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi_0^n(x)$$

と表わす。 $\varphi(x)$ と $\varphi_0(x)$ とは 位相変換の関係にあることが知られている。

de Rham は 1957 年に $T(x)$ と $W(x)$ が、ともに次の様な関数方程式の解であることを注目している。

$$F(x) - \frac{1}{2} F(2x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ただし、高木の場合は $g(x) = p(x)$, Weierstrass の場合は $g(x) = \cos \pi x$ である。 de Rham はその後、平面上の不変曲線の方に興味を移していったので、この方面での発展は見られていない。

先に導入した φ を用いれば、 $T(x)$, $W(x)$ は、ともに、次の様な関数方程式の解でもあることがわかる。

$$F(x) - \frac{1}{2} F(\varphi(x)) = g(x), \quad x \in [0, 1]$$

ただし、高木の場合は $g(x) = x$, Weierstrass の場合は $g(x) = \cos \pi x$ である。 この関数方程式については、筆者たちによる研究 [1] がある。

§ 高木関数の一般化.

前節の φ を用いて高木関数の表現に関連して、単位区間上の連続関数の部分集合 E_0 を次の様に定めようとする。

$$E_0 = \left\{ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi^n(x) ; \left. \begin{array}{l} \sum a_n \text{ は絶対収束} \\ \text{ある級数} \end{array} \right\}$$

E_0 は $[0, 1]$ の閉部分空間となる。特に、

$$\tilde{T}(x) = T(x) - x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi^n(x), \quad x \in [0, 1]$$

であるから、 E_0 は、いたるところで微分不可能な元を含んでいるし、また [1] を示すかのように、

$$x(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \varphi^n(x), \quad x \in [0, 1]$$

であるから、 x 関数も含まれている。以下、いくつかの例を用いて、歴史上、特異な連続関数の例として、この E_0 の元が、たびたび用いられてきたことがわかるであろう。

例 1. (Faber, 1907).

いかん指数の Lipschitz 条件をも満たさない連続関数の例として、Faber は、次の様な E_0 の元を与えている。

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \varphi^{n!}(x).$$

このように、この $f(x)$ に対し、次の評価が成り立つからである。

$$f(x+h) - f(x) \neq O\left(\frac{1}{|\log |h||}\right).$$

例. 2. (Kahane, 1959).

Kahane は、modulus of continuity $w(f)$ が、ある与えられた条件を満たす様な例を構成するために、次の lacunary 高不関数と名づける E_0 の元を利用している。

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n_j}} \varphi^{n_j}(x), \quad n_1 < n_2 < \dots$$

Landsberg (1908) が注意している様は、周期関数として $\varphi(x) = p(2x)$ は、次の様に Fourier 展開できる。

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k:\text{奇}} \frac{1}{k^2} \cos 2\pi k x.$$

$f \in E_0$ として、任意の $f \in E_0$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi^n(x)$ として、

$$f(x) = -\frac{4}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos 2\pi m x.$$

さらに、 $A_0 = -\frac{\pi^2}{8} \sum a_n$, $A_m = \frac{a_n}{k^2}$ ($m = 2^{n-1}k, k:\text{奇}$) である。

あると、自然に、複素高不関数たるものを定義される。

$$T_c(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m k^2} z^m, \quad m = 2^{n-1} k, \quad k: \text{奇}$$

明らかにも、 T_c は $|z| \leq 1$ に収束している。このとき、

$$\operatorname{Re} T_c(e^{2\pi i \theta}) = c_1 \tilde{T}(\theta) + c_2$$

という風に、何らかの定数 $c_1 \neq 0, c_2$ を用いて、表すことができる。 T_c が $|z| \leq 1$ に於いて、次の関数方程式を満足することがわかる。

$$T_c(z) - \frac{1}{2} T_c(z^2) = \int_0^z \frac{1}{4f} \log \frac{1+f}{1-f} df.$$

右辺は、初等関数では表すことができないことに注意しておく。

左辺は、対応する Weierstrass 関数に於いては、

$$W_c(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{2^n}, \quad |z| \leq 1$$

があり、 W_c は次の関数方程式を満足している。

$$W_c(z) - \frac{1}{2} W_c(z^2) = \frac{1}{2} z^2.$$

以上において、高不関数は、lacunary の Fourier 級数を表すことができる Weierstrass の様たるものと、本質的に異なる型の関数があることがわかるであろう。

§ 定理.

この節では、集合 E_0 ($[0,1]$ の部分 Banach 空間) についての若干の性質を述べよう。

定理 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi^n(x)$ が各点 $x \in [0,1]$ で収束し $u(x)$ とせよ。そうすれば、必然的に、 $\sum c_n$ は絶対収束あり。さらに、その時

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi^n(x) \in E_0.$$

があり、 u に無関係に正定数 K が存在して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leq K \|u\|.$$

が成り立つ。 $\|\cdot\|$ は通常の sup-norm であり。

この定理の証明は、[2] を見るとすぐ分かる。その証明の要点は、 φ の一次元力学系としての、次の著しい諸性質に、本質的に依存していることには注目して欲しい。

(i) 任意の symbol 列 $\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots) \in \{A, B\}^{\mathbb{N}}$, i.e.

$\omega_j = A \text{ or } B$ に対し、ある初期値 $x_0 \in [0,1]$ があって、各 $n \geq 0$ に対し、

$$\varphi^n(x_0) \in \omega_n.$$

が成り立つ。 $A = [0, \frac{1}{2}]$, $B = [\frac{1}{2}, 1]$ とおくと、これは同一視している。

(ii). critical 点 $x = \frac{1}{2}$ (i.e. A と B の共通点) の付近に、初期値にとれば、 A と B のいずれかの区間に、いくらでも長い時間とどま、2つ子こことが起こる。

以上の2点が、とても重要な点なのである。この定理は、次の様に一般化できる。

定理' $g(x) \in [0, 1]$ とし、次の不等式を満足するものとする。

$$(x - \frac{1}{2}) \{ g(x) - g(\frac{1}{2}) \} > 0, \quad 0 < x \neq \frac{1}{2}.$$

このとき、級数

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g(\varphi^n(x))$$

が、各点 $x \in [0, 1]$ で収束し、かつ、 $\sum c_n$ は絶対収束であり、 g のみに依存する正定数 K_g があつて、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leq K_g \|u\|.$$

が成り立つ。

この定理' の証明も、[2] を見るといふことができる。

注意. 前定理は. lacunary Fourier 級数に関する.

Sidon の定理と類似 12 の子と気付かされた方もおられたらと思う。
 実際. 定理' におい 2. $g(x) = -\cos \pi x$ とおくとよ
 2. Sidon の定理の特別の場合を証明するこゝができた。

この様に 12. E_0 の π $f(x) = \sum a_n \varphi^n(x)$ の表示における
 係数 $\{a_n\}$ と, Fourier 係数とは. 類似 12 の子と看するこゝ
 ができた。実際. Fourier 係数に関 12 は. その減少の割合
 と. その Fourier 級数の表し可関数のためらうには. 密
 接な関係があることがわかる。我々の場合におい 2 も. そ
 こに対応して次の結果がある。

定理. (Faber, 1910).

$f \in E_0$ が. ある一点で可微分 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = 0$.

この定理の Fourier 級数版は. Freud の定理がある。
 さらに. この定理の逆も 12. 次の結果が得られた。

定理. (Kono, 1983).

$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = 0 \Rightarrow f \in E_0$ の微分可能な点の集合は.
 連続濃度をもち。

最後は、 $f(x)$ の graph の Hausdorff 次元 $\text{Dim}(f)$ に関し、2 は Besicovitch-Ursell (1937) の結果がある。2. 我々の場合だと、

$$f_\delta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\delta 2^n}} \varphi^{2^n}(x), \quad 0 < \delta < 1$$

は F_0 の元 f_δ に対応し、 $\text{Dim}(f_\delta) = \frac{2}{1+\delta}$ とする。おぼろげに、いくらでも、その Hausdorff 次元が 2 に近い F_0 の元が存在するのである。したがって、その関数の graph の Hausdorff 次元が 2 である様な連続関数を構成することはできる。また、もっと簡単な F_0 の元、

$$f_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \varphi^n(x), \quad 0 < s < 1$$

に対応し、 $\text{Dim}(f_s) = 2 - \log_2 \frac{1}{s}$ とする。予想より難しいかも知れない。その証明は、なかなか難しく、まだ出来ていない。

§ 差分方程式と関数方程式

関数方程式について、これまでにも、何回か登場している。もともと F_0 を考えよう、がすとは、 F_1 の時、次の様な、差分方程式系を考えたからである。

$$(*) \begin{cases} u\left(\frac{i}{2^{n-1}}\right) + u\left(\frac{i+1}{2^{n-1}}\right) - 2u\left(\frac{2i+1}{2^n}\right) = c_n, & 0 \leq i \leq 2^{n-1}-1, \quad n \geq 1. \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

結論から言えば、この無限個の差分方程式系(*)が、連続解を持つための必要十分条件は、

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$$

である。この証明は、前節の最初の定理と、それから、連続関数に対して Schauder 展開を用いて行われる。

まず、解が存在するならば、一意であることも、簡単に分かる。例として、 $c_n = -2 \cdot \frac{1}{2^n}$ があれば $u(x) = \tilde{T}(x)$ 、また、

$c_n = -2 \cdot \frac{1}{4^n}$ があれば $u(x) = \alpha(1-x)$ が解の一つである。

この差分方程式(4)は、central 差分の型であることに注意しておくと、(4)は、2. あるいは意味が(4)は、Poisson 方程式 $\Delta u = \text{定数}$ の差分化仕の式である。特に、丁度、

$c_n = -2 \cdot \frac{1}{4^n}$ の時は、この差分方程式は、微分方程式 $\Delta u = -2$ と同値と見、2. Dirichlet 条件を満たす。だから、解 $\alpha(1-x)$ が現われるという具合である。

差分方程式(4)を次の表形(2) 次の差分方程式系(**)を考へよう。

$$(**) \begin{cases} u\left(\frac{2i+1}{2^n}\right) = (1-\alpha)u\left(\frac{i}{2^{n-1}}\right) + \alpha u\left(\frac{i+1}{2^{n-1}}\right), & 0 \leq i \leq 2^{n-1}-1, n \geq 1 \\ u(0)=0, \quad u(1)=1 & (\alpha \text{ は定数}). \end{cases}$$

これは、丁度、微分方程式との対応に言えば、 $\Delta u =$ 初流項 $\frac{dy}{dx}$ の付いた方程式の差分化に対応していると考えられる。

この無限個の差分方程式 (**) が一意の連続解を持つための必要十分条件は、 $0 < \alpha < 1$ である。特に $\alpha = \frac{1}{2}$ のときは、丁度、central 差分の場合である。当然のことだが、 $u(x) = x$ が存在する。実は、これは、例外的な場合であり、 $\alpha \neq \frac{1}{2}$, $0 < \alpha < 1$ であるならば、解 $u(x)$ は、特異関数になっているのである。

また、問題 (**) は、次の de Rham の関数方程式と同値であることが示される。

$$\begin{cases} U(x) = \alpha U(2x) & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ U(x) = (1-\alpha)U(2x-1) + \alpha & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

de Rham 自身は、上の関数方程式は、平面上の不変曲線の研究として導入しているが、彼の結果は、次の通りである。

定理 (de Rham, 1957).

$0 < \alpha < 1$ ならば, 上述の関数方程式は, 一意の連続解 $v_\alpha(x)$ を持ち, しかも, v_α は, 狭義単調増加で, $\alpha \neq \frac{1}{2}$ ならば, $v'_\alpha(x) = 0$ a.e. かつ v_α は, Lebesgue の意味の, 特異関数である。

上定理の関数 v_α は, $\alpha < \frac{1}{2}$ ならば, 不公平な貨幣投げの分布関数と一致する。また, フラフフル分布 (de Wijs) を説明するのに用いられる。

これらの差分方程式 (*), (**), (***) を通して, 我々は, 次の高木関数と, Lebesgue の特異関数とのつながりを見ることが出来る。

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} v_\alpha(x) \Big|_{\alpha=\frac{1}{2}} = \tilde{T}(x).$$

この関数 v_α については, 最初に特異関数として報告したのは, Salem (1945) がある。Salem は, 彼の論文の中で, 次の様な方程式を考察する。(本当は, geometrical 方法によるのだが, 本質的に同じものがある。)

$$(***) \left\{ \begin{array}{l} u\left(\frac{2i+1}{2^n}\right) = (1-d_n) u\left(\frac{i}{2^{n-1}}\right) + d_n u\left(\frac{i+1}{2^{n-1}}\right), 0 \leq i \leq 2^{n-1}-1, n \geq 1. \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1 \end{array} \right.$$

方程式 (***) に関する Salem の結果は次の通りである。

定理 (Salem).

$0 < d_n < 1$, かつ $\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^n \left\{ \frac{1}{2} + \left| d_n - \frac{1}{2} \right| \right\} < \infty$ であるならば,

方程式 (***) を満たす連続一意解 $u(x)$ が存在し、狭義単調増加である。かつこのとき,

$$u'(x) = 0 \text{ a.e.} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (1 - 2d_n)^2 = \infty.$$

§ おおひ.

以上の様にして、高木関数について、それに関連して、色々と面白い事実が見えてきた。高木関数を、1つのフタフタした現象を説明する際の道具として考えらるべきのは、いかほどかと思ふ。11, 13 と考えれば次第である。

なお、本文中に関連のある文献については、[1], [2] の References に詳しく載せている。それらを参照していただきたい。

参考文献

- [1]. Weierstrass's function and Chaos; Yamaguti-Hata, Hokkaido M. J. 12(1983), 333-342.
- [2]. The Takagi Function and its Generalization; Hata-Yamaguti, JJAM. 1(1984).