数理解析研究所講究録
528 巻 1984 年 203-220

終端等式制約のある最適制御問題の数値解法

阪大基礎工　進藤裕司 (Yuji Shindo)

1。 はじめに

終端等式制約のある最適制御問題に対して，種々の数値解法が提案されてきた。 特に，Hestenes[1]，Rupp[2]，Glad[3]，Nahra[4] らは，乗数法[5]を用い，制約付きの問題を制約無しの問題に変換することにより，制約条件を直接取り扱うことの困難を回避している。 しかしながらこれらの数値解法は，いずれも，汎関数の最小化を必要とするという点で実用的ではなかった。 本報告では，汎関数の最小化を必要としない単純なアルゴリズムを提案し，あわせて，近似解の収束証明を行なう。

2。 問題と予備的な結果

問題 2.1.　$u(t) \in R^m$ を制御ベクトル，$x(t) \in R^n$ を状態ベクトルとし，$[t_0, t_1]$ を固定された時間区間とする。 D_1，D_2 をそれぞれ，$R^n \times R^m \times R^1$，$R^n$ の開領域とし，関数

$f: D_1 \to R^n$, $f_0: D_1 \to R^1$, $g: D_2 \to R^r$ $(r \leqq n)$, $\theta: D_2 \to R^1$ が与えられているとする。微分方程式

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \qquad (1)$$
$$t \in [t_0, t_1]$$

および終端等式制約条件

$$g(x(t_1)) = 0 \qquad (2)$$

のもとで，汎関数

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)\, dt + \theta(x(t_1)) \qquad (3)$$

を最小にする制御関数 $u(t)$ を求める。

以下のことを仮定する。

(i) 最適制御 $u^*(t)$，最適軌道 $x^*(t)$ （すなわち問題2.1の解）が存在し，$x^*(t_1) \in D_2$ かつ，すべての $t \in [t_0, t_1]$ に対して $(x^*(t), u^*(t), t) \in D_1$ 。

(ii) 関数 f, f_0 は領域 D_1 において，すべての変数について2回連続偏微分可能であり，2次の偏導関数は D_1 で Lipschitz 連続。

(iii) 関数 g, θ は領域 D_2 において2回連続偏微分可能であり，2次の偏導関数は D_2 で Lipschitz 連続。さらに，D_2 において行列 g_x は最大階数 r をもつ。

次の定理はよく知られている。

定理2.1.[6)] $\lambda_0 \in R^1$, $\lambda \in R^n$ とし,

$$H(x, u, \lambda_0, \lambda, t) = \lambda_0 f_0(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)$$

と定義する。 最適制御 $u^*(t)$, 最適軌道 $x^*(t)$ とともに, 定数 λ_0^*, n 次元ベクトル値関数 $\lambda^*(t)$, および r 次元ベクトル ν^* が存在し, すべての $t \in [t_0, t_1]$ に対して $(\lambda_0^*, \lambda^*(t)) \neq 0$ かつ, 以下の条件が満足される。

(i) (乗数則)

$$\dot{x}^* = f(x^*, u^*, t), \quad x^*(t_0) = x_0, \quad g(x^*(t_1)) = 0,$$

$$-\dot{\lambda}^* = H_x^T(x^*, u^*, \lambda_0^*, \lambda^*, t),$$

$$\lambda^*(t_1) = \lambda_0^* \theta_x^T(x^*(t_1)) + g_x^T(x^*(t_1))\nu^*,$$

$$H_u(x^*, u^*, \lambda_0^*, \lambda^*, t) = 0, \quad {}^\forall t \in [t_0, t_1].$$

(ii) (Clebschの条件) すべての $t \in [t_0, t_1]$ に対して,

$$H_{uu}(x^*, u^*, \lambda_0^*, \lambda^*, t) \geqq 0.$$

(iii) (第2変分の非負定性) 微分方程式および境界条件

$$\dot{\eta} = f_x \eta + f_u \xi, \quad \eta(t_0) = 0, \quad g_x(x^*(t_1))\eta(t_1) = 0 \qquad (4)$$

を満足するすべての $\eta(t)$, $\xi(t)$ に対して,

$$J_2(\eta, \xi) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \{\eta^T H_{xx} \eta + 2\eta^T H_{xu} \xi + \xi^T H_{uu} \xi\} dt$$

$$+ \frac{1}{2}\eta^T(t_1) G_{xx}(x^*(t_1), \lambda_0^*, \nu^*)\eta(t_1) \geqq 0 \qquad (5)$$

が成立する。ここに,

$$G(x, \lambda_0, \nu) = \lambda_0 \theta(x) + \nu^T g(x)$$

であり，(4),(5) において，関数 f_x, f_u, H_{xx}, H_{xu}, H_{uu} は $x^*(t)$, $u^*(t)$, λ_0^*, $\lambda^*(t)$ における値をとる。

次のことを仮定する。

<u>仮定2.1.</u> 定理2.1の条件に加えて，次の条件が成立する。

(i)′ $\lambda_0^*=1$, $\lambda^*(t)$, ν^* の型をした乗数が存在する。

(ii)′ (強い Clebsch の条件) すべての $t\in[t_0, t_1]$ に対して，

$$H_{uu}(x^*, u^*, \lambda_0^*, \lambda^*, t) > 0 .$$

(iii)′ (第2変分の正定性) 定理2.1の条件 (iii) において，$\|\xi\|_{L^2} > 0$ ならば，$J_2(\eta, \xi) > 0$ 。

仮定2.1は解の十分条件を与えることが知られている。[7] $\lambda_0^*=1$ なので，以後，関数 G, H の括弧の中から λ_0^* を省略する。

3。 拡張 Lagrange 関数と2点境界値問題

$$Ⓗ(x,\nu) = \Theta(x) + \nu^T g(x) + \frac{\kappa}{2}\|g(x)\|^2$$

とおき，拡張 Lagrange 関数を

$$L(u;\nu) = J(u) + \nu^T g(x(t_1)) + \frac{\kappa}{2}\|g(x(t_1))\|^2$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} f_0(x,u,t)\,dt + Ⓗ(x(t_1);\nu)$$

と定義する。 ここに κ は十分大きな正定数である。 問題2.1に関連して，次の2つの問題を考える。

問題3.1. 微分方程式(1)の制約のもとに，拡張Lagrange関数 $L(u;\nu)$ を最小にする制御関数 $u(t)$ を求める。 ここに $\nu\in R^r$ は固定されたパラメタである。

問題3.2. $H_u(x,u,\lambda,t)=0$ の変数 u についての陰関数を

$$u=\phi(x,\lambda,t)$$

とする。 実際，陰関数の存在は仮定2.1によって保証される。 このとき，

$$\dot{x}=f(x,\phi(x,\lambda,t),t)$$

$$-\dot{\lambda}=H_x^T(x,\phi(x,\lambda,t),\lambda,t)$$

$$x(t_0)=x_0, \qquad \lambda(t_1)=\Theta_x^T(x(t_1);\nu)$$

を満足するような関数の組 $x(t)$, $\lambda(t)$ を求める。 ここに，$\nu\in R^r$ は固定されたパラメタである。

次の命題を証明ぬきで示す。

命題3.1. 正定数 κ_1 が存在し，$\kappa>\kappa_1$ を一つ選ぶと，それにともなって，ν^* の近傍 N_1 が存在し，任意の $\nu\in N_1$ に対して問題3.2の解 $x(t;\nu)$, $\lambda(t;\nu)$ が存在する。 $x(t;\nu)$, $\lambda(t;\nu)$ は孤立解であり，$[t_0,t_1]\times N_1$ で連続である。 また，$\dot{x}(t;\nu)$, $\dot{\lambda}(t;\nu)$, $x_\nu(t;\nu)$, $\lambda_\nu(t;\nu)$,

$\dot{x}_\nu(t;\nu)$, $\dot{\lambda}_\nu(t;\nu)$ が存在し，$[t_0, t_1] \times N_1$ で連続である。

以後，$\kappa > \kappa_1$ を固定しておく。また，$u(t;\nu)$を，

$$u(t;\nu) = \phi(x(t;\nu), \lambda(t;\nu), t)$$

と定義する。

証明は省くが，次の2つの命題が成立する。

<u>命題3.2.</u>　正定数 m, M, ν^* の近傍 $N_2 \subset N_1$，および制御関数 $u(t)$ の集合

$$\Omega_0 = \{ u \mid \| u(t) - u^*(t) \| \leqq \sigma_0 , \ ^\forall t \in [t_0, t_1] \}$$

が存在して，任意の $\nu \in N_2$，任意の $u \in \Omega_0$ に対し，不等式

$$m \left\{ \int_{t_0}^{t_1} \| u(t) - u(t;\nu) \|^2 dt + \| x(t_1) - x(t_1;\nu) \|^2 \right\}$$

$$\leqq L(u(\cdot);\nu) - L(u(\cdot;\nu);\nu) \qquad (6)$$

$$\leqq M \int_{t_0}^{t_1} \| u(t) - u(t;\nu) \|^2 dt$$

が成立する。ここに $x(t)$ は，制御 $u(t)$ に対応する軌道である。

命題3.2は，$u(t;\nu)$ が問題3.1の局所孤立最適解であることを示している。

<u>命題3.3.</u>　定数 $\bar{c} > 0$ が存在し，任意の $c \leqq \bar{c}$ と任意の $u \in \Omega_0$ に対して，不等式

$$J(u) + (\nu^*)^T g(x(t_1)) + \left(\frac{\kappa}{2} - c\right) \| g(x(t_1)) \|^2$$
$$\geqq J(u^*) + m \| x(t_1) - x^*(t_1) \|^2 \qquad (7)$$

が成立する。

4. 一次収束性をもつ更新公式

次のアルゴリズムを考える。

アルゴリズム 4.1.

Step 0. 制御関数 $u^0(t)$ を与え，軌道 $x^0(t)$ を計算する。適当な $\nu^0 \in R^r$ を与え，$i = 0$ とおく。

Step 1. 制御関数 u^{i+1} と軌道 x^{i+1} を，更新公式

$$(x^{i+1}, u^{i+1}) = F(x^i, u^i, \nu^i) \qquad (8)$$

によって求める。ここに，F によって生成された x^{i+1}, u^{i+1} は微分方程式 (1) を満足するものとする。

Step 2. もし x^{i+1}, u^{i+1} が最適制御問題 2.1 の解とみなされるなら，計算を打ち切る。そうでないときは Step 3 に進む。

Step 3. 乗数 ν を

$$\nu^{i+1} = \nu^i + c^i g(x^{i+1}(t_1)) \qquad (9)$$

によって更新する。ただし c^i は，

$$0 < \alpha\Phi \leqq c^i \leqq \Phi \qquad (10)$$

を満足しており，$\alpha \in (0, 1]$ は勝手な定数，Φ は後で定ま

る定数である。

Step 4. $i := i+1$ とおきなおして Step 1 に戻る。

アルゴリズム 4.1 の生成する列 $\{x^i(t)\}$, $\{u^i(t)\}$, および $\{\nu^i\}$ の収束性を保証するため，次の条件を満足する更新公式 F を考える。

条件 4.1. (1次収束性)　正定数 ρ, $\sigma \leqq \sigma_0$, δ および定数 $0 \leqq A < 1$ が存在し，もし

(i) $\nu^i \in B(\nu^*, \rho) = \{\nu \mid \|\nu - \nu^*\| \leqq \rho\} \subset N_2$

(ii) $u^i \in \Omega_\sigma = \{u \mid \|u(t) - u^*(t)\| \leqq \sigma,\ \forall t \in [t_0, t_1]\}$

(iii) $\|u^i - u(\cdot\,;\nu^i)\|_{\mathcal{L}^2} \leqq \delta$

が成立するならば，u^{i+1} は，

(a) $u^{i+1} \in \Omega_\sigma$

(b) $\|u^{i+1} - u(\cdot\,;\nu^i)\|_{\mathcal{L}^2} \leqq A \|u^i - u(\cdot\,;\nu^i)\|_{\mathcal{L}^2}$

を満足する。

定理 4.1. 更新公式 F は条件 4.1 を満足すると仮定する。このとき，正定数 $\bar{\sigma} \leqq \sigma$, ρ_0, δ_0 が存在し，初期近似解 u^0, ν^0 を条件

$$\nu^0 \in B(\nu^*, \rho_0),\quad u^0 \in \Omega_{\bar{\sigma}},\quad \|u^0 - u^*\|_{\mathcal{L}^2} \leqq \delta_0$$

が満足されるよう選べば，アルゴリズム 4.1 の生成する列 $\{x^i\}$, $\{u^i\}$ は，それぞれ，

$$x^i \to x^* \qquad (i \to \infty,\ t \text{ について一様})$$

$$\| u^i - u^* \|_{\mathcal{L}^2} \to 0 \quad (i \to \infty)$$

となる。 さらに，ν^*が一意のときは$\{\nu^i\}$はν^*に収束する。

定理4.1の証明の前に，いくつかの命題を述べておく。

命題3.2より，$\nu^i \in B(\nu^*, \rho)$，$u^{i+1} \in \Omega_\sigma$ のとき

$$J(u^*) \geqq L(u(\cdot;\nu^i);\nu^i) + m \| x^*(t_1) - x(t_1;\nu^i) \|^2 ,$$

$$L(u^{i+1};\nu^i) \leqq L(u(\cdot;\nu^i);\nu^i) + M \| u^{i+1} - u(\cdot;\nu^i) \|^2_{\mathcal{L}^2}$$

が成立するので，

$$J(u^*) \geqq J(u^{i+1}) + [\nu^i + c^i g(x^{i+1}(t_1))]^T g(x^{i+1}(t_1)) + \left(\frac{\kappa}{2} - c^i\right) \| g(x^{i+1}(t_1)) \|^2 - M \| u^{i+1} - u(\cdot;\nu^i) \|^2_{\mathcal{L}^2} \tag{11}$$

を得る。 命題3.3より，$c^i \leqq \overline{c}$，$u^{i+1} \in \Omega_\sigma$ のとき

$$J(u^{i+1}) + (\nu^*)^T g(x^{i+1}(t_1)) + \left(\frac{\kappa}{2} - c^i\right) \| g(x^{i+1}(t_1)) \|^2 \geqq J(u^*) + m \| x^{i+1}(t_1) - x^*(t_1) \|^2 \tag{12}$$

が成立する。 (11)，(12)より

$$-(\nu^{i+1} - \nu^*)^T g(x^{i+1}(t_1)) \geqq m \left\{ \| x^{i+1}(t_1) - x^*(t_1) \|^2 + \| x^*(t_1) - x(t_1;\nu^i) \|^2 \right\} - M \| u^{i+1} - u(\cdot;\nu^i) \|^2_{\mathcal{L}^2} \tag{13}$$

を得る。 (14)と恒等式

$$\| \nu^i - \nu^* \|^2 = \| (\nu^{i+1} - \nu^*) - c^i g(x^{i+1}(t_1)) \|^2$$

$$= \| \nu^{i+1} - \nu^* \|^2 - 2c^i (\nu^{i+1} - \nu^*)^T g(x^{i+1}(t_1)) + (c^i)^2 \| g(x^{i+1}(t_1)) \|^2$$

より，次の命題が導かれる。

<u>命題4.1.</u>　$v^i \in B(v^*, \rho)$，$u^{i+1} \in \Omega_\sigma$，$0 < \alpha\Phi \leqq c^i \leqq \Phi \leqq \bar{\Phi}$ のとき

$$\|v^i - v^*\|^2 \geqq \|v^{i+1} - v^*\|^2 + \alpha^2\Phi^2 \|g(x^{i+1}(t_1))\|^2$$
$$+ 2\alpha\Phi m \left\{ \|x^{i+1}(t_1) - x^*(t_1)\|^2 + \|x(t_1; v^i) - x^*(t_1)\|^2 \right\}$$
$$- 2\Phi M \|u^{i+1} - u(\cdot; v^i)\|^2_{\mathcal{L}^2} \qquad (14)$$

が成立する。

命題3.1より，正定数 K_1 が存在して，任意の $v', v'' \in B(v^*, \rho)$ に対して

$$\|u(\cdot; v') - u(\cdot; v'')\|_{\mathcal{L}^2} \leqq K_1 \|v' - v''\| \qquad (15)$$

が成立する。よって，$v^i, v^{i-1} \in B(v^*, \rho)$ ならば，(10)より，

$$\|u(\cdot; v^i) - u(\cdot; v^{i-1})\|_{\mathcal{L}^2} \leqq K_1 \|v^i - v^{i-1}\|$$
$$\leqq K_1 \Phi \|g(x^i(t_1))\|$$

が成立する。このことと条件4.1から，$v^i, v^{i-1} \in B(v^*, \rho)$，$u^i \in \Omega_\sigma$，$\|u^i - u(\cdot; v^i)\|_{\mathcal{L}^2} \leqq \delta$ ならば，$u^{i+1} \in \Omega_\sigma$ および

$$\|u^{i+1} - u(\cdot; v^i)\|_{\mathcal{L}^2} \leqq A \|u^i - u(\cdot; v^i)\|_{\mathcal{L}^2}$$
$$\leqq A \|u^i - u(\cdot; v^{i-1})\|_{\mathcal{L}^2} + AK_1\Phi \|g(x^i(t_1))\| \qquad (16)$$

が成立することがわかる。任意の $a, b \in R$，任意の $\gamma > 0$ に対して

$$(a + b)^2 \leqq (1 + \gamma) a^2 + (1 + \frac{1}{\gamma}) b^2$$

が成立するから，(16) より，

$$\| u^{i+1} - u(\cdot\,; v^i) \|^2_{\mathcal{L}^2} \tag{17}$$

$$\leqq A^2(1+\varepsilon)\| u^i - u(\cdot\,; v^{i-1})\|^2_{\mathcal{L}^2} + A^2 K_1^2 \Phi^2 \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\| g(x^i(t_1))\|^2$$

が成立する。 ただし，ε は，$A^2(1+\varepsilon) < 1$ を満たすように選ぶ。 (17) から次の命題を得る。

<u>命題4.2.</u> $v^0, \cdots, v^n \in B(v^*, \rho)$， $u^0, \cdots u^n \in \Omega_\sigma$，$\| u^i - u(\cdot\,; v^i)\|_{\mathcal{L}^2} \leqq \delta$ $(i = 0, \cdots, n)$ のとき，$u^{n+1} \in \Omega_\sigma$ および

$$\sum_{i=0}^{n} \| u^{i+1} - u(\cdot\,; v^i)\|^2_{\mathcal{L}^2}$$

$$\leqq M_1 \| u^0 - u(\cdot\,; v^0)\|^2_{\mathcal{L}^2} + M_2 \sum_{i=1}^{n} \| g(x^i(t_1))\|^2 \tag{18}$$

が成立する。 ここに

$$M_1 = \frac{A^2}{1 - A^2(1+\varepsilon)}, \qquad M_2 = \frac{A^2 K_1^2 \Phi^2 \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)}{1 - A^2(1+\varepsilon)}$$

とおいた。

命題4.1 より，$v^0, \cdots v^n \in B(v^*, \rho)$， $u^1, \cdots, u^{n+1} \in \Omega_\sigma$，$\alpha\Phi \leqq c^i \leqq \Phi$ $(i = 0, \cdots, n)$ ならば，

$$\| v^0 - v^* \|^2$$

$$\geqq \| v^{n+1} - v^* \|^2 + 2\alpha\Phi m \sum_{i=0}^{n} \left\{ \| x^{i+1}(t_1) - x^*(t_1)\|^2 + \| x(t_1; v^i) - x^*(t_1)\|^2 \right\}$$

$$-2\Phi M \sum_{i=0}^{n} \| u^{i+1} - u(\cdot\,; v^i)\|^2_{\mathcal{L}^2} + \alpha^2 \Phi^2 \sum_{i=1}^{n+1} \| g(x^i(t_1))\|^2$$

が成立する。 このことと命題4.2から次の命題を得る。

命題4.3. $v^0,\cdots,v^n\in B(v^*,\rho)$, $u^0,\cdots,u^n\in\Omega_\sigma$, $\|u^i-u(\cdot;v^i)\|_{\mathcal{L}^2}\leqq\delta$ $(i=0,\cdots,n)$, $\alpha\Phi\leqq c^i\leqq\Phi$ $(i=0,\cdots,n)$ のとき，$u^{n+1}\in\Omega_\sigma$ および

$$
\begin{aligned}
&\|v^0-v^*\|^2+M_3\|u^0-u(\cdot;v^0)\|_{\mathcal{L}^2}^2\\
&\geqq\|v^{n+1}-v^*\|^2+M_4\sum_{i=1}^{n}\|g(x^i(t_1))\|^2+\alpha^2\Phi^2\|g(x^{n+1}(t_1))\|^2\\
&\quad+2\alpha\Phi m\sum_{i=0}^{n}\left\{\|x^{i+1}(t_1)-x^*(t_1)\|^2+\|x(t_1;v^i)-x^*(t_1)\|^2\right\}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

が成立する。 ここに，

$$M_3=2\Phi MM_1,$$

$$M_4=\alpha^2\Phi^2-2\Phi MM_2=\alpha^2\Phi^2-\frac{2A^2K_1^2\Phi^3M(1+\frac{1}{\varepsilon})}{1-A^2(1+\varepsilon)}$$

であり，Φ は，$M_4>0$ となるように選ばれる。

定理4.1 の証明 最初に，正定数 ρ_0, δ_0 が存在して，$v^0\in B(v^*,\rho_0)$, $u^0\in\Omega_\sigma$, $\|u^0-u^*\|_{\mathcal{L}^2}\leqq\delta_0$ なら，すべての $i\geqq0$ に対して $v^i\in B(v^*,\rho)$, $u^i\in\Omega_\sigma$, $\|u^i-u(\cdot;v^i)\|_{\mathcal{L}^2}\leqq\delta$ であることを，帰納法で示す。 (15) より

$$
\begin{aligned}
\|u^0-u(\cdot;v^0)\|_{\mathcal{L}^2}&\leqq\|u^0-u^*\|_{\mathcal{L}^2}+\|u(\cdot;v^*)-u(\cdot;v^0)\|_{\mathcal{L}^2}\\
&\leqq\|u^0-u^*\|_{\mathcal{L}^2}+K_1\|v^0-v^*\|
\end{aligned}
\tag{20}
$$

であるから，

$$\rho_0\leqq\rho,\qquad\delta_0+K_1\rho_0\leqq\delta \tag{21}$$

のとき，$i=0$ に対して我々の主張が成立する。 いま，$i=0,1,\cdots,n$ に対して我々の主張が成立すると仮定しよう。このとき命題4.3 より，$u^{n+1}\in\Omega_\sigma$ および

$$\| v^{n+1} - v^* \|^2 \leqq \| v^0 - v^* \|^2 + M_3 \| u^0 - u(\cdot\,; v^0) \|_{\mathcal{L}^2}^2$$

を得る。　このことと (20) より

$$\{ \rho_0^2 + M_3 (\delta_0 + K_1 \rho_0)^2 \}^{1/2} \leqq \rho \tag{22}$$

ならば，$v^{n+1} \in B(v^*, \rho)$ が満足される。　(18), (19) より

$$\begin{aligned} & \| u^{n+1} - u(\cdot\,; v^n) \|_{\mathcal{L}^2}^2 \\ & \leqq M_1 \| u^0 - u(\cdot\,; v^0) \|_{\mathcal{L}^2}^2 + M_2 \sum_{i=1}^{n} \| g(x^i(t_1)) \|^2 \\ & \leqq \left(M_1 + \frac{M_2 M_3}{M_4} \right) \| u^0 - u(\cdot\,; v^0) \|_{\mathcal{L}^2}^2 + \frac{M_2}{M_4} \| v^0 - v^* \|^2, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} & \| g(x^{n+1}(t_1)) \|^2 \\ & \leqq \frac{1}{\alpha^2 \Phi^2} \{ \| v^0 - v^* \|^2 + M_3 \| u^0 - u(\cdot\,; v^0) \|_{\mathcal{L}^2}^2 \} \end{aligned} \tag{24}$$

を得る。　一方 (9), (15) より

$$\begin{aligned} & \| u^{n+1} - u(\cdot\,; v^{n+1}) \|_{\mathcal{L}^2} \\ & \leqq \| u^{n+1} - u(\cdot\,; v^n) \|_{\mathcal{L}^2} + K_1 \Phi \| g(x^{n+1}(t_1)) \| \end{aligned} \tag{25}$$

を得る。　(20), (23), (24), (25) より，

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(M_1 + \frac{M_2 M_3}{M_4} \right) (\delta_0 + K_1 \rho_0)^2 + \rho_0^2 \frac{M_2}{M_4} \right\}^{1/2} \\ & \qquad + \frac{K_1}{\alpha} \{ \rho_0^2 + M_3 (\delta_0 + K_1 \rho_0)^2 \}^{1/2} \leqq \delta \end{aligned} \tag{26}$$

ならば　$\| u^{n+1} - u(\cdot\,; v^{n+1}) \|_{\mathcal{L}^2} \leqq \delta$　が成立する。　結局，δ_0, ρ_0 を (21), (22), (26) が満足されるように選べば，すべての $i \geqq 0$ に対して $v^i \in B(v^*, \rho)$，$u^i \in \Omega_\sigma$，$\| u^i - u(\cdot\,; v^i) \|_{\mathcal{L}^2} \leqq \delta$　となる。

(18) と (19) より $\| u^{i+1} - u(\cdot\,; v^i) \|_{\mathcal{L}^2} \to 0$　$(i \to \infty)$　が得られ

る。よって，$u(\cdot;\nu^i)\to u^*\ (i\to\infty)$ を示せば $\|u^i-u^*\|_{\mathcal{L}^2}\to 0\ (i\to\infty)$ が成立する。閉球 $B(\nu^*,\rho)$ はコンパクト集合だから列 $\{\nu^i\}$ は少くとも一つの集積点をもつ。もし $\{\nu^i\}$ の任意の集積点 $\hat{\nu}$ に対して $u(\cdot;\hat{\nu})=u^*$ が成立するなら，$u(t;\nu)$ の連続性より，$u(\cdot;\nu^i)\to u^*\ (i\to\infty)$ が成立する。そこで，$\{\nu^{i_p}\}$ を $\hat{\nu}$ に収束する $\{\nu^i\}$ の部分列としよう。命題4.3より

$$\lim_{p\to\infty}\|x(t_1;\nu^{i_p})-x^*(t_1)\|=0$$

すなわち $x(t_1;\hat{\nu})=x^*(t_1)$ を得る。このことと命題3.2から

$$\begin{aligned}0 &\leqq m\|u^*-u(\cdot;\hat{\nu})\|_{\mathcal{L}^2}\leqq L(u(\cdot;\hat{\nu});\nu^*)-L(u^*;\nu^*)\\ &= J(u(\cdot;\hat{\nu}))-J(u^*)=L(u(\cdot;\hat{\nu});\hat{\nu})-L(u^*;\hat{\nu})\\ &\leqq -m\|u^*-u(\cdot;\hat{\nu})\|_{\mathcal{L}^2}\leqq 0\end{aligned}$$

が成立し，結局 $u(\cdot;\hat{\nu})=u^*$ となる。よって前に述べたことから $\|u^i-u^*\|_{\mathcal{L}^2}\to 0\ (i\to\infty)$ を得る。$\{x^i\}$ が x^* に一様に収束することは明らかである。

5. CCPを用いた更新公式

定理4.1より，制御関数 u および軌道 x の更新公式 F が条件4.1を満足すれば，アルゴリズム4.1の生成列 $\{u^i\}$, $\{x^i\}$ は，それぞれ u^*, x^* に収束する。ここでは，条件4.1を

満足する更新公式の一例を示す。 次のアルゴリズムを考える。

アルゴリズム5.1

微分方程式(1)を満足するx^i, u^i, および$\nu^i \in R^r$が与えられているとする。 新しい制御関数u^{i+1}, 軌道x^{i+1}を次の手順で求める。

Step 1. $\lambda^i(t)$についての微分方程式

$$-\dot{\lambda}^i = H_x^T(x^i, u^i, \lambda^i, t)$$

$$\lambda^i(t_1) = \Theta_x^T(x^i(t_1); \nu^i)$$

を$[t_0, t_1]$で逆時間に解く。

Step. 2. 微分方程式

$$\dot{x}^{i+1} = f(x^{i+1}, u^{i+1}, t), \qquad x^{i+1}(t_0) = x_0$$

を解く。 ただし$u^{i+1}(t)$は

$$u^{i+1}(t) = \arg \min_u K(x^{i+1}(t), u, \lambda^{i+1}(t), t\ ; u^i(t), C)$$

によって定められ, 関数Kは

$$K(x, u, \lambda, t\ ; v, C) = H(x, u, \lambda, t) + \frac{1}{2} C \| u - v \|^2$$

により定義される。

ここに定数Cは convergence control parameter (CCP) と呼ばれる定数である。 この手法は Järmark[8] によって提案された。 CCP を導入することによって制御関数uの更新が安定化されることが知られている(12)。 次の定理を証明な

して示しておく。

<u>定理5.1.</u>　正定数C_0が存在して，任意の$C \geqq C_0$に対してアルゴリズム5.1で記述される更新公式は条件4.1を満足する。　ただし正定数AはCの値に依存するので，アルゴリズム4.1にこの更新公式を適用する際には，Cの値を固定しておく。

⑥。 むすび

定理4.1，5.1により，アルゴリズム4.1と5.1を組み合せたアルゴリズムは，生成列$\{u^i\}$，$\{x^i\}$の収束性を保証する。　この組み合せたアルゴリズムは次の利点をもつ。

(i)　関数の2次偏導関数を用いないので，プログラミングが容易。

(ii)　汎関数の最小化を要求しない。

(iii)　制御変数uに対する制約，あるいは制御変数uと状態変数xに対する混合制約がある最適制御問題に対しても適用可能である。　ただしこの場合には，収束性の理論的保証はない[9,10]。

アルゴリズム5.1の他にも，条件4.1を満足するアルゴリズムは存在する。　例えば，第2変分を用いたアルゴリズム[11]は条件4.1を満足する。　数値計算例は示さなかったが，参

考文献9,10)に数値計算例がある。

参考文献

1. Hestenes, M.R., An Indirect Sufficiency Proof for the Problem of Bolza in Nonparametric Form, Transactions of the American Mathematical Society, Vol.62, pp.509-535, 1947.
2. Rupp, R.D., A Method for Solving a Quadratic Optimal Control Problem, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.9, pp.238-250, 1972.
3. Glad, S.T., A Combination of Penalty Function and Multiplier Methods for Solving Optimal Control Problems, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.28, pp.303-329, 1979.
4. Nahra, J.E., Balance Function for the Optimal Control Problem, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.8, pp.35-48, 1971.
5. Hestenes, M.R., Multiplier and Gradient Methods, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.4, pp.303-320, 1969.
6. Berkovitz, L.D., Variational Methods in Problems of Control and Programming, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.3, pp.145-169, 1961.
7. Bliss, G.A., Lectures on the Calculus of Variations, The University of Chicago Press, Chicago, 1946.
8. Jarmark, B., On Convergence Control in Differential Dynamic Programming Applied to Realistic Aircraft and Differential Game Problems, Proceedings of the 1977 IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, Louisiana, pp.471-479, 1977.
9. Sakawa, Y., Shindo, Y., and Hashimoto, Y., Optimal Control of a Rotary Crane, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.35, pp535-557, 1981.
10. Sakawa, Y., and Shindo, Y., Optimal Control of Container Cranes, Automatica, Vol.18, pp.257-266, 1982.

11. Dyer, P., and McReynolds, S.R., The Computation and Theory of Optimal Control, Academic Press, New York, 1970.

12. Sakawa, Y., and Shindo, Y., On Global Convergence of an Algorithm for Optimal Control, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol.AC-25, pp.1149-1153, 1980.