数理解析研究所講究録
528巻 1984年 115-126

確率微分方程式の解の近似について.

九大工 国田寛 (Hiroshi Kunita)

序. 確率微分方程式は、工学の問題ではランダムな外力又は撹乱の作用したダイナミカルシステムを記述する方程式と理解されている. 最もよく論じられるのは次の型の方程式である.

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = F(t,x) + G(t,x)w(t).$$

ただし $F(t,x)$ 及び $G(t,x)$ はそれぞれ連続な n ベクトル関数, $n\times r$-行列値関数でありxについてはなめらかかつ微分は有界である. $w(t)$ はいわゆるノイズで, 平均が0, 自己相関関数 $Cov(w(t), w(s))$ が $\rho(t-s)$ の定常確率過程である. ρ が0でないなめらかな関数の場合, $w(t)$ を correlated noise という.

一方 $\rho(t)$ がディラックのデルタ関数のとき, 対応するガウス過程 $w(t)$ を white noise という. したがって white noise

は各時点ごとに独立でパワーが無限大のガウス過程である．しかし実際にはそのような確率過程は存在せず，超過程としてのみ定義可能である．そこで厳密には white noise の代りにブラウン運動による確率積分を用いて，方程式(1) を積分方程式の形で定式化する．その際確率積分の定義によって違った解が得られるので注意が必要である．最もよく使われるのは伊藤積分を用いた伊藤の確率微分方程式と，Stratonovich 積分を用いた伊藤-Stratonovich の方程式である．前者は次の形に表わされる．

$$(2) \qquad x_t = x_0 + \int_0^t F(\tau, x_\tau)\,d\tau + \int_0^t G(\tau, x_\tau)\,dB_\tau$$

ただし $B_t = (B_t^1, \cdots, B_t^r)$ は r-次元ブラウン運動であり，$\int_0^t G(\tau, x_\tau)\,dB_\tau$ は伊藤積分を表わす．また伊藤-Stratonovich の確率微分方程式は次式であらわされる．

$$(3) \qquad x_t = x_0 + \int_0^t F(\tau, x_\tau)\,d\tau + \int_0^t G(\tau, x_\tau)\circ dB_\tau$$

ただし $\int_0^t G(\tau, x_\tau)\circ dB_\tau$ は Stratonovich 積分を表わす．伊藤積分と Stratonovich 積分の定義及び相互関係については Ikeda-Watanabe の本 [4] を参照の事．

伊藤又は伊藤-Stratonovich 方程式の解 x_t は t について滑らかでないため，現実のランダムな現象を忠実に反映したもの

ではないとの批判がある。実際解Ξはtの$\frac{1}{2}$-Hölder連続な関数である。これは伊藤の方程式が現実のモデルを理想化し抽象化して表現したものであるからである。現実のモデルでは方程式(1)の$\dot{w}(t)$はwhite noiseではなくcorrelated noiseであって過去の影響を受けるが、相関関数$\rho(t)$は十分デルタ関数に近いと考えるのが自然であろう。例えば$\rho(t)=\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon^2}t^2}$（εは十分小）。このとき対応する$\dot{w}(t)$はtの連続関数となるから確率常微分方程式(1)の解はただちにもとめることが出来る。しかし解はマルコフ性をもたず、その分布をもとめることも困難である。これに反し伊藤の方程式の解はマルコフ性をもち、その推移確率は二階の放物型偏微分方程式を解くことによって得られる。またこのことが原因となって、フィルター理論においてもcorrelated noiseの場合は特別な場合を除いてカルマンフィルターの様な簡単なアルゴリズムをもとめることが出来ない。この様に理論的にはcorrelated noiseの場合の方程式(1)よりも伊藤又は伊藤-Stratonovich方程式の解の方がより単純な構造をもっている。故に$\dot{w}(t)$がwhite noiseに近いcorrelated noiseの場合の(1)の解が(2)又は(3)の解に近いことが示されれば、伊藤の確率微分方程式の理論が現実の問題に適用可能であることが保証されるであろう。

以上伊藤の確率微分方程式の解の近似理論の重要性を工学の問題との関係で強調したが数学的にも興味ある問題を含んでいる．例えば Stroock-Varadhan [7] は拡散過程の support を決定するために近似理論を利用した．最近は Malliavin, Bismut, Ikeda-Watanabe 等が確率微分方程式の解の定義する微分同型の流れの研究のために近似理論を展開している．この報告ではこれらの研究を紹介すると共に筆者が最近興味をもっている問題について述べたい．

尚解の収束の概念には強収束と弱収束があるので，二つの節に別けて論ずることにする．

1. 解の強収束

伊藤の確率微分方程式 (2) 又は伊藤-Stratonovich の確率微分方程式 (3) における最後の確率積分の項は通常のスチールチェス積分とみなすことは出来ない．ブラウン運動 B_t が t の有界変動関数でないからである．そこで B_t を区分的になめらかな確率過程の列 $B_t^{(n)}$, $n=1,2,\cdots$ で近似し，各 $B_t^{(n)}$ に対応する常微分方程式の解の列が (2) 又は (3) の解を近似しているかどうかを考えよう．まず確率過程の列の強収束の定義から始める．

定義．$X_t^{(n)}$, $n=1,2,\cdots$ を連続な確率過程の列とする．ある連続な確率過程 ~~の列~~ X_t があって

$$E\Big[\sup_{t\in[0,T]} |x_t^{(n)} - x_t|^2\Big] \longrightarrow 0$$

をみたすとき，$x_t^{(n)}$ は x_t に強収束するという．

今 $B_t^{(n)}$, $n=1,2,\cdots$ をブラウン運動 B_t に強収束する列とし、各れに対し次の~~確率~~常微分方程式を考える．

(4) $$\frac{dx}{dt} = F(t,x) + G(t,x)\dot{B}_t^{(n)}, \qquad \dot{B}_t^{(n)} = \frac{d}{dt}B_t^{(n)}$$

時刻 $t=0$ で点 x_0 を通る解を φ_t^n であらわす．時間微分の列 $\dot{B}_t^{(n)}$, $n=1,2\cdots$ は強収束しないので解の列 $\varphi_t^{(n)}$, $n=1,2\cdots$ も必ずしも強収束しない．特殊な近似列 $B_t^{(n)}$ に対してのみ強収束が証明されている．代表的な例として折線近似と mollifier 近似について考える。

(a) 折線近似． 時間 $[0,T]$ の分点 $\frac{k}{n}$, $k=0,1,2,\cdots$ におけるブラウン運動の値 $B_{\frac{k}{n}}$ を折線で結んで $B_t^{(n)}$ を定義する．すなわち，

$$B_t^{(n)} = n\left(B_t - B_{\frac{k}{n}}\right)\left(t-\frac{k}{n}\right) + B_{\frac{k}{n}} \qquad \frac{k}{n} \le t \le \frac{k+1}{n} \text{ のとき．}$$

この $B_t^{(n)}$ に対応する (4) の解 $\varphi_t^{(n)}$ は伊藤-Stratonovich 方程式の解に強収束することが知られている（Wong-Zakai [8], Stroock-Varadhan [7], Ikeda-Watanabe [4], Bismut [2]）．このとき相関関数 $\rho(t)$ は $\rho(t)=n$ if $|t|\le\frac{1}{n}$, $=0$ if $|t|>\frac{1}{n}$ である．

(b) Mollifier近似. $\varphi(t)$ を台が $[0,1]$ に含まれる非負の滑らかな関数で $\int_0^1 \varphi(s)ds = 1$ をみたすとする. $\varphi_n(t) = n\varphi(nt)$ とおき

$$B_t^{(n)} = \int_{t-\frac{1}{n}}^{t} \varphi_n(t-s) B_s ds$$

とおくと, $B_t^{(n)}$ は t について滑らかな確率過程で B_t に強収束する. この $B_t^{(n)}, n=1,2\cdots$ を B_t の mollifier近似という. 対応する解の列は伊藤-Stratonovichの確率微分方程式の解に強収束することが知られている (Ikeda-Watanabe [4]).

(c) 上述の (a), (b) を含む更に一般の近似が Ikeda-Nakao-Yamato [3] によって調べられた. 対応する解の列 $\varphi_t^{(n)}$ は強収束するが, その極限は必ずしも伊藤-Stratonovichの方程式の解に収束せず, それに補正項を加えた次の方程式の解に強収束する.

(5) $$dx_t = F(t, x_t)dt + G(t, x_t)\circ dB_t + \sum_{k,l} \gamma_{k,l}[F_k, F_l](t, x_t)dt$$

ただし $(\gamma_{k,l})$ は歪対称行列, $G(t,x) = (F_1(t,x), \cdots, F_r(t,x))$, $[F_k, F_l]$ はベクトル場 F_k と F_l の Lie-bracket で

$$[F_k, F_l] = \sum_i F_k^i \frac{\partial}{\partial x_i} F_l - \sum_i F_l^i \frac{\partial}{\partial x_i} F_k$$

によって定義される.

折線近似は Stroock-Varadhan によって拡散過程の support theory に応用された. これを説明するために連続な d 次元

確率過程 x_t の分布を定義しよう．今 $W = C([0,T]; R^d)$ を $[0,T]$ から R^d への連続写像の全体とする．一様位相によって W は完備な距離空間である．W の位相的σ-集合体を $\mathcal{B}_W$ とする．今 Q を $(W, \mathcal{B}_W)$ 上の確率測度とする．Q が確率過程 x_t の分布であるとは，任意の $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq T$ と R^{nd} のボレル集合 E に対し

$$(6) \quad Q\{w \mid (w(t_1), \ldots, w(t_n)) \in E\}^{*)} = P\{\omega \mid (x_{t_1}(\omega), \ldots, x_{t_n}(\omega)) \in E\}$$

をみたすことをいう．また分布 Q の台，すなわち $Q(F)=1$ をみたす最小の閉集合 F を確率過程 x_t の support という．

<u>定理</u>（Stroock–Varadhan）x_t を伊藤–Stratonovich の確率微分方程式 (3) の解とすると，x_t の support F は次の制御系の解の集合 $\{\varphi_t^u ; u \in \mathcal{U}\}$ の W での closure である．

$$(7) \quad \frac{d\varphi_t^u}{dt} = F(t, \varphi_t^u) + G(t, \varphi_t^u)u(t), \quad \varphi_0^u = x_0.$$

ただし $\mathcal{U}$ は control 又は input の集合で，区分的になめらかな R^d-値関数の全体である．

この定理により非線形制御系 (7) の reachability の問題と，確率微分方程式の解の support theory が深く関係していることがわかる．さらにくわしくは Kunita [8] を参照されたい．

---

*). W の元を w と書き，その $t \in [0,T]$ での値を $w(t)$ と書く．

確率常微分方程式の解を微分同型のflowとみるときは，更に強い意味の収束を考えることが重要である．今確率常微分方程式(1)において$w(t)$がcorrelated noiseでありその連続関数とする．点(s,x)を通る(1)の解を$\varphi_{s,t}(x)$とかくと，これは次の性質をもつことはよく知られている．

(i) (s,t,x)の連続関数

(ii) 任意の$s,t,u\in[0,T]$に対し，$\varphi_{s,u}=\varphi_{s,t}\circ\varphi_{t,u}$．

(iii) s,tを固定すると$\varphi_{s,t}:R^d\to R^d$は微分同型写像，即ち1対1，ontoかつ逆写像$\varphi_{s,t}^{-1}$もなめらかである．

この$\varphi_{s,t}$を微分同型のstochastic flowという．

さて，$B_t^{(n)}$がブラウン運動に強収束するとき，これに対応する確率常微分方程式(6)の定義するflowを$\varphi_{s,t}^{(n)}(x)$とする．$\varphi_{s,t}^{(n)}$が前述の強収束よりも更に強く，任意のNに対し

$$\sup_{|\alpha|\le N}\left\{|D^\alpha\varphi_{s,t}^{(n)}(x)-D^\alpha\varphi_{s,t}^{(m)}(x)|+|D^\alpha\varphi_{s,t}^{(n)-1}(x)-D^\alpha\varphi_{s,t}^{(m)-1}(x)|\right\}\to 0$$

がL^2で成立するとき，$\varphi_{s,t}^{(n)}$は微分同型のflowとして強収束するという．ただしαは多重指数$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)$（$\alpha_i$は非負整数）であり，$D^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d}$である．

定理 I．$B_t^{(n)}$, $n=1,2,\dots$が折線近似ならば，$\varphi_{s,t}^{(n)}$は微分同型のflowとして強収束する．

証明は省略するが，折線近似の特性を使うので，mollifier

近似についても成立するかどうかわかっていない。

2. 弱収束.

前節ではブラウン運動が初めに与えられている時，それに収束する確率過程の列を適当に選べば対応する解の列が強収束することを述べた．この節では，与えられた correlated noise $w(t)$ の分布が white noise の分布に近いとき，確率常微分方程式 (1) の解が伊藤－Stratonovich 方程式の解に近いことを示したい．この節では中心極限定理のように，強収束ではなく分布の意味の収束を考える．

まず確率過程の弱収束または分布収束を定義しよう．$X_t^{(n)}$, $t\in[0,T]$ を連続な確率過程の列とし，$Q^{(n)}$ を $(W,\mathcal{B}_W)$ 上に定義された $X_t^{(n)}$ の分布とする．$Q^{(n)}$, $n=1,2,\cdots$ が $(W,\mathcal{B}_W)$ 上の確率分布 Q に弱収束するとは，W 上で定義された任意の有界連続関数 $f(w)$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}\int f(w)Q^{(n)}(dw) = \int f(w)Q(dw)$$

が成立することを言う．

今 $\dot{v}_n(t)$, $n=1,2\cdots$ を与えられた correlated noise の列とする．各 $\dot{v}_n(t)$ の一様混合比 $\rho_n(s)$ を次のように定義する．

$$\rho_n(s) = \sup_t \sup_{A\in\mathcal{F}^n_{s+t,\infty},\ B\in\mathcal{F}^n_{0,t}} |P(A|B)-P(A)|$$

ただし $\mathcal{F}^n_{s,t}$ は $W_n(u);\ s\le u\le t$ を可測にする最小の σ-集合体である．$s<s'$ のとき $\mathcal{F}^n_{s+t,\infty}\supset\mathcal{F}^n_{s'+t,\infty}$ だから $\rho_n(s)$ は s の減少関数である．もし各 t で $\mathcal{F}^n_{0,t}$ と $\mathcal{F}^n_{s+t,\infty}$ が独立ならば $\rho_n(s)=0$ である．逆に $\rho_n(s)=0$ ならば各 t で $\mathcal{F}^n_{0,t}$ と $\mathcal{F}^n_{s+t,\infty}$ は独立となる．例えば $W_n(t)$ がブラウン運動の折線近似 $B^{(n)}_t$ の微分 $\dot{B}^{(n)}_t$ のときは $\rho_n(s)=0$ if $s\geq\frac{1}{n}$, $=1$ if $0\le s<\frac{1}{n}$ となる．一般に $\rho_n(s)$ の値が0に近い程，$\mathcal{F}^n_{0,t}$ と $\mathcal{F}^n_{s+t,\infty}$ の独立性の度合いが強い．

定理II. Correlated noise $W_n(t)$, $n=1,2,\cdots$ が次の4条件をみたすとする．

(i) $s\neq 0$ のとき $\rho_n(s)\longrightarrow 0$ as $n\to\infty$.

(ii) $E[|W_n(t)|^2]\longrightarrow 0$ as $n\to\infty$.

(iii) $0<\ {}^{\exists}\lim_{n\to\infty}E[|W_n(t)|^2]\int_0^1\rho_n(s)ds<\infty$.

(iv) ${}^{\exists}\lim_{n\to\infty}n\int_0^{\frac{1}{n}}\left(\int_0^t E[W_n(\tau)W_n(\sigma)^T]\,d\tau\right)d\sigma^{*)}=R$.

$\varphi^{(n)}_t$ を次の方程式の解の列とする．

$$\frac{dx}{dt}=F(t,x)+G(t,x)W_n(t),\qquad \varphi^{(n)}_0=x_0.$$

R が対称行列ならば，$\varphi^{(n)}_t$ は伊藤-Stratonovich方程式の解に弱収束する．R が対称でないときには，方程式(5)の解に弱収束する．ただし $\gamma_{k\ell}=\frac{1}{2}(r_{k\ell}-r_{\ell k})$, $R=(r_{k\ell})$ である．

---

*) $W_n(t)$ は縦ベクトル，$W_n(t)^T$ は横ベクトル，ゆえに $W_n(t)W_n(t)^T$ は行列．

<u>定理Ⅲ.</u> Correlated noise の列 $\dot{w}_n(t)$, $n=1,2\cdots$ が (i)〜(iv) 及び

(v) $|\dot{w}_n(t)| \le C$ かつ $\sup_n C_n \int_0^1 \rho_n(s)ds < \infty$

をみたす定数列 C_n が存在する.

をみたせば, 解 $\varphi_t^{(n)}$ の列は微分同相の flow として弱収束する.

定理Ⅱは Khasiminsky [9], Papapnicolaou-Kohler [10] の極限定理の一般化である. 定理Ⅲと類似の結果は, 文献 [6] に発表予定である.

References

[1] P. Billingsley, Convergence of probability measures, John Wiley & Sons, New York, London-Tronto, 1968.

[2] J. M. Bismut, Mécanique Aléatoire, Lecture Notes in Math., 866 (1981).

[3] N. Ikeda-S. Nakao-Y. Yamato, A class of approximations of Brownian motion, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 13 (1977), 285-300.

[4] N. Ikeda-S. Watanabe, Stochastic differential equations and diffusion processes, North-Holland/Kodansha, 1981.

[5] H. Kunita, Supports of diffusion processes and controllability problems, Proc. Intern. Symp. SDE Kyoto 1976 (ed. by K. Itô), 163-185, Kinokuniya, 1978.

[6] H. Kunita, Weak convergence of solutions of stochastic ordinary differential equations as stochastic flows, to appear in Osaka J. of Math.

[7] D. W. Stroock-S. R. S. Varadhan, On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle, Proc. Sixth Berkeley

Symp. Math. Statist. Prob. III., 333-359, Univ. California Press, 1972.

[8] E. Wong-M. Zakai, On the relation between ordinary and stochastic ordinary differential equations, Intern. J. Engng. Sci. 3 (1965), 213-229.

[9] R. Z. Khasminskii, A limit theorem for the solutions of differential equations with random right hand sides, Theor. Prob. Appl., 11 (1966) 390-506.

[10] G. C. Papanicolaou-W. Kohler, Asymptotic theory of mixing stochastic ordinary differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 27 (1974), 641-668.