

時間おくれのあるフィードバックによる
発展方程式の安定化について

東大・理 山本 昌宏 (Masahiro Yamamoto)

§1. Introduction

Hilbert 空間 X における放物型方程式

$$(1.1) \quad \frac{du(t)}{dt} + Au(t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

を考之、系(1.1) が 作用素ノルム $\|e^{-tA}\|_{X \rightarrow X}$ が、
 $t \rightarrow \infty$ の時 指数関数的に大きくなるという意味で、不安定
であると決定する。その時、次のような "フィードバック
安定化問題" とよばれる問題が、さまざまの人々の関心を集め

てきた。(Sakawa and Matsushita [8], Hamada
[6], Triggiani [11])

すなわち、ある与えられた有界線形作用素 $S: X \rightarrow \mathbb{C}^N$
に対して、適当な線形作用素 $T: \mathbb{C}^N \rightarrow X$ を与えらばこ
とによって、

$$(1.2) \quad \frac{du(t)}{dt} + Au(t) = TSu(t) \quad (t \geq 0)$$

なる形の "フィードバック・システム" とよばれる新しい

システムを構成して、ある正の定数 M, ω に対して

$$\| e^{-t(A-TS)} \|_{x \rightarrow x} \leq M e^{-t\omega}$$

を、成り立たせたい。ここで (1.2) は、実用的見地から次のように考えることができる； すなわち、

時刻 t でのある観測量 $SU(t)$ が 同時刻 t で $TSU(t)$ の形で、もとの系 (1.1) に "フィードバック" されている。

筆者は、最近、鈴木氏と共に フィードバック安定化問題について、 S の可観測性と T の可制御性との関係と、作用素論的立場から整理することができた。

(Suzuki and Yamamoto [9], Yamamoto and Suzuki [13])

ここでは、その結果もふまえて、フィードバック・システムとして、別のタイプのモデルを考える。

$$(1.2) \quad \begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} + AU(t) = TSU(t-\tau) & (t > 0) \\ U(t) = \varphi(t) & (-\tau \leq t \leq 0) \end{cases}$$

すなわち、 $SU(t)$ を系 (1.1) に、フィードバックする際にかかる時間 τ を、考慮したモデルである。

特に、我々は系 (1.1) が、あとで述べるような意味で、安定化されるような T を、 S に対して、構成できるように

対しての上層について考察したい。(c.f. Yamamoto [12])

§2. Formulation

以下、 X は内積 (\cdot, \cdot) をもつ Hilbert 空間とする。

(1.1) にあられる作用素 $-A$ に対して、次のような仮定をしておく。([9])

1) $-A$ は、 X における解析半群 $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ の生成作用素であり、ある $t_0 > 0$ が存在して $e^{-t_0 A}$ はコンパクト作用素である。

2) A のスペクトラム $\sigma(A)$ は、2つの部分集合 $\{\lambda_i\}_{i=1}^l$ と Σ_1 に分割される。しかも、 λ_i は全て、有限の重複度 m_i をもつ固有値であって、

$$(2.1) \quad \kappa_0 = \sup_{1 \leq i \leq l} \operatorname{Re} \lambda_i \leq 0 < \inf_{\lambda \in \Sigma_1} \operatorname{Re} \lambda$$

が、成り立つ。以下、 P を

$$(2.2) \quad P = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Gamma} (\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

で定義しておく。ここで Γ は $\{\lambda_i\}_{i=1}^l$ を囲み、 $\{\lambda_i\}_{i=1}^l$ と Σ_1 を分離する Jordan 閉曲線とする。

3) 評価

$$(2.3) \quad \|(1-P)e^{-tA}\|_{X \rightarrow X} \leq M_1 e^{-t\kappa_1} \quad (t \geq 0)$$

が、 $\kappa_1 > \kappa_0$ なる ある κ_1 と M_1 に対して
成り立つ。 //

以上の仮定の下で、まず、Travis and Webb [10] に従って、(1.2) を適当な Banach 空間における発展方程式にかきかえて、半群理論より、その適切性や安定性などについて考えることができる。(Borisović and Furubabin [2] もすむゆえ、以下における事実が知られている。参照のこと)

$$M_\tau \equiv L'((- \tau, 0) \rightarrow X) \oplus X$$

として、 M_τ に、直線 Banach 空間 としてのノルムを入れおく。 $t \geq 0$ に対して、 M_τ から M_τ への線形作用素 $U_\tau(t)$ を、次のように定義しておく。

$$\begin{pmatrix} \varphi(\cdot) \\ \varphi_0 \end{pmatrix} \in M_\tau \text{ に対して } U_\tau(t) \begin{pmatrix} \varphi(\cdot) \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t+\cdot) \\ u(t) \end{pmatrix}$$

但し、 $u(t)$ は 初期値 $(\varphi(\cdot), \varphi_0)$ に対する初期値問題

$$\begin{cases} u(t) = e^{-tA} \varphi_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} TS u(s-\tau) ds & (t \geq 0) \\ u(t) = \varphi(t) & -\tau \leq t < 0 \\ u(0) = \varphi_0 \end{cases}$$

の解^{*} とする。

*以下では *mild solution* とよばれるある種の
弱解を考える時でも単に解とよぶことにする。

このとき、 $\{U_\varepsilon(t)\}_{t \geq 0}$ は M_ε で (C.) 半群をなすこと
がわかる。さらに A_{U_ε} をその生成作用素とすると、

$$\sup_{\lambda \in \sigma(A_{U_\varepsilon})} \operatorname{Re} \lambda < 0 \iff$$

ある正定数 M, ε が存在して (1.2) ε の
全ての解に対して

$$(2.4) \quad \|U(t)\|_X \leq M e^{-t\varepsilon} \|(\varphi(\cdot), \varphi)\|_{M_\varepsilon} \quad (t \geq 0)$$

が成り立つ。

成ることも示せる。

これから、我々は、 S, T を適当に之らんで (2.4) なる
評価が成り立つようにできるとき、(1.1) は "(フィードバック)
7) 安定化可能" とあるとよぶことにする。

(1.1) を安定化するよう T がとれることの限界は、 T を
どのような範囲からとるか、すなわち、 T の値域 $R(T)$ を
 X のどのような部分集合からとるか、に依存する。

そこで、我々は、次の定義をもうける。

Definition 1. $\Upsilon \supset X_0$, 但し、 $X_0 = PX$ と
する。 $(0, \infty)$ の部分集合 $D(S, \Upsilon)$ を

$$D(S, \gamma) = \left\{ \tau \geq 0; \text{ある線形作用素 } T: \mathbb{C}^N \rightarrow X \text{ が存在して, } \sup_{\lambda \in \sigma(A_\tau)} \operatorname{Re} \lambda < 0 \right\}$$

により定義する。 //

注意 2.1. $\gamma > X_0$ は S についての適当な条件の下で $D(S, \gamma) \neq \emptyset$ なることを保証する条件である。([9]) //

$D(S, \gamma)$ は、(1.1) の τ についての安定化可能帯というべきものであるが、 $D(S, \gamma)$ については、次の事実がまず示せる。

Proposition 1. $D(S, \gamma)$ は、 $[0, \infty)$ で開集合である。 //

さて、 S について、次の概念を導入する。([9])

Definition 2. $Z \subset X$ を 線形部分空間とする。有界線形作用素 $S: X \rightarrow \mathbb{C}^N$ が (X において、 e^{-tA} に関して) "Z-observable" であるとは、

" $a \in Z, S e^{-tA} a = 0 \ (0 \leq t < \infty) \implies a = 0$ " が成り立つことと定義する。 //

$Z = X$ のとき、この定義は、通常の可観測性と一致する。

注意 2.2. S をある $g_R \in X \ (1 \leq R \leq N)$ に対して、

$$S u = ((u, g_1), \dots, (u, g_N)) \in \mathbb{C}^N$$

の形に、かいたとすると 次が成り立つ。(〔9〕)

S が X_0 -observable \iff

$$\text{rank } M_i = n_i \quad (1 \leq i \leq l)$$

ここで M_i は $M_i = ((\varphi_{ij}, g_k))_{1 \leq k \leq N, 1 \leq j \leq n_i}$ なる $N \times n_i$ 行列であり、 $\{\varphi_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ は $\text{Ker}(\lambda_i - A)$ の基底である。 X_0 は A の固有バグトル以外の元を含んでいる場合でも、 X_0 に含まれる A の固有バグトルのみに関する条件によって、 S の X_0 -observability が判定できることに注意すべきである。 //

さて、〔9〕、〔13〕の Theorem 1. と、同様の論法により、

Proposition 2. (i) $D(S, Y) \neq \emptyset \iff$

S が X_0 -observable である。

(ii) (i) の下で、ある正数 δ が存在して、

$$D(S, Y) \supset (0, \delta) . //$$

Proposition 2. によって、 $D(S, Y)$ は、0 からはじまって、ある十分小さい δ まで延長されていることがわかるが、 δ を越えて、どの程度までのびているかはわかりにくい。そこで問題を、単純化して次の δ を考察を加えてみたい。

§3. Examples

ここからは、以下を仮定しておく。

↑

(仮定) A は、自共役であるとし、 $\sigma(A)$ は
 全て孤立した重複度有限の固有値 λ_i ($i=1, 2, \dots$) のみよりなり、

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots \rightarrow \infty$$

である。さらに λ_1 は単純である(すなわち重複度 $m_1=1$ である) とする。 //

注意 1. $\{\varphi_{ij}\}_{j=1}^{n_i}$ を $\text{Ker}(\lambda_i - A)$ の基底とすると、

$$X_0 = \text{span}\{\varphi_{11}\}$$

となる。 //

$SU = (u, g)$ ($g \in X$) なる S を考える。まず、

Proposition 3. S が X_0 -observable ならば、

$$D(S, X_0) = \left[0, \frac{1}{|\lambda_1|}\right)$$

である。(もし $\lambda_1 = 0$ ならば、 $D(S, X_0) = [0, +\infty)$

が成り立つ。) //

証明(概略): $w \in \mathbb{C}$ に対して、 T は $Tw = w(\alpha\varphi_{11})$

とかくことが出来る。 $\alpha \in \mathbb{C}$ を之とぶことが目標になる。

$$(1.2)_t \quad \frac{dU(t)}{dt} + AU(t) = (U(t-\tau), g) \alpha \varphi_{11}$$

に $P, I-P$ を用いて、

$$(3.1) \quad \frac{dU_0(t)}{dt} = -PAU_0(t) + (U_0(t-\tau), g) \alpha \varphi_{11} \\ + (U_1(t-\tau), g) \alpha \varphi_{11}.$$

$$(3.2) \quad \frac{dU_1(t)}{dt} = -(1-P)AU_1(t)$$

但し、 $U_0 = PU$ $U_1 = (1-P)U$ とおいた。(3.2)と仮定より、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $U_1(t)$ は指数関数的に0に収束するので、(3.1)から U_1 を含む項をとった方程式

$$(3.3) \quad \frac{dV(t)}{dt} = -PAV(t) + (V, g) \alpha \varphi_{11}$$

$$(V(t) \in X_0)$$

の解 $V(t)$ が $t \rightarrow \infty$ のとき、指数関数のオーダーで0に収束するようによきをえらべば、(3.2)の解 $U(t)$ についても同じことが示せる。 $U_0(t) = X(t) \varphi_{11}$ とおくことができるので、(3.3)は

$$(3.3)' \quad \frac{dX(t)}{dt} = -\lambda_1 X(t) + \alpha \beta X(t-\tau)$$

$$(\beta \equiv (\varphi_{11}, g))$$

とかける。(3.3)'の零解の安定性は、(3.3)'の特性方程式

$$(3.4) \quad \lambda + \lambda_1 - \alpha \beta e^{-\lambda \tau} = 0$$

の解の実部の符号により、判定できる。(Hale [4],

Bellman and Cooke [1]) すなわち、(3.4)の解

(一般には可算個存在する。)の実部が全て負であるならば、正数 M, ε が存在して、(3.3)の全ての解 $X(t)$ に対して、

$$|X(t)| \leq M e^{-t\varepsilon} \quad (t \geq 0)$$

と成る。従って、安定性を調べるためには、超越方程式

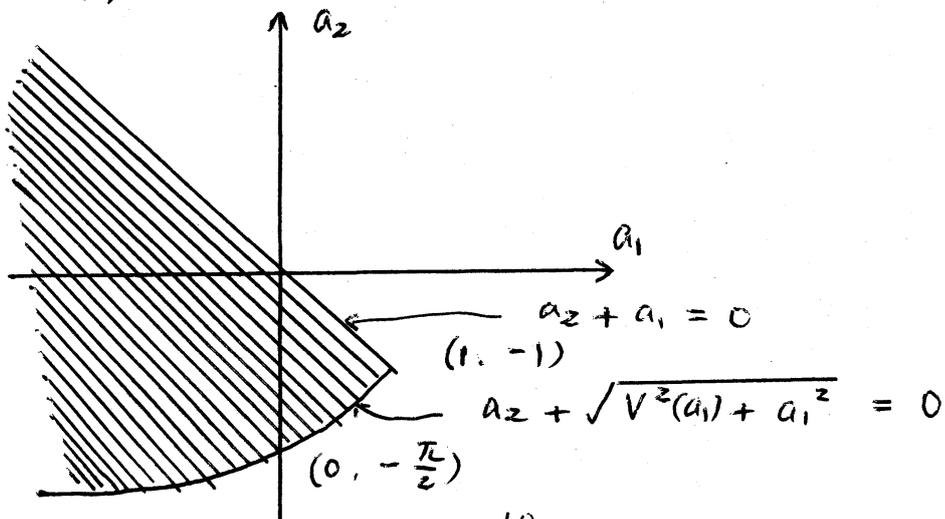
(3.4)の解の実部が全て負になるための係数 $\lambda_1, -\alpha \beta$ に

関する条件を知ることは、必要になる。これは代数方程式 ($\tau=0$ の場合に相当する。) に対しては、Routh-Hurwitz の安定条件とよばれる条件 (たとえば、Sakawa [7]) であらわされることはよく知られている。しかし、一般に、(3.4) のような方程式に対して、条件を explicit にかくことはきわめて困難であるが、さしつかえなくこの場合に限って、Hayes による結果が知られている。(Hayes [5], Bellman and Cooke [1]) をつたおち。

$\lambda e^\lambda - a_1 e^\lambda - a_2 = 0$ の全ての解 λ の実部が負である。 \iff (i) $a_1 < 1$

(ii) $a_1 < -a_2 < \sqrt{V^2(a_1) + a_1^2}$, ここで $V(a_1) =$
 " $v = a_1 \tan v$ の $(0, \pi)$ への解 但し $v(0) = \frac{\pi}{2}$
 とおく"

(図の斜線部 (境界は含まない) に (a_1, a_2) が存在すること
 と、(i), (ii) が成り立つことは同値である。)



よって $-\lambda, \tau < 1$ ならば

$$-\lambda, \tau < -\alpha\beta\tau < \sqrt{V^2(-\lambda, \tau) + \lambda^2\tau^2}$$

とわかるように α をとればよいことがわかる。(Sは X_0 -observable なのに、次の注意のように $\beta \equiv (\varphi_{11}, \theta) \neq 0$

に注意) 逆に、 $-\lambda, \tau \geq 1$ ならば、 α をどのようにとっても [5]より (3.4) の解は実数かつ正なるものが存在する。以上で証明がわかる。 //

Proposition 3. によれば $\tau > -\frac{1}{\lambda_1}$ ならば $R(\tau) \subset X_0$ なる τ をどのようにとっても、もとの系を安定化するとは不可能である。もし、我々が、 $R(\tau)$ をもっと広いクラスからとるならば、 $D(S, \tau)$ は $D(S, X_0)$ より広くなることが期待される。実際、次がわかる。

Proposition 4. (i) X_k を φ_{11} と φ_{k1} ($k > 1$) によつてはらわれる線形部分空間とする。Sが X_k -observable ならば

$$(3.5) \quad D(S, X_k) \supset \left(0, \frac{1}{|\lambda_1|} - \frac{1}{\lambda_k} + \sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_k^2}} \right)$$

(ii) $X_{k,m}$ を $\varphi_{11}, \varphi_{k1}, \varphi_{m1}$ ($k > m > 1$) によつてはらわれる線形部分空間とする。Sが $X_{k,m}$ -observable ならば

$$(3.6) \quad D(S, X_{k,m}) \supset \left[0, \right.$$

$$\left. \frac{1}{|\lambda_{11}|} - \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_m} + \sqrt{\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_k^2} + \frac{1}{\lambda_m^2} + 2\sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_k^2 + \lambda_m^2}{\lambda_1^2 \lambda_k^2 \lambda_m^2}}} \right)$$

//

註義 3.2. 1°) (i), (ii)において、それぞれ、 S が X_k -observable, $X_{k,m}$ -observableであると仮定し、 $\frac{1}{|\lambda_{11}|}$ と $D(S, X_k), D(S, X_{k,m})$ が $(0, \frac{1}{|\lambda_{11}|})$ に一致するかもしれない。

2°) (i)において、 $\lambda_k \rightarrow \infty$ とすると $D(S, X_k)$ は $\frac{2}{|\lambda_{11}|}$ まで近づける。さらに、(3.5)の右辺の半開区間は(3.6)の右辺に真に含まれる。この Proposition は、 $D(S, X_k), D(S, X_{k,m})$ そのものについてはあまりくわしい情報を与えるものではないが、それらの集合が \mathbb{R} ごとくともどこまで近づいていくかについて示唆を与えるものである。 //

証明 (概略): 証明方法を明らかにするため(i)のみを示す。 $w \in \mathbb{C}$ に対して、 T は、 $Tw = w(\alpha \varphi_{11} + \beta \varphi_{k1})$ とかける。 S は、 X_k -observable かつ、 $(\varphi_{11}, \beta) = (\varphi_{k1}, \beta) = 1$ と仮定しよう。

Proposition 3. の証明と同様にして、(1.2)を X_k 上で考え、 X_k の基底 $\{\varphi_{11}, \varphi_{k1}\}$ に関して、成分表示することにより、

$$(3.7) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & d \\ \beta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}$$

の解が、 $t \rightarrow \infty$ のとき指数関数のオーダーで 0 に収束する
 ように、 d, β をとればよいことがわかる。それには、(3.7)
 の特性方程式

$$(3.8) \quad \Delta(\lambda) \equiv \det \left(\lambda - \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix} - e^{-\lambda\tau} \begin{pmatrix} d & d \\ \beta & \beta \end{pmatrix} \right) = 0$$

の解 λ の実部が、全て負になるための条件が必要になるが、
 前にもふれたようにそれを知ることは困難である。そのため、
 ここでは Datko [3] による手技を応用してみる。[3]
 では、次のような事実が示されている。

与えられた d, β に対して、(3.8) で $\tau = 0$
 とした時の解の実部が負であるとする。(3.8)
 の解が虚軸上に存在するよう τ の下限を、
 τ_0 とする時、 $0 \leq \tau < \tau_0$ なる τ に対し
 て、(3.8) の解の実部は全て負である。

この事実は

$$H(\tau) \equiv \sup_{\lambda \in \sigma(A_\tau)} \operatorname{Re} \lambda$$

とおいた時、 $H(\tau)$ が τ の連続関数とすること、及び、 $H(0) < 0$ なることから示される。[3] では、与えられた系につ

いて、すなわち、 α, β を固定して考えているわけであるが、
 ここでは、 α, β を自由にとり、 τ_0 をある α "大きく"す
 ることが重要になる。

まず、 $\tau = 0$ のとき、(3.8)の解の実部が、全て負である
 ためには

$$(3.9) \quad -\lambda_1 - \lambda_k + \alpha + \beta < 0$$

$$(3.10) \quad \lambda_1 \lambda_k - \lambda_1 \beta - \lambda_k \alpha > 0$$

が、必要十分である。

$$(3.11) \quad G(\sqrt{-1}\mu) = 0 \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

とする。(3.11)を $e^{-\sqrt{-1}\mu\tau}$ について解き、 $\mu \in \mathbb{R}$ の
 ときに $|e^{-\sqrt{-1}\mu\tau}| = 1$ なることに注意すると、

(3.8)が "虚軸"上に解 $\sqrt{-1}\mu$ をもつならば、 μ は

$$(3.12) \quad a^2 \mu^6 + (b^2 + a^2 c^2 - 2a^2 \lambda_1 \lambda_k - a^4) \mu^4 \\
 + (b^2 c^2 + a^2 \lambda_1^2 \lambda_k^2 - 2\lambda_1 \lambda_k b^2 - 2a^2 b^2) \mu^2 \\
 + (\lambda_1^2 \lambda_k^2 b^2 - b^4) = 0$$

の実解で好くてもいい。但し

$$a \equiv \alpha + \beta$$

$$b \equiv -\lambda_1 \beta - \lambda_k \alpha$$

$$c \equiv -\lambda_1 - \lambda_k$$

とおいた。このとき、(3.12)の実解 μ に対して、 τ は(3.13)
 式で定まる；

$$(3.13) \quad I = -\frac{1}{\mu} \tan^{-1} \frac{a\mu^3 + (bc - a\lambda_1\lambda_2)\mu}{(b-ac)\mu^2 - b\lambda_1\lambda_2} \equiv J(\mu)$$

(3) をこの場合に用いる

$$\min J(\mu)$$

(\min は (3.12) の実解 μ についてとるものとする。)

が、 α はなるべく大きく β はなるべく小さくするように、 α, β を之らびごとにする。

さて、(3.12) の実解を調べる際に、計算を簡単にするため、
1つの案として、特に、

$$(3.14) \quad a = -\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$

と置いてみる。(勿論、これは (3.9) を満たす。)

このとき、(3.12) は

$$(3.15) \quad (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\mu^6 + b^2\mu^4 \\ + (a^2\lambda_2^4 + \lambda_1^4\lambda_2^2 - \lambda_2^2b^2 - \lambda_1^2b^2)\mu^2 \\ + (\lambda_1^2\lambda_2^2b^2 - b^4) = 0$$

と訂って、(3.12) にくらび、実解についての解析がより
簡単になる。残されたことは b をきめることである。ここ
で、 α, β を

$$(3.16) \quad b \equiv -\lambda_1\beta - \lambda_2\alpha \downarrow -\lambda_1\lambda_2$$

と訂るようにとると、(3.15) の任意の実解は 0 に近づくこと
が示される。(このことは、(3.15) において、 $b = -\lambda_1\lambda_2$
とおいた方程式の実解は 0 のみであることを注意すればわか

3. — 突は そのまゝに、実解が 0 だけになるように、

a, b を決めたわけである。))

(3.13) において、(3.16) とするよりに α, β をとると、

$\mu \rightarrow 0$ とし、(3.14) も考慮して、 τ は

$$\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} + \sqrt{\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2}}$$

に近づくことがわかる。これで (i) が示された。 //

注意 3.3. 以上の証明からわかるように、(3.5) の右側の半開区間の上端の値は、最良のものではないが、ここでは $D(S, Y)$ の Y を X より広くとることにより、 $D(S, X)$ を真に含むようにできることを示すのが、1つの目的であった。 //

上にあげた方法は、一般の場合にも適用できるが、その際に要する計算は、かなり複雑である。

References

- [1] Bellman, R. and Cooke, K.L., Differential-difference equations, Academic Press, New York, (1963).
- [2] Borisovič, Ju. G. and Turbabin, A. S., On the Cauchy problem for linear nonhomogeneous differential equations with retarded argument, Soviet Math. Dokl., 10, No.2, 401-405 (1969).
- [3] Datko, R., A procedure for determination of the exponential stability of certain differential-difference equations, Quart. Applied Math., 36, 279-292 (1978).
- [4] Hale, J., Theory of functional differential equations, Springer-verlag, New York - Heidelberg - Berlin, (1977).
- [5] Hayes, N. D., Roots of the transcendental equation associated with a certain difference-differential equations, J. London Math. Soc., 25, 226-232 (1950).
- [6] Nambu, T., Feedback stabilization for distributed parameter systems of parabolic type, J. Differential Equations, 33, 167-188 (1979).
- [7] 坂和智幸, 線形システム制御論, 朝倉書店, (1979).
- [8] Sakawa, Y. and Matsushita, T., Feedback stabilization of a class of distributed systems and construction of a state estimator, IEEE Trans. Automat. Control, AC-20, 748-753 (1975).
- [9] Suzuki, T. and Yamamoto, M., Observability, controllability, and feedback stabilizability for evolution equations, I., submitted to Japan Journal of Applied Mathematics.

- [10] Travis, C.C. and Webb, G.F., Existence and stability for partial functional differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., 200, 395-418 (1974).
- [11] Triggiani, R., On Nambu's boundary stabilizability problem for diffusion processes, J. Differential Equations, 33, 189-200 (1979).
- [12] Yamamoto, M., On the stabilization of parabolic equations by time-delay feedbacks, (preprint).
- [13] Yamamoto, M. and Suzuki, T., Observability, controllability, and feedback stabilizability for evolution equations, 数理解析研究所講究録 ("解の構造" 昭和58年11月7日 - 10日) to appear.