数理解析研究所講究録
528巻 1984年 85-96

Some Remarks on Stabilization of Infinite-Dimensional Control Systems via a Functional Observer

熊本大学工学部 南部隆夫 (Takao Nambu)

無限次元系の安定化には，無限次元性ゆえに起こる様々な障害がある．Hilbert 空間 H における方程式

$$\frac{dx}{dt} = -Lx + \sum_{k=1}^{M} f_k(t)\psi_k, \quad t>0, \quad x(0)=x_0 \qquad (1)$$

を考えよう．ここで，L は稠密な定義域 $\mathcal{D}(L)$ をもつ H の線形閉作用素で，$-L$ は C_0 半群 e^{-tL} の生成作用素である．観測（出力）は有限個であり

$$(x(t), g_k)_H, \quad 1 \leqslant k \leqslant N \qquad (2)$$

で与えられるとするが，境界制御系を扱う場合には少し異なった形をとる．ここで，g_k は観測の重みベクトルである．我々の問題は

g_k, ψ_k が与えられたとき，$f_k(t)$ を (2) の実現可能なフィードバックとして設計し，制御系 (1) の解 $x(t)$ が

時間とともに指数関数的に減衰するようにすることである．g_k，ψ_k の少なくとも一方が自由に設計できるベクトルであるときは，有限次元系の問題に帰着され，$f_k(t) = (x(t), g_k)_H$，$1 \leq k \leq M(=N)$ として適当な代数的条件のもとで安定化が実現できる．そうでない場合（それがこれからの主題であるが），$f_k(t)$ はつぎの Hilbert 空間 H_1 における方程式（オブザーバ）の出力として安定化を図る：

$$\left\{\begin{array}{l} f_k(t) = (v(t), \rho_k)_{H_1}, \quad 1 \leq k \leq M, \\[2mm] \dfrac{dv}{dt} = Bv + \displaystyle\sum_{k=1}^{N} (x(t), g_k)_H \xi_k + \sum_{k=1}^{M} f_k(t) \alpha_k, \\[2mm] v(0) = v_0. \end{array}\right. \qquad (3)$$

ここで，B は安定な C_0 半群 e^{tB} の生成作用素であり，ξ_k，α_k は制御器，ρ_k は観測の重みベクトルである．方程式 (1)，(3) をまとめて

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \mathcal{M} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}, \quad t > 0, \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

と書く．H_1 は無限次元（可算）ではあるが，これから扱う問題に対しては有限次元系におとすことができる．そのときオブザーバはつぎのように書ける：

$$f_k(t) = (y(t), \rho_k)_{\mathbb{R}^s},$$
$$\frac{dy}{dt} = \mathcal{F}y + \sum_{k=1}^{N} (x(t), g_k)_H \xi_k + \mathcal{G}y, \qquad y \in \mathbb{R}^s. \tag{4}$$

以後，作用素 L はつぎの条件 (A) を満たすと仮定する：

(A) resolvent $(\lambda - L)^{-1}$ は compact であり，角領域 $\Sigma = \{\lambda = \mu - b \ ; \ |\arg \mu| \leqq \alpha\}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $b > 0$，以外で存在し

$$\|(\lambda - L)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqq \frac{const}{1 + |\lambda|}, \qquad \lambda \in \Sigma^c$$

なる評価をもつ．

このとき，e^{-tL} は解析半群となる．

オブザーバ (3) の係数作用素 B にはほかにも与え方はあるが [2～4]，ここではつぎのように与える：

H_0；可算 Hilbert 空間，A；稠密な定義域 $\mathcal{D}(A)$ をもつ H_0 の正定値自己共役作用素で，compact resolvent をもつ．したがって，A に対する固有系が存在する．

$$\begin{cases} 0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_i < \cdots \longrightarrow \infty, \\ A\zeta_{ij} = \mu_i \zeta_{ij}, \quad i \geqq 1, \ 1 \leqq j \leqq n_i \ (< \infty), \\ \{\zeta_{ij}\} \ ; \ \text{a complete orthonormal system in } H_0. \end{cases}$$

$0 < a < 1$ とし，$H_1 = \mathcal{D}(\sqrt{A}) \times H_0$ における作用素

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -A & -2a\sqrt{A} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(\sqrt{A})$$

を考える．容易にわかるように

$$\sigma(B) = \{ \sqrt{\mu_i}\, \omega^{\pm} \,;\, i \geq 1 \}, \qquad \omega^{\pm} = -a \pm \sqrt{1-a^2}\, i,$$

$$B\eta_{ij}^{\pm} = \sqrt{\mu_i}\, \omega^{\pm} \eta_{ij}^{\pm}, \qquad \eta_{ij}^{\pm} = \frac{1}{2\sqrt{\mu_i}} \begin{bmatrix} \zeta_{ij} \\ \sqrt{\mu_i}\, \omega^{\pm} \zeta_{ij} \end{bmatrix}.$$

後に必要となる条件 $\sigma(-L) \cap \sigma(B) = \phi$ が成り立つように a を小さくとって $\mathrm{Tan}^{-1}(\sqrt{1-a^2}/a) > \alpha$ としておく．μ_1 は大きくとっておけばよい．H_1 の各ベクトル h は

$$h = \sum_{i,j} h_{ij}^{+} \eta_{ij}^{+} + \sum_{i,j} h_{ij}^{-} \eta_{ij}^{-}$$

と一意に展開されるが，とくに $h_{ij}^{+} = \overline{h_{ij}^{-}}$ for ${}^{\forall}i, j$ となる h の集合 $\hat{H}$ は実 Hilbert 空間になる．$B\,;\ \mathcal{D}(B) \cap \hat{H} \longrightarrow \hat{H}$ に注意する．ξ_k, α_k, ρ_k は $\hat{H}$ のベクトルとして考える．e^{tB} が解析半群であることから，作用素 $\mathcal{M}$ は $H \times H_1$ における解析半群 $e^{t\mathcal{M}}$ の生成作用素である．

条件 (A) を満たす作用素 L は具体的にはたとえば，滑らかな境界 Γ をもつ有界連結領域 $\Omega \subset R^n$ における 2

階一様楕円形作用素 $\mathcal{L}$ からつくられる場合である．即ち

$$Lu = \mathcal{L}u, \qquad u \in \mathcal{D}(L),$$

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu,$$

$$\mathcal{D}(L) = \left\{ u \in H^2(\Omega)\,;\ \frac{\partial u}{\partial \nu_L} + \sigma(\xi)u = 0,\ \xi \in \Gamma \right\}.$$

この場合，$\sigma(L)$ は実軸の $+\infty$ に漸近する放物線の内部に存在する．つぎの境界制御系

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\mathcal{L}u, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_L} + \sigma(\xi)u = \displaystyle\sum_{k=1}^{M} f_k(t)h_k(\xi), & (1)' \\ u(0,x) = u_0(x), \\ \text{観測}\ ;\ (u(t,\cdot), w_k)_\Gamma\ , \quad 1 \le k \le N & (2)' \end{cases}$$

を考える．$x(t) = L_c^{-1/4-\varepsilon}u(t,\cdot)$，（$L_c = L + c$，$c > b$）とおくと，(1)′，(2)′ はそれぞれ (1)，(2) にうつされる．ただし，$\psi_k \longrightarrow L_c^{3/4-\varepsilon}\tilde{\psi}_k$，$(x(t), g_k)_H \longrightarrow (L_c^{1/2+2\varepsilon}x(t), L_c^{*\,3/4-\varepsilon}\tilde{g}_k)$ とおきかえる．$\tilde{\psi}_k$，$\tilde{g}_k$ はそれぞれ h_k，w_k により一意に定まる $H^2(\Omega)$ の関数である．

条件 (A) が成り立つ系に対してこれまで得られた結果を制御系 (1)′, (2)′ を例にとって述べてみよう. $\mathrm{Re}\,\lambda_i < \beta$ ($\beta > 0$) となる $\lambda_i \in \sigma(L)$ を $\lambda_1, \cdots, \lambda_K$ とする. 各 λ_i に対する L の広義固有空間の次元とその基をそれぞれ m_i, $\varphi_{i1}, \cdots, \varphi_{im_i}$ とする. P_K を L の固有値 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_K\}$ に対応する射影作用素とし, 不変部分空間 $P_K L^2(\Omega)$ への L の制限を L_1 とする. 作用素 B の固有値 $\{\sqrt{\mu_k}\,\omega^{\pm}\}$ については

$$0 < {}^{\exists}\gamma < 2\ ; \qquad \sqrt{\mu_k} \leqslant \mathrm{const}\ k^{\gamma}, \qquad k \geqq 1 \tag{5}$$

が満たされると仮定する. $\beta > a\sqrt{\mu_1}$ となるように β を選んでおく. このとき

<u>Theorem 1 [3]</u>. $(-L_1,\ P_K L_c^{3/4-\varepsilon}\tilde{\varphi}_k)$ が可制御対となるように $h_1, \cdots, h_M$ が選ばれているとする.

$$\mathrm{rank}\, W_i = m_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant K, \qquad W_i = \left[(w_k, \varphi_{ij})_{\Gamma}\ ;\ \begin{matrix} k \downarrow 1, \cdots, N \\ j \rightarrow 1, \cdots m_i \end{matrix} \right],$$

$$\mathrm{rank}\, \Xi_i = N, \qquad i \geqq 1, \qquad \Xi_i = \left[\xi_{ij}^{k+}\ ;\ \begin{matrix} k \downarrow 1, \cdots, N \\ j \rightarrow 1, \cdots, n_i \end{matrix} \right] \tag{6}$$

が成り立てば, 適当な α_k, $\rho_k \in \hat{H}$ が存在して

$$\| e^{t\mathcal{M}} \|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega) \times H_1)} \leqslant \mathrm{const}\ e^{-a\sqrt{\mu_1}\,t}, \qquad t \geqslant 0.$$

さらにこのとき，オブザーバ (3) は有限次元系 (4) におとすことができて，最終的につぎの評価を得る：

$$\left\| \begin{bmatrix} u(t,\cdot) \\ y(t) \end{bmatrix} \right\|_{L^2(\Omega)\times R^s} \leqslant const\ e^{-a\sqrt{\mu_1}\,t} \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \right\|_{L^2(\Omega)\times R^s}, \quad t \geqslant 0 .$$

ここで問題になるのは仮定 (5) であって，γ が小さければ B の固有値間の gap が接近する．即ち $\inf_k(\sqrt{\mu_{k+1}} - \sqrt{\mu_k}) = 0$ であるから，仮定 (6) の後半の部分が容易にこわされる．$\gamma \geqslant 1$ にとればそれは回避できるが，もっと大きく γ をとれるか？ という疑問がわいてこよう．それはある種のクラスの作用素 L をもつ系に対しては可能である．

$\Omega\ (\subset R^n)$ を有界連結領域，$\mathcal{L}$ を Ω における $2m$ 階楕円形作用素とし，係数は必要な滑らかさをもつとする．$\mathcal{L}$ は形式的に自己共役であり，$L^2(\Omega)$ の非有界自己共役作用素 L が存在して

$$\begin{aligned} &Lu = \mathcal{L}u, \qquad u \in \mathcal{D}(L), \\ &C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{D}(L) \subset H^{2m}(\Omega) \end{aligned} \tag{7}$$

となるものとする．このとき，L は compact resolvent を

もち，$\sigma(L)$ は重複度有限の固有値のみから成る：

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots \longrightarrow \infty,$$

$$L\varphi_{ij} = \lambda_i \varphi_{ij}, \quad i \geqq 1, \quad 1 \leqq j \leqq m_i \ (<\infty),$$

$$\{\varphi_{ij}\}\ ; \quad \text{an orthonormal complete system in } L^2(\Omega).$$

各 $x > 0$ に対して

$$N(x) = \sum_{i \in I_x} m_i, \quad I_x = \{ i \in \mathbb{N}\ ;\ \lambda_i < x \}$$

とおくと，よく知られているように[1]

$$^\exists c_0 > 0\ ; \quad N(x) = c_0 x^{\frac{n}{2m}} + o(x^{\frac{n}{2m}}) \qquad \text{as } x \longrightarrow \infty \tag{8}$$

が成り立つ．この評価より，重複度 m_i の分布には無関係につぎの関係が成り立つ：

<u>Lemma 2.</u> $k \longrightarrow \infty$ のとき，λ_k は評価

$$\text{const}\ k^{\frac{2m}{n}} \leqq \lambda_k \leqq \text{const}\ c^k$$

を満たす．$c > 1$ は任意に 1 に近くとれる．

我々は $\{\lambda_k\}$ に関するつぎの付加的な情報が利用できる場合を考察する：

$$^\exists c_1 > 0\ ; \quad \lambda_{k+1} - \lambda_k \geqq \text{const}\ e^{-c_1 k}, \quad k \longrightarrow \infty. \tag{9}$$

(8) を満たす単調増加列 $\{\lambda_k\}$ に対して，(8) からはこの評価は従わないことに注意する．このとき，オブザーバ側の仮定は (5) のかわりに

$$0 < {}^{\exists}\gamma < \frac{2m}{n} \ ; \qquad \sqrt{\mu_k} \leqslant \text{const } k^{\gamma}, \quad k \geqslant 1 \qquad (5)'$$

とする．これは $2m/n > 2$ のときには (5) よりもゆるい仮定，したがって，作用素 B の固有値間の gap が十分大きくとれることを示している．(9), (5)′ の仮定のもとでは，つぎの Thm. 1 の一般化を得ることができる．

<u>Theorem 3.</u> つぎの代数的条件が成り立つとする：

$$\text{rank } \Phi_i = \text{rank } G_i = m_i \ , \qquad 1 \leqslant i \leqslant K,$$

$$\text{rank } \Xi_i = N \ , \quad i \geqslant 1 \ ,$$

ただし，

$$\Phi_i = \left[(\psi_k, \varphi_{ij}) \ ; \begin{matrix} k \to 1, \cdots, M \\ j \downarrow 1, \cdots, m_i \end{matrix} \right], \quad G_i = \left[(g_k, \varphi_{ij}) \ ; \begin{matrix} k \to 1, \cdots, N \\ j \downarrow 1, \cdots, m_i \end{matrix} \right].$$

このとき，適当な α_k, $\rho_k \in \hat{H}$ が存在して

$$\| e^{t\mathcal{M}} \|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega) \times H_1)} \leqslant \text{const } e^{-a\sqrt{\mu_1}\, t} \quad , \quad t \geqslant 0 .$$

Thm. 1 と同様にして，オブザーバ (3) は (4) におとすことができる．(1), (4) をまとめて

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathcal{N}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

と書くことにすれば，評価

$$\| e^{t\mathcal{N}} \|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega)\times R^s)} \leqslant const\ e^{-a\sqrt{\mu_1}\,t}, \qquad t \geqslant 0$$

を得る．$\mathcal{N}$ は compact resolvent をもつことが示される．上の評価式より $\sigma(\mathcal{N}) \subset \{\lambda;\ Re\,\lambda \leqslant -a\sqrt{\mu_1}\}$ であるが，さらにつぎの結果が成り立つ：

<u>Lemma 4.</u> 作用素 $\mathcal{N}$ の固有値が直線 $Re\,\lambda = -a\sqrt{\mu_1}$ 上にあったとしても，その点における $(\lambda - \mathcal{N})^{-1}$ の極は 1 位である．

このLemmaにより容易につぎの結果を得る：

<u>Proposition 5.</u> 各整数 $k \geqslant 1$ に対して，評価

$$\| \mathcal{N}^k e^{t\mathcal{N}} \|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega)\times R^s)} \leqslant const\ \max(t^{-k}, 1)\, e^{-a\sqrt{\mu_1}\,t}, \qquad t > 0$$

が成り立つ．

Prop. 5 を $k = 1$ のときに用いると，つぎの結果が成り立つことがわかる：

<u>Corollary 6.</u> Thm. 3 の仮定のもとでは

$$\| x(t) \|_{\mathscr{D}(L)} \leqslant const\ e^{-a\sqrt{\mu_1}\,t} \left(\| x_0 \| + | y_0 | \right), \quad t \geqq 1$$

が成り立つ.

追記. 筆者は最近になって，つぎのようなより強い結果を得た：

Thm. 3 を得るためには，作用素 L の固有値間の gap に対する仮定 (9) は取り除くことができる. さらに，オブザーバ側の仮定 (5)′ において，γ は任意の正数でよい.

この主張により，安定化に際して作用素 L の固有値に関する完全な情報を得る必要はなくなり，また，オブザーバ側に対する制約が大巾にゆるめられたことになる.

References

1. S. Agmon, "Lectures on Elliptic Boundary Value Problems," Van Nostrand, Princeton, N. J., 1965.

2. T. Nambu, On the stabilization of diffusion equations: Boundary observation and feedback, J. Differential Equations 52(1984), to appear.

3. T. Nambu, On stabilization of partial differential equations of parabolic type: Boundary observations and feedback, submitted.

4. Y. Sakawa, Feedback stabilization of linear diffusion systems, SIAM J. Control & Optimization 21(1983), 667-676.

5. R. F. Curtain, Finite dimensional compensators for parabolic distributed systems with unbounded control and observations, to appear in SIAM J. Control & Optimization.

January 23-26, 1984, in "Mathematical Theory of Control and Systems" at Kyoto University