数理解析研究所講究録
528巻 1984年 23-42

状態方程式モデルの拡大と縮小

神戸大学工学部　池田雅夫（Masao Ikeda）

1. はじめに

動的システムの解析・設計に使われる状態方程式モデルでは，システム外部の入力と出力が一般に物理量であるのに対し，内部の状態は物理的意味をもつことを要求されない．状態とは，過去の入力がシステムの将来の振舞いに与える影響についての情報すべてを蓄積している変数で，この性質さえもっていれば何でもよい [1]．したがって，状態空間の座標変換は自由で，全く数学的に考えることができる．実際，数式モデルとしての状態方程式の構造が簡単で見通しのよいものになるようないくつもの座標変換が提案され，解析・設計に有効であることが示されている [1]．

このようなこれまでに考えられてきた状態空間の変換は，座標系の基底を変えるだけの等価変換であった．本稿では，これを拡張し，空間の次元をも変えることを許す変換 [2, 3]

について述べる．つまり，状態空間の高次元化による拡大モデルと低次元化による縮小モデルを考える．高次元化をすれば当然もとのモデルにはなかった（不必要な）情報をももつことになり，したがって拡大モデルは冗長なモデルである．逆に，低次元化を行えばもとのモデルのもつ情報の一部は欠落するので，縮小モデルはこの意味で不充分なモデルである．このような冗長性や不充分性といった性質は短所であるが，それらを補うだけの有用性をもつ取扱いやすさをこれらのモデルはもつことができる[4，5]．

本稿では，簡単のため，線形時間不変かつ有限次元の連続時間システムを対象として議論を進めるが，ここで述べる拡大，縮小の概念は非線形システム[6，7，8，9]，時変システム[8，10]，無限次元システムであるむだ時間システム[11]に対しても同様に適用することができる．また，離散時間システムへの拡張も容易である．

2．モデルの包含の概念

線形時間不変の2つの状態方程式表現

$$S:\quad \dot{x} = Ax + Bu, \qquad y = Cx \tag{1}$$

$$\tilde{S}:\quad \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u}, \qquad \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} \tag{2}$$

を考えよう．ここに，x，u，yはそれぞれSの状態，入力，

出力を表わすn, m, p次元のベクトル, $\tilde{x}$, $\tilde{u}$, $\tilde{y}$は$\tilde{S}$のそれらを表わす$\tilde{n}$, $\tilde{m}$, $\tilde{p}$次元のベクトルである. そして, A, B, C, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$はこれらのベクトルの次元に応じた大きさの定数行列である. 以下では, 初期状態 x_0, $\tilde{x}_0$, 入力 $u(t)$, $\tilde{u}(t)$に対するSと$\tilde{S}$の状態の振舞いをそれぞれ $x(t; x_0, u)$, $\tilde{x}(t; \tilde{x}_0, \tilde{u})$ で表わす. また, それらに対応する出力を $y[x(t)]$, $\tilde{y}[\tilde{x}(t)]$で表わす.

ここで, われわれは$\tilde{S}$の状態空間はSの状態空間より次元が高いか等しいと仮定する. 一方, 入力空間と出力空間の次元はSと$\tilde{S}$において等しいとする. すなわち,

$$\tilde{n} \geq n, \qquad \tilde{m} = m, \qquad \tilde{p} = p \tag{3}$$

である. そして, Sと$\tilde{S}$の状態空間の間に次のような線形変換を考える.

$$\tilde{x} = Vx, \qquad x = U\tilde{x} \tag{4}$$

ここに, Vは列最大階数をもつ $\tilde{n} \times n$ 定数行列, Uは行最大階数をもつ $n \times \tilde{n}$ 定数行列で

$$UV = I_n \tag{5}$$

を満たすとする. この式において, I_nはn次元単位行列である.

以上の準備のもとに, モデルの包含関係の概念は次のように定義される [2, 3].

[定義1]　Sの任意の初期状態 x_0 と任意の入力 $u(t)$ に対して $\tilde{S}$ のそれらを

$$\tilde{x}_0 = Vx_0$$

$$\tilde{u}(t) = u(t), \quad t \geq 0 \tag{6}$$

と選んだとき,

$$x(t;x_0,u) = U\tilde{x}(t;\tilde{x}_0,\tilde{u})$$

$$y[x(t)] = \tilde{y}[\tilde{x}(t)], \quad t \geq 0 \tag{7}$$

が成立するような行列の組（U, V）が存在するならば, $\tilde{S}$ はSを包含するという.

この定義によれば, $\tilde{S}$ はSの振舞いに関する情報をすべてもっており, この意味で包含という語が使われている. したがって, $\tilde{S}$ からSの性質に関するすべての知見を得ることができる. たとえば, $\tilde{S}$ が安定ならば, Sも安定である [2]. 上で仮定したように $\tilde{S}$ はSより高次元, つまりSは $\tilde{S}$ より低次元であるから, $\tilde{S}$ がSを包含するとき, $\tilde{S}$ をSの拡大モデル, Sを $\tilde{S}$ の縮小モデルと呼ぶ.

$\tilde{S}$ がSを包含するための条件は, それらの振舞いが

$$x(t;x_0,u) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$\tilde{x}(t;\tilde{x}_0,\tilde{u}) = e^{\tilde{A}t}\tilde{x}_0 + \int_0^t e^{\tilde{A}(t-\tau)}\tilde{B}\tilde{u}(\tau)d\tau$$

$$y[x(t)] = Cx(t;x_0,u)$$
$$\tilde{y}[\tilde{x}(t)] = \tilde{C}\tilde{x}(t;\tilde{x}_0,\tilde{u}) \tag{8}$$

と書けることを使うと，簡単に求まる[3].

[定理1]　$\tilde{S}$がSを包含するための必要十分条件は，

$$A^i = U\tilde{A}^iV, \qquad A^iB = U\tilde{A}^i\tilde{B}$$
$$CA^i = \tilde{C}\tilde{A}^iV, \qquad CA^iB = \tilde{C}\tilde{A}^i\tilde{B}$$
$$i = 0, 1, 2, \cdots \tag{9}$$

が成立するような行列の組（U，V）が存在することである.

さて，拡大や縮小のための変換行列U，Vが指定されているときには，Sと$\tilde{S}$の係数行列を

$$\tilde{A} = VAU + M, \qquad \tilde{B} = VB + N$$
$$\tilde{C} = CU + L \tag{10}$$

のように関係付けることができる．ここに，M，N，Lは(10)式の両辺を一致させるために導入された補助的な定数行列である．それらを使って定理1の包含条件を次のように言い換えることができる[3].

[定理2]　$\tilde{S}$がSを包含するための必要十分条件は，

$$UM^iV = 0, \qquad UM^{i-1}N = 0$$
$$LM^{i-1}V = 0, \qquad LM^{i-1}N = 0$$
$$i = 1, 2, \cdots, \tilde{n} \tag{11}$$

が成立することである.

以上で述べた包含の概念によると，Sに対するどのような知見も$\tilde{S}$を用いて得ることができ，$\tilde{S}$に対するある程度の知見をSより得ることができる．この事実に基づいてフィードバック系を設計するためには，モデルの包含関係だけでなく，フィードバック制御則に関する包含の概念も必要である．

いま，Sに対する状態フィードバック則

$$u = Kx + v \tag{12}$$

と$\tilde{S}$に対する状態フィードバック則

$$\tilde{u} = \tilde{K}\tilde{x} + \tilde{v} \tag{13}$$

を考えよう．ここに，Kと$\tilde{K}$は適当な大きさの定数行列で，フィードバックゲインを表わし，vと$\tilde{v}$はそれぞれこれらのフィードバックをほどこして得られる閉ループ系の入力である．

［定義2］　$\tilde{S}$がSを包含するとしよう．Sの任意の初期状態x_0と任意の入力$u(t)$に対して$\tilde{S}$のそれらを

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= V x_0 \\ \tilde{u}(t) &= u(t), \qquad t \geq 0 \end{aligned} \tag{14}$$

と選んだとき，

$$K x(t; x_0, u) = \tilde{K}\tilde{x}(t; \tilde{x}_0, \tilde{u}), \qquad t \geq 0 \tag{15}$$

が成立するならば，(13)式のフィードバック則は(12)式のフィードバック則を包含するという．

この定義によれば，2つのフィードバック則は同一の入力を発生することができる．したがって，モデルとフィードバック則の両方について包含関係が成立するとき，$\tilde{S}$に基づく閉ループ系

$$\dot{\tilde{x}} = (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{v}, \qquad \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} \tag{16}$$

は，Sに基づく閉ループ系

$$\dot{x} = (A + BK)x + Bv, \qquad y = Cx \tag{17}$$

を包含する．

フィードバック則に対する包含条件は次の通りである．

［定理3］　(13)式のフィードバック則が(12)式のフィードバック則を包含するための必要十分条件は，

$$KA^i = \tilde{K}\tilde{A}^i V, \qquad KA^iB = \tilde{K}\tilde{A}^i\tilde{B}$$
$$i = 0, 1, 2, \cdots \tag{18}$$

が成立することである．

この結果は定理1と同様に導くことができる．

2つのフィードバックゲインを

$$\tilde{K} = KU + F \tag{19}$$

のように補助的な定数行列Fを用いて関係付けると，包含条件は次のようにいえる[2]．

［定理4］　(13)式のフィードバック則が(12)式のフィードバック則を包含するための必要十分条件は，

$$FM^{i-1}V = 0 , \qquad FM^{i-1}N = 0$$
$$i = 1, 2, \cdots, \tilde{n} \tag{20}$$

が成立することである.

この定理によると, S に対するフィードバックゲイン K は常に $\tilde{S}$ に対するフィードバックゲイン $\tilde{K}$ に (19) 式を用いて拡大可能であり, 行列 F は (20) 式を満たす範囲で自由に選択できる. それに対して, $\tilde{K}$ はいつでも縮小できるとは限らず, もしできるとすれば (20) 式より $K = \tilde{K}V$ であるから, $F = \tilde{K}(I - VU)$ について (20) 式の条件が成立するときである.

3. 低次元モデル

これまでに述べてきたことからわかるように, S が $\tilde{S}$ に包含されるならば, S は $\tilde{S}$ に関する情報を完全でないがもっている. したがって, S を $\tilde{S}$ の1つの低次元モデルとして解析や設計の簡単化のために用いることができる. ここでは, 一般的な縮小モデルよりも, その2つの特別な場合を中心に考える [3].

[定義3]　行最大階数をもつ適当な行列 U について, S と $\tilde{S}$ の係数行列の間に

$$U\tilde{A} = AU , \qquad U\tilde{B} = B , \qquad \tilde{C} = CU \tag{21}$$

の関係が成立するとき, S を $\tilde{S}$ の集約モデルと呼ぶ.

もともと集約モデルは出力を考えずに定義されたが[12]，ここでは全体の流れより，出力をも含んだ形が自然である．

［定義4］　列最大階数をもつ適当な行列Vについて，Sと$\tilde{S}$の係数行列の間に

$$\tilde{A}V = VA, \qquad \tilde{B} = VB, \qquad \tilde{C}V = C \tag{22}$$

の関係が成立するとき，Sを$\tilde{S}$の制限モデルと呼ぶ．

これらの定義の条件が成立するとき，定理1の包含条件が満たされることは簡単にわかる．したがって，集約モデルも制限モデルもともに縮小モデルである．以下では，それらのモデルがもとのモデルの何を表わしているか見ていこう．

まず，集約モデルの条件(21)式が成り立つとき，(8)式を用いると，次の関係を簡単に導くことができる．すなわち，$\tilde{S}$の任意の初期状態 $\tilde{x}_0$ と任意の入力 $\tilde{u}(t)$ に対して，Sのそれらを

$$\begin{aligned} x_0 &= U\tilde{x}_0 \\ u(t) &= \tilde{u}(t), \qquad t \geq 0 \end{aligned} \tag{23}$$

と選べば，

$$\begin{aligned} x(t;\, x_0,\, u) &= U\tilde{x}(t;\, \tilde{x}_0,\, \tilde{u}) \\ y[x(t)] &= \tilde{y}[\tilde{x}(t)], \qquad t \geq 0 \end{aligned} \tag{24}$$

が成立する．つまり，$\tilde{S}$の状態の振舞いをUを介して写像したものがSの状態の振舞いであり，両者の出力は一致してい

る．

この事実をもう少し詳しく見るために，

$$T = \begin{bmatrix} U \\ U^c \end{bmatrix} \begin{array}{l})\ n \\ )\ \tilde{n}-n \end{array} \qquad (25)$$

という正方行列を用いた $\tilde{S}$ の座標変換

$$T\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l})\ n \\ )\ \tilde{n}-n \end{array} \qquad (26)$$

を考えよう．ここに，U^c は与えられた U に対して T が正則になるように選ばれた任意の行列である．T の逆行列を

$$T^{-1} = [\,\overbrace{V}^{n}\ \ \overbrace{V^c}^{\tilde{n}-n}\,] \qquad (27)$$

と書くと，$\tilde{S}$ を等価変換したものは次のように表わすことができる．

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \underset{T\tilde{A}T^{-1}}{\begin{bmatrix} A & 0 \\ U^c\tilde{A}V & U^c\tilde{A}V^c \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \underset{T\tilde{B}}{\begin{bmatrix} B \\ U^c\tilde{B} \end{bmatrix}} \tilde{u}$$

$$\tilde{y} = \underset{\tilde{C}T^{-1}}{[\ C \ \vdots\ 0\ ]} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \qquad (28)$$

ただし，ここでは(21)式の条件を用いている．

この表現には，破線で示したように，集約モデルが明確に

現れている．すなわち，$\tilde{x}_1$ に対応する部分がそれである．係数行列の構造からわかるように，それは $\tilde{A}$ の不変部分空間の直交補空間であり，かつ可観測な部分をすべて含んでいる．したがって，集約モデルはもとのモデルから $\tilde{A}$ のある不変部分空間を除いたものであり，このような意味をもつ低次元モデルである．

次に，制限モデルについて考えよう．この場合，S の任意の初期状態 x_0 と任意の入力 $u(t)$ に対して，$\tilde{S}$ のそれらを

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= V x_0 \\ \tilde{u}(t) &= u(t), \qquad t \geq 0 \end{aligned} \tag{29}$$

と選ぶと

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t;\tilde{x}_0,\tilde{u}) &= V x(t;x_0,u) \\ \tilde{y}[\tilde{x}(t)] &= y[x(t)], \qquad t \geq 0 \end{aligned} \tag{30}$$

が成り立つことが，(8) 式と (22) 式より導ける．つまり，制限モデルの状態の振舞いは，もとのモデルの状態空間の V の値域に制限されたものに対応し，両者の出力は同一である．

この事実もやはり $\tilde{S}$ を等価変換することによって，より具体的に理解できる．そのために，正方行列 T を次のように定義しよう．

$$T = [\, \overset{n}{\overbrace{V}} \quad \overset{\tilde{n}-n}{\overbrace{V^c}} \,]^{-1} \tag{31}$$

ここに，V^c は与えられた V に対して $[V \quad V^c]$ が正則になるように選ばれた任意の行列である．その T を (25) 式のように書いて，(26) 式の座標変換を $\tilde{S}$ にほどこし，(22) 式の条件を用いると

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \hline \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c:c} A & U\tilde{A}V^c \\ \hdashline 0 & U^c\tilde{A}V^c \end{array}\right]}_{T\tilde{A}T^{-1}} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \hline \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ \hline 0 \end{bmatrix}}_{T\tilde{B}} \tilde{u}$$

$$\tilde{y} = \underbrace{\left[\begin{array}{c:c} C & \tilde{C}V^c \end{array}\right]}_{\tilde{C}T^{-1}} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \hline \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \tag{32}$$

が得られる．この表現にも制限モデルが明確に現れており，その状態空間（ $\tilde{x}_1$ の部分）は $\tilde{A}$ の不変部分空間で，$\tilde{S}$ の可制御部分をすべて含んでいる．つまり，制限モデルはもとのモデルから $\tilde{A}$ のある不変部分空間に当る部分を取り出したものということができる．

以上，縮小モデルの２つの特別な場合である集約モデルと制限モデルについて述べてきた．定理１の条件を満たす一般の縮小モデルはこれら２つのモデルが混合したようなものであることが知られており，S が $\tilde{S}$ の縮小モデルならば，$\tilde{S}$ は状態空間の適当な座標変換により，S を明確に含んだ次の形に等価変換できる [3]．

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & A & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} * \\ B \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u}$$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} 0 & C & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} \tag{33}$$

ここに，＊は零とは限らない部分行列を表わす．これからもわかるが，$\tilde{S}$から縮小モデルSを得るには，状態空間から$\tilde{A}$のある不変部分空間を取り出して得られる制限モデルから，ある不変部分空間を除く集約モデルを作ればよい．また，その逆の操作によっても縮小モデルを得ることができる．

以上のような低次元モデルをフィードバック系の設計に用いると，もとのモデルを用いるよりフィードバックゲインは簡単に計算できる．それをもとのモデルに適用するには，前節で述べたように(19)式を用いて拡大すればよい．ただし，このフィードバックゲインは，もとのモデルについていえば，欠落した情報のもとで計算されたものであるから，いつでも満足できる結果を与えるとは限らない．結果の良し悪しは，もとのモデルから低次元モデルを作るとき，どのような部分が欠けたかによる．低次元モデルに保存されなかった部分が充分に安定ならば，ここで述べた低次元モデルを用いた設計

は一般に有効である [5].

4. 重複サブシステム

この節では，モデルの拡大の概念の応用を述べよう．

いま，

$$S:\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}B_{11} & 0\\ B_{21} & B_{22}\\ 0 & B_{32}\end{bmatrix}}_{B}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix} \tag{34}$$

のように表わされるシステムが与えられたとする．ここに，x_1，x_2，x_3 は状態 $x=[x_1^T\ x_2^T\ x_3^T]^T$ の部分ベクトルで，それぞれ n_1，n_2，n_3 次元，u_1，u_2 は入力 $u=[u_1^T\ u_2^T]^T$ の部分ベクトルである．

このモデルは2つのサブシステム

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{11}\\ B_{21}\end{bmatrix}u_1$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{22} & A_{23}\\ A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{22}\\ B_{32}\end{bmatrix}u_2 \tag{35}$$

から成る結合システムを表わしたものとする．これらのサブシステムは，全体のモデル(34)式の中で破線で示されているように，重複している．実際のシステムを対象としたとき，

このようにサブシステムに重複を許した方が自然な場合は多い[2, 4, 13].

このシステムに対して，サブシステムごとの状態フィードバック

$$u_1 = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{36}$$

による分散制御を考えよう．その目的は具体的には考えないが，たとえば安定化である．このような問題が与えられたとき，一般には，まずサブシステム・レベルでフィードバックゲインを決定し，それを各サブシステムに適用したのちサブシステム間結合に関する知識を合わせて，全体システムが望ましいものになっているか確かめるという方法がとられる．実際，このような考えで，いくつもの設計法が提案されている[14, 15].

ところで，ここで考えているようにサブシステムが重複している場合には，サブシステム間の結合関係が明確でない．それは，サブシステムの外部だけでなく，内部でも結合しているからである．その不明確さをモデルの上で解決し，重複のないサブシステムの場合について開発された方法を適用可能にするのが，拡大の概念である．

いま，

$$V = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I_2 & \frac{1}{2}I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \tag{37}$$

とし，これらを用いて線形変換

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \tag{38}$$

を考えよう．ここに，I_1，I_2，I_3 は n_1，n_2，n_3 次元の単位行列，$\tilde{x}_1$，$\tilde{x}_2$ は (n_1+n_2)，(n_2+n_3) 次元のベクトルである．そして，

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}A_{12} & -\frac{1}{2}A_{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}A_{22} & -\frac{1}{2}A_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A_{22} & \frac{1}{2}A_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A_{32} & \frac{1}{2}A_{32} & 0 \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{39}$$

とおくと，定理2により，拡大モデル

$$\tilde{S}: \left[\begin{array}{c} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \hline \dot{\tilde{x}}_2 \end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & 0 & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & A_{23} \\ \hline A_{21} & 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & 0 & A_{32} & A_{33} \end{array}\right]}_{\tilde{A}} \left[\begin{array}{c} \tilde{x}_1 \\ \hline \tilde{x}_2 \end{array}\right] + \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ 0 & B_{32} \end{array}\right]}_{\tilde{B}} \left[\begin{array}{c} u_1 \\ \hline u_2 \end{array}\right] \tag{40}$$

が得られる.

この拡大モデルには破線で示したようにサブシステムが重複のない形で現れており，またそれはもとのモデルに関する情報をすべてもっている．したがって，このモデルを対象に，重複のないサブシステムの場合に対する手法を適用して，分散状態フィードバック則

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \hdashline u_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} \tilde{K}_1 & 0 \\ \hdashline 0 & \tilde{K}_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \hdashline \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \tag{41}$$

を定めることができる．しかも，定理4を用いると，この制御則は常にもとのモデルに対するフィードバック則

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} & 0 \\ 0 & \tilde{K}_{23} & \tilde{K}_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{42}$$

に縮小可能であることを示すことができる．ここに，$\tilde{K}_{11}$，$\tilde{K}_{12}$ は $\tilde{K}_1 = [\tilde{K}_{11} \ \tilde{K}_{12}]$ の部分行列，$\tilde{K}_{23}$，$\tilde{K}_{24}$ は $\tilde{K}_2 = [\tilde{K}_{23} \ \tilde{K}_{24}]$ の部分行列である．この制御則は (36) 式のものと等価であるから，求めるものである．

このように，拡大を用いることによって，全体としては高次元になるにもかかわらず，システムの設計を簡単に行うことができる．ここではサブシステムが2つの場合についてしか述べなかったが，ここで述べた方法が3つ以上のサブシス

テムの場合にも容易に適用できることは明らかであろう.

5. おわりに

以上, 状態方程式モデルの拡大と縮小の概念およびそれらの応用について述べた. 本稿では, 状態空間についてのみ拡大と縮小を考えたが, この概念を入力空間や出力空間まで拡げることができる. そうすることによって, 分散制御方策の選択の幅を広く考えることができる[16].

参考文献

[1] 計測自動制御学会(編), 自動制御ハンドブック・基礎編, オーム社, 1983.

[2] M. Ikeda and D. D. Siljak, "Overlapping decompositions, expansions, and contractions of dynamic systems", Large Scale Systems, 1 (1980), 29-38.

[3] M. Ikeda, D. D. Siljak, and D. E. White, "An inclusion principle for dynamic systems", IEEE Trans., AC-29 (1984), (to appear).

[4] M. Ikeda, D. D. Siljak, and D. E. White, "Decentralized control with overlapping information sets", J. Optimization Theory and Applications, 34 (1981),

279-310.

[5] M. E. Sezer and D. D. Siljak, "Validation of reduced order models for control system design", J. Guidance, 5 (1982), 430-437.

[6] M. Ikeda and D. D. Siljak, "Generalized decompositions and stability of nonlinear systems", Proc. 18th Allerton Conference, 1980, pp. 726-734.

[7] M. Ikeda and D. D. Siljak, "Lotka-Volterra equations: Decomposition, stability, and structure, Part I: Equilibrium analysis", J. Mathematical Biology, 9 (1980), 65-83.

[8] M. Ikeda and D. D. Siljak, "Lotka-Volterra equations: Decomposition, stability, and structure, Part II: Nonequilibrium analysis", J. Nonlinear Analysis, 6 (1982), 487-501.

[9] M. Ikeda and D. D. Siljak, "Generalized decompositions of dynamic systems and vector Lyapunov functions", IEEE Trans., AC-26 (1981), 1118-1125.

[10] M. Ikeda, D. D. Siljak, and D. E. White, "Expansions and contractions of linear time-varying systems", Proc. 21st CDC, 1982, pp. 1202-1209.

[11] Y. Ohta and D.D. Siljak, "An inclusion principle for hereditary systems", J. Mathematical Analysis and Applications, 98 (1984), 581-598.

[12] M. Aoki, "Aggregation", in Optimization Methods for Large-Scale Systems, D.P. Wismer, ed., McGraw-Hill, 1971, pp. 191-232.

[13] 池田, "大規模システムの理論 — 分割による取扱い —", システムと制御, 24 (1980), 528-535.

[14] D.D. Siljak, Large-Scale Dynamic Systems, North-Holland, 1978.

[15] M. Jamshidi, Large-Scale Systems, North-Holland, 1983.

[16] M. Ikeda and D.D. Siljak, "Overlapping decentralized control with input and output inclusion", Proc. IFAC 9th World Congress, 1984, (to appear).