

## 偶数次元空間における散乱理論

茨城大学 教育 曾我日出夫

### 序

$\Omega$  を Euclid 空間  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) 内の有界な物体とし、 $\Omega = \mathbb{R}^n - \Omega$  は連結な領域になっているとする。さらに境界  $\partial\Omega$  は滑らかであるとする。次の波動方程式で表される  $\Omega$  による散乱を考える。

$$(0.1) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) u = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^1, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}^1, \\ u|_{t=0} = f_1(x) & \text{on } \Omega, \\ \partial_t u|_{t=0} = f_2(x) & \text{on } \Omega. \end{cases}$$

この散乱問題について Lax-Phillips は、空間次元  $n$  が奇数のときは [1] において、偶数のときは [2] において考察している。

かれらの定義に従うと scattering operator  $S$  は、

$$S = T_0^+ (W_+)^{-1} W_- (T_0^-)^{-1}$$

と表すことができる。ここで、 $T_0^\pm$  は free space  $\mathbb{R}^n$  の初期値に関する translation representation であり、 $W^\pm$  は wave operator である。 $T_0^\pm, W^\pm$  については後に詳しく述べる。 $S$  は  $L^2(\mathbb{R}^1 \times S^{n-1})$  ( $S^{n-1}$  は  $(n-1)$  次元球面) 上の unitary operator となり、次のように kernel 表示できる(詳しくは [3] 又は [6] を見よ)。

$$(Sk)(s, \theta) = \iint_{\mathbb{R}^1 \times S^{n-1}} S(s-\tilde{s}, \theta, \omega) k(\tilde{s}, \omega) d\tilde{s} d\omega.$$

本稿では、 $n=3$  のとき Majda [3] によって得られた  $S(s, \theta, \omega)$  (scattering kernel) の表現式が、一般に  $n \geq 2$  のときにも拡張できることを、特に  $n$  が偶数のときその証明には Majda [3] の方法をかなり改良しなくてはならないことを説明したい。次に、Lax - Phillips [1, 2] にある wave operator  $W_\pm$  を定義しようとする。  $n=2$  のときには  $n \geq 3$  のときに無い困難があることについて述べたい。

### §1. Scattering kernel $S(s, \theta, \omega)$ の表現式

Majda [3] は  $n=3$  として次のことを示した。 $r(\omega) = \min_{x \in \Omega} x \cdot \omega$  とすると、任意の  $\omega \in S^2$  に対して、

$$\text{supp } S(s, -\omega, \omega) \subset (-\infty, -2r(\omega)]$$

が成立し、 $s = -2r(\omega)$  で  $S(s, -\omega, \omega)$  は singular ( $C^\infty$  でない) になっている。また著者 [5, 6] は、 $\Omega$  が convex でなければ  $\omega \in$

$S^{n-1}$  を適当にとると  $S(\cdot, -\omega, \omega)$  は少なくとも 2 点で singular になり、 $\Omega$  が strictly convex ならば任意の  $\omega \in S^{n-1}$  に対して  $S(\cdot, -\omega, \omega)$  は唯一点で singular であることを示した。これらの証明の出発点になったのは次の  $S(s, \theta, \omega)$  の表現式 (1.1) である。

定理 1.1.  $V(x, t; \omega)$  を次の方程式の解とする。

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)V = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}^1, \\ V = -2^{-1}(-2\pi i)^{-n+1} \delta(x \cdot \omega - t) & \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}^1, \\ V = 0 & \text{for } t < \tau(\omega). \end{cases}$$

この  $V(x, t; \omega) (\in C_{x, \omega}^{\infty}(\mathcal{L}_t^+))$  を使って  $S(s, \theta, \omega)$  は次のように表せる。

$$(1.1) \quad S(s, \theta, \omega) = \int_{\partial\Omega} \{ \partial_t^{n-2} \nu V(x, x \cdot \theta - s; \omega) - \nu \cdot \theta \partial_t^{n-1} V(x, x \cdot \theta - s; \omega) \} dS_x \quad (\theta \neq \omega).$$

ここで  $\nu$  は  $\partial\Omega$  の単位外法ベクトルである。

$n=3$  のとき、Majda [3] によって上の表現式 (1.1) が証明された。その証明の手順を粗く言うと次の通りである。 $\tilde{t}$  を十分大きいパラメータとし、 $R_{\tilde{t}}(x, t)$  を次の方程式の解とする。

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) R_{\tilde{t}} = \delta(x - (\tilde{t} + s)\theta) \delta(t - \tilde{t}) & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^1, \\ R_{\tilde{t}} = 0 & \text{for } t > \tilde{t}. \end{cases}$$

$\partial_t u((\tilde{t} + s)\theta, t) = \iint_{\Omega \times [\tau, \omega)} (\partial_t^2 - \Delta) R_{\tilde{t}} \partial_t u \, dx \, dt$  となることに注意して Green の公式を使うと混合問題 (0.1) の解  $u(x, t)$  に対して

$$4\pi\tilde{t}\partial_t u((\tilde{t}+s)\theta, t) = 4\pi\tilde{t} \iint_{\partial\Omega \times (T, +\infty)} \{R_{\tilde{t}}\partial_{\nu}\partial_t u - \partial_{\nu}R_{\tilde{t}}\partial_t u\} dS_x \\ + 4\pi\tilde{t} \int_{\Omega} \left\{ \partial_t R_{\tilde{t}}\partial_t u - R_{\tilde{t}}\partial_t^2 u \right\} \Big|_{t=T} dx$$

が成立する。下の補題 1.2 を使うと、 $\tilde{t} \rightarrow +\infty$  のとき上の左辺は  $(S_k)(s, \theta)$  に収束することが分かる。さらに右辺の第 2 項  $4\pi\tilde{t} \int_{\Omega} \left\{ \partial_t R_{\tilde{t}}\partial_t u - R_{\tilde{t}}\partial_t^2 u \right\} \Big|_{t=T} dx$  は (粗く云えば)  $k(s, \theta)$  に収束する。したがって、 $\tilde{t} \rightarrow +\infty$  としたときの右辺の第 1 項の極限を求め、その中にある  $\partial_t u(x, t)$  を  $k(s, \omega)$  で表せば表現式 (1.1) が得られることになる。

補題 1.2. 初期値が  $f$  である free space  $\mathbb{R}^n$  の Cauchy 問題の解を  $u_0(x, t)$  とする。このとき、 $T_0^+ f$  の  $T_0^- f \in \mathcal{S}$  又は  $f(x) \in \mathcal{S}$  ならば

$$T_0^+ f(s, \theta) = \lim_{\tilde{t} \rightarrow +\infty} 2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \tilde{t}^{\frac{n-1}{2}} \partial_t u_0((\tilde{t}+s)\theta, \tilde{t})$$

が成立する。

$n$  が奇数のときは大きな困難なしに上の Majda の手順を踏襲すれば定理 1.1 <sup>(が証明)</sup> ができる。しかし、 $n$  が偶数のときも含めてやろうとすると、彼の方法をかなり改良しなくてはならない。それはまず、補題 1.2 が  $n$  が奇数のときは Lax-Phillips によって確かめられているが、 $n$  が偶数のときは証明されていないこと、次に Majda [3] は Huygens の原理 ( $\text{supp}[R_{\tilde{t}}] \subset \{(x, t) : |x - (\tilde{t}+s)\theta| = \tilde{t} - t\}$  となること) を証明に使っているが、 $n$  が偶数のときはこのようなことは期待できないことにある。詳しい証明については著者の論文 [6] を見られたい。

Melrose [4] も (1.1) と同等の表現式を得ていることを注意しておきたい。

## §2. Wave operator $W_{\pm}$ の定義

この節では、まず Lax-Phillips [1, 2] の translation representation  $T_0^{\pm}$  を簡単に紹介し、次に wave operator  $W_{\pm}$  の定義とそのとき生じる問題点について述べたい。

free space  $R^n$  の初期値  $f = (f_1, f_2)$  の空間として  $C_0^{\infty}(R^n)$  を次の energy norm で完備化したもの  $H_0$  を導入する。

$$\|f\|_E^2 = \frac{1}{2} \int (|\nabla f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2) dx.$$

$U_0(x, t)$  を初期値  $f \in H_0$  の解とし、

$$U_0(t)f = (u_0(\cdot, t), \partial_t u_0(\cdot, t))$$

とおくと、 $\{U_0(t)\}_{t \in R}$  は  $H_0$  上の unitary operator の group をなす。

$f \in C_0^{\infty}(R^n)$  の Radon 変換  $Rf$  は次のように定義される。

$$Rf(s, \omega) = -\partial_s \left( \int_{x \cdot \omega = s} f_1(x) dS_x \right) + \int_{x \cdot \omega = s} f_2(x) dS_x \quad ((s, \omega) \in R^1 \times S^{n-1}).$$

変数  $s$  に関する Fourier 変換を  $F$  で表す。norm  $\|k\|_s^2 = \iint |\sigma|^{2s} \times |(Fk)(\sigma, \omega)|^2 d\sigma d\omega$  で定義される空間を  $W_s$  とすると、 $R$  は  $H_0$  から  $W_{\frac{n-1}{2}}$  への unitary operator になる。 $n$  が奇数のとき translation representation

$T_0^+ = T_0^-$  は次のように定義する。

$$T_0^\pm = (-\partial_s)^{\frac{n-1}{2}} R.$$

$n$  が偶数のときは、

$$\lambda_\pm(\sigma) = \begin{cases} 2^{-\frac{1}{2}} (1-i) \sigma^{\frac{1}{2}}, & \sigma \geq 0, \\ \pm 2^{-\frac{1}{2}} (1+i) |\sigma|^{\frac{1}{2}}, & \sigma < 0 \end{cases}$$

とし次のように定義する。

$$T_0^\pm = (-\partial_s)^{\frac{n}{2}-1} \lambda_\pm(D_s) R$$

ここで、 $\lambda_\pm(D_s) (= F^{-1} [\lambda_\pm(\sigma) F \cdot])$  は  $(-\partial_s)^{\frac{1}{2}}$  になっていることに注意しよう。 $T_0^\pm$  は  $H_0$  から  $L^2(\mathbb{R}^1 \times S^{n-1})$  への unitary operator になり、さらに次の (i), (ii) が成立する。

(i)  $S$  に関する translation:  $k(s) \rightarrow k(s-t)$  を  $T_t$  で表すと、

$$T_0^\pm U_0(t) = T_t T_0^\pm.$$

(ii)  $\text{supp}_s [T_0^\pm f] \subset \left[ \begin{smallmatrix} \rho, +\infty \\ -\infty, -\rho \end{smallmatrix} \right)$  ( $\rho \geq 0$ ) である必要十分条件は、任意の  $t \geq 0$  に対して  $\text{supp} [U_0(t)f(x)] \subset \{(x,t): |x| \geq \rho + t\}$  となることである。

混合問題 (0.1) の初期値  $f$  の空間は、 $C_0^\infty(\Omega)$  を energy norm  $\|\cdot\|_E$  で完備化したものにとる。それを  $H$  で表す。

$$U(t)f = (u(\cdot, t), \partial_t u(\cdot, t))$$

とおくと、 $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  は  $H$  上の unitary operator の group をなす。  
 $J: f \rightarrow f|_{\Omega}$  とし、 $\rho (> 0)$  を  $\emptyset \subset \{x: |x| < \rho\}$  となるようにとっておく。  
 このとき、 $f$  がある  $\tilde{S} (\in \mathbb{R})$  に対して  $\text{supp} [T_0^{\pm} U_0(\tilde{S})f] \subset \begin{matrix} [\rho, +\infty) \\ (-\infty, -\rho] \end{matrix}$   
 を充すならば、上の  $T_0^{\pm}$  の性質 (i), (ii) を考慮すると、

$$(2.1) \quad \pm t \geq \pm \tilde{S} \text{ のとき, } \quad J U_0(t) f \in H$$

が成立する。したがって、

$$W_{\pm} f = \lim_{t \rightarrow \pm \infty} U(-t) J U_0(t) f$$

で定義される wave operator  $W_{\pm}$  は、 $E_{\pm} = \bigcup_{\tilde{S} \in \mathbb{R}} \{f: \text{supp} [T_0^{\pm} U_0(\tilde{S})f] \subset \begin{matrix} [\rho, +\infty) \\ (-\infty, -\rho] \end{matrix}\}$  に属する  $f$  に対しては well-defined であり、しかも norm を変えない。 $E_{\pm}$  は  $H_0$  内で、 $W_{\pm} E_{\pm}$  は  $H$  内でそれぞれ稠密であることが分かるから (詳しくは Lax-Phillips [1, 2] を見よ)、結局  $W_{\pm}$  は  $H_0$  から  $H$  への unitary operator とみなせることになる。

ところがこの議論には一つ問題がある。それは、(2.1) を導く際  $T_0^{\pm}$  の性質 (ii) を用いたが、 $H_0$  の要素の support の意味がはっきりしていないことである。次節ではこのことについて考察したい。

### §3. $f \in H_0$ の support

Lax-Phillips [1] にあるように、 $n \geq 3$  のときは評価式

$$(3.1) \quad \|f\|_{L^2(|x| < r)} \leq C_r \|f\|_E, \quad f \in C_0^{\infty}$$

が成立する。ゆえに  $n \geq 3$  のときには  $H_0 \subset L^2_{loc}$  とみなせる。そこで  $f \in H_0$  の support を  $L^2_{loc}$  でのものと解釈すれば、(2.1) を厳密に示すことができる。

しかし  $n = 2$  のときは (3.1) は成立しない。のみならず、 $H_0$  は distribution にもならない。そこで  $f \in H_0$  の support を次のように定義しよう。 $R^n$  内の閉集合  $K$  に対して、 $\text{supp } [f^j] \subset K$  かつ  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|f^j - f\|_E = 0$  となる  $f^j \in C^\infty_0$  が存在するとする。このような  $K$  の全体を考え、その共通部分を  $\text{SUPP } [f]$  とする。この定義に従って  $T_0^\pm$  の性質 (ii) を証明するには、次の命題が成立することを云えばよい。

命題 3.1.  $\text{SUPP } [T_0^\pm f] \subset \{x: \rho' \leq |x| \leq \rho\}$  ならば、 $0 < \rho' < \rho$  を充す任意の  $\rho'$  に対して、 $\text{SUPP } [f^j(x)] \subset \{x: \rho' \leq |x| \leq \rho\}$  かつ  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|f^j - f\|_E = 0$  となるような  $f^j(x) \in C^\infty_0(R^n)$  がとれる。

この証明は、 $n = 2$  のときはかなり面倒である。 $n = 2$  のときの証明の概略を述べよう。(詳しくは著者 [6] を見よ。)  $f = (f_1, f_2) \in \mathcal{D}$  ならば

$$(3.2) \quad \begin{cases} f_1(x) = (4\pi)^{-1} \int \{(-\partial_s)^{-1} \lambda_\pm(D_s)^* T_0^\pm f\}(x \cdot \omega, \omega) d\omega, \\ f_2(x) = (4\pi)^{-1} \int \{\lambda_\pm(D_s)^* T_0^\pm f\}(x \cdot \omega, \omega) d\omega \end{cases}$$

が成立する(証明は <sup>又は著者 [6]</sup> Lax-Phillips [1] を見よ)。これより直ちに  $\text{SUPP } [T_0^\pm f]$  の情報から  $\text{supp } [f]$  の情報が引き出せるように思えるかもしれ



ないが、実際は  $f$  の第1成分  $f_1$  に関してはそれ程簡単ではない。  
それは、 $(-\partial_s)^{-1} \lambda_{\pm}(D_s)^*$  の symbol  $(\sigma^{-1} \lambda_{\pm}(\sigma))$  が  $-\frac{1}{2}$  次の斉次函数で  
あることに起因している。一般性を失うことなく、命題3.1において  $T_0^{\pm}$   
 $f \in \mathcal{A}$  と仮定してよいことが分かる。さらに、 $T_0^{\pm} f \in \mathcal{A}$  ならば  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\tilde{f}^j$   
 $- f\|_E = 0$  であって次の式を充す  $\tilde{f}^j(x) \in C_0^{\infty}$  がとれることが云える。

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \int \{(-\partial_s)^{-1} \lambda_{\pm}^* T_0^{\pm} f\}(x \cdot \omega, \omega) d\omega - \int \{(-\partial_s)^{-1} \lambda_{\pm}^* T_0^{\pm} \tilde{f}^j\}(x \cdot \omega, \omega) d\omega \right|_{C^1(|x| \leq \rho)}$$

$$= 0.$$

ここで、 $\text{supp}[T_0^{\pm} f] \subset \left[ \begin{smallmatrix} \rho, +\infty \\ -\infty, -\rho \end{smallmatrix} \right)$  であることに注意すれば、上の第1項の積分  
は  $|x| \leq \rho$  のとき 0 であり、第2項の積分は (3.2) より  $\tilde{f}^j(x)$  に等しいこと  
が分かる。したがって、結局  $\lim_{j \rightarrow \infty} \|\tilde{f}^j - f\|_E = 0$  かつ  $\lim_{j \rightarrow \infty} |\tilde{f}^j(x)|_{C^1(|x| \leq \rho)}$   
 $= 0$  であるような  $\tilde{f}^j(x) \in C_0^{\infty}$  がとれることになる。ゆえに、 $|x| \leq \rho'$  のとき  
 $\varphi(x) = 0$ 、 $|x| \geq \rho$  のとき  $\varphi(x) = 1$  であるような  $\varphi(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  をとってき  
て、 $f^j(x) = \varphi(x) \tilde{f}^j(x)$  とおけば命題3.1で要求されるものになっている。

なお、 $W_{\pm}$  が  $H_0$  から  $H$  への unitary operator になっているという事実  
は、定理1.1の証明に使われるということに注意しておきたい。

### 参考文献

- [1] P. D. Lax and R. S. Phillips: Scattering theory, Academic Press, 1967.  
[2] P. D. Lax and R. S. Phillips: Scattering theory for the acoustic equation  
in an even number of space dimensions, Indiana Univ. Math. J. 22

(1972), 101-134.

- [3] A. Majda: A representation formula for the scattering operator and the inverse problem for arbitrary bodies, *Comm. Pure Appl. Math.* 30 (1977), 165-194.
- [4] R. B. Melrose: Forward scattering by a convex obstacle, *Comm. Pure Appl. Math.* 33 (1980), 461-499.
- [5] H. Soga: Oscillatory integrals with degenerate stationary points and their application to the scattering theory, *Comm. P. D. E.* 6 (1981), 273-287.
- [6] H. Soga: Singularities of the scattering kernel for convex obstacles, to appear.