数理解析研究所講究録
529巻 1984年 37-61

Flat Cauchy問題の well-posedness の必要条件と解の regularity-loss

京大 数理研　萬代 武史

§.1 Introduction

目標を説明するために、まず次の例を考える。

$$P = D_t^2 - t^{2k} D_x^2 + t^{k-1} a(t,x) D_x + b(t,x) D_t + c(t,x)$$

(kは正整数, $a, b, c \in C^\infty$, $D_t = -i\partial_t$ etc.)

この作用素については、次のことがわかっている。すなわち、$D_t^2 - t^{2k} D_x^2$ を主部とする作用素の ($t=0$を初期面とする) Cauchy 問題が C^∞-well-posed になるには、低階項が上の形をしていることが必要十分であり、このとき $|\mathrm{Im}\, a(0,x)|$ が解の regularity-loss を決定する。このように『well-posedness のための条件のぎりぎりの所が解の regularity-loss を支配している。』という現象が我々の興味の対象である。t方向のふるまいのみに注目することによって、特性根のいろいろな接触のしかたを扱って、次の形の定理を求めることをここでの目標とする。『主部を fix したとき、Cauchy 問題が well-posed になるためには低階項はあ

る種の条件を満たすことが必要であり、そのぎりぎりの所から決まってくるある種の量が、解の regularity-loss に影響する。

我々は次の理由によって、係数を C^∞ には限らないで、もっと広い class で考える。($t=0$ で singular な係数をもつ作用素に対して、well-posedness の必要条件を求めたりすることは、それ自体、もちろん意味のあることであるが、筆者にとっての最大の理由は次のことである。)

次の Tricomi 型の作用素を考えよう。

$$P = D_t^2 - t^{2k-1}D_x^2 + t^{k-1}a(t,x)D_x + b(t,x)D_t + c(t,x)$$

$$(k \text{ は正整数}, \quad a, b, c \in C^\infty)$$

この作用素についても、$D_t^2 - t^{2k-1}D_x^2$ を主部とする作用素の Cauchy 問題が well-posed になるには低階項が上の形をしていることが必要十分であるが、このときは上に述べたような現象はおこらない。すなわち、低階項によらず、一定の regularity-loss しかおこらない。しかし、視点を広げて、C^∞ 以外の係数も考えると、$P = D_t^2 - t^{2k-1}D_x^2 + t^{k-\frac{3}{2}}a(t,x)D_x + b(t,x)D_t + c(t,x)$ $(a, b, c \in C^\infty)$ に対しても、ある意味で Cauchy 問題が well-posed になり、$|\mathrm{Im}\, a(0,x)|$ が解の regularity-loss に影響を与える。又、Fuchsian type の作用素でも同様の現象がおこるはずである。したがって、このような $t=0$ で singular な係数をもつ作用素をも統一的に扱いたいわけである。

§2. 定義と結果

我々の考える作用素は

$$P=\sum_{h=0}^{m}P_{m-h}=\sum_{h=0}^{m}\sum_{j+|\alpha|=m-h}a_{j,\alpha}(t,x)D_t^jD_x^\alpha$$

において、

$$(A-\mu_0, M)\quad\begin{cases}a_{m,0}(t,x)\equiv 1\\ a_{j,\alpha}\in t^{-m+j+\mu_0|\alpha|}\times E_M\end{cases}$$

を満たすものである。但し、μ_0は fix した正有理数，M は fix した正整数で、$E_M=\{\varphi\ ;\ \varphi(t^M,x)\in C^\infty([0,T]\times R^n)\}$ かつ、$M\mu_0$ は整数。いいかえると、

$$t^mP(t,x;\tau,\xi)=\sum_{j+|\alpha|\leqq m}\tilde{a}_{j,\alpha}(t,x)(t\tau)^j(t^{\mu_0}\xi)^\alpha\ ,\ \tilde{a}_{j,\alpha}\in E_M$$

となる作用素である。

こういう作用素に対しては、普通の意味の初期値問題は考えにくいが、$t=0$ で flat な右辺を与えて、$t=0$ で flat な解を求めるという flat Cauchy 問題を考えることができる。ここでは次の意味の well-posedness を考える。

定義

P に対する flat Cauchy 問題が原点で μ_0-well-posed とは、ある原点の近傍Ωと正定数C_0があって、次の２条件をみたすこととする。

$$(E)\begin{cases}\forall f\in C^\infty_{flat}(\Omega^+)\ ,\ \exists u\in C^\infty_{flat}(\Omega^+)\\ \text{s.t.}\quad Pu=f\ \text{ in }\Omega^+\end{cases}$$

$$(\mathrm{U})\begin{cases} \Gamma=\Gamma_{\mu_0}(\hat{t},\hat{x};C_0)\subset\Omega^+ \text{ となるような任意の } (\hat{t},\hat{x})\in\Omega^+ \\ \text{に対して、} \\ u\in C^\infty_{flat}(\Omega^+),\ Pu=0 \text{ in } \Gamma \implies u=0 \text{ in } \Gamma \end{cases}$$

但し、$$\begin{cases} \Omega^+=\{(t,x)\in\Omega;\ t\geqq 0\} \\ C^\infty_{flat}(\Omega^+)=\{\varphi\in C^\infty(\Omega):\ \mathrm{supp}\,\varphi\subset\Omega^+\} \\ \qquad\qquad\quad =\{\varphi\in C^\infty(\Omega^+):\ \varphi \text{ は } t=0 \text{ で } flat\} \\ \Gamma_{\mu_0}(\hat{t},\hat{x}:C_0)=\{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1};\ |x-\hat{x}|\leqq C_0(\hat{t}^{\mu_0}-t^{\mu_0}),\ 0\leq t\leq\hat{t}\} \end{cases}$$

注

1. $\mu_0=1$ のときは、(U) は有限伝播速度の存在であり、
   $\mu_0<1$ のときは、それよりも弱い条件である。
2. C^∞-係数のときの初期値問題や、Fuchsian type の初期値問題は容易に flat Cauchy 問題に reduce できる。
3. 上の意味で well-posed のとき、$P_m(t,x:\tau,\xi)$ は $t>0$ で双曲型になる。すなわち、$P_m(t,x:\tau,\xi)=0$ は τ につき、実根のみをもつ。

さて、ここでは簡単のために $(\tau,\xi)=(0,e_n)=(0,0,\cdots,0,1)$ の方向で考える。

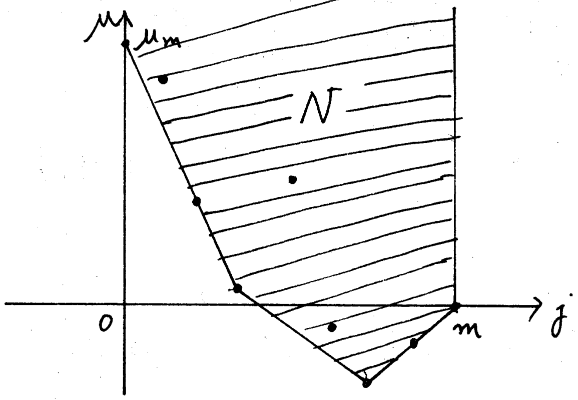
$$\mu^{(k)}_{j,\alpha}=\sup\{\mu\in\mathbb{R};\ \text{ある } g\in\mathcal{E}_M \text{ があって、原点の近傍で、}$$
$$\partial_\tau^j\partial_\xi^\alpha P_{m-k}(t,x;0,e_n)=t^\mu\cdot g(t,x)\ \}$$

とし、点列 $\{(j,\mu^{(0)}_{j,0})\}_{j=0}^m$ を (j,μ)-平面にとり、これから、

Newton polygon N をつくる。すなわち、

$\nu(K)=\min\{\mu_{j,0}^{(0)}+Kj\ ;\ j=0,1,\cdots,m\}$ $(K\in\mathbb{R})$ とし、

$N=\{(j,\mu)\in\{0,1,\cdots,m\}\times(\mathbb{R}\cup\{\infty\})\ ;\ \mu\geqq\nu(K)-Kj$ for ${}^{\forall}K\in\mathbb{R}\}$.



この N は P_m のみで決まる図形である。(この図形の意味については、補題4.3参照。)

このとき、低階項の条件として、

定理 1

$(A-\mu_0, M)$ と、P に対する flat Cauchy 問題が原点で μ_0-well-posed であることを仮定すると、

$(h+j+|\alpha|,\ h+\mu_{j,\alpha}^{(h)}+(1-\mu_0)|\alpha|)\in N$ $(h=0,1,\cdots,m\ ;\ j+|\alpha|\leqq m-h)$

特に、$\{(j,\mu_{j,0}^{(h)})\}_{j=0}^{m-h}$ から作られる Newton polygon は N を $(-h,-h)$ だけ平行移動したものに含まれる。

次に N の垂直でない一辺 $L:\mu=\nu-Kj$ に注目する。定理1によって、

$\partial_\tau^{j}\partial_{\xi'}^{\alpha'}P_{m-h}(t,x;0,e_n)=j!\,\alpha'!\,t^{\nu-K(j+|\alpha'|+h)-h-(1-\mu_0)|\alpha'|}\cdot b_{j,\alpha'}^{(h)}(t,x)$ …①

$b_{j,\alpha'}^{(h)}\in E_M$ $(h=0,1,\cdots,m\ ;\ j+|\alpha'|\leqq m-h)$ と表わせる。但し、

$\xi'=(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})$, $\alpha'=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})$.

$$f_{\alpha'}^{(h)}(\tau)=\sum_{l=0}^{m-h-|\alpha'|} b_{l,\alpha'}^{(h)}(0,0)\,\tau^{l} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

とし、$f_0^{(0)}(\tau)=0$ の d 重根 τ_0 を1つ考える。これに対して

$$B_{j,\alpha'}^{(h)}=\frac{1}{j!}\sum_{s=0}^{h}\sum_{\mu=0}^{h-s}\sum_{\substack{g_1+\cdots+g_\mu=h-s+\mu\\ g_\sigma\geqq 2\ (\forall\sigma)}}\frac{\tau_0^{\mu}}{\mu!\,g_1!\cdots g_\mu!\ i^{h-s}}\left(\partial_\tau^{j+h-s+\mu} f_{\alpha'}^{(s)}\right)(\tau_0)$$

$$\times\prod_{\sigma=1}^{\mu}\{K(K-1)\cdots(K-g_\sigma+2)\} \quad \cdots\cdots ③$$

と定義する。

$$\left(\begin{aligned} B_{j,\alpha'}^{(0)}&=\frac{1}{j!}\left(\partial_\tau^{j} f_{\alpha'}^{(0)}\right)(\tau_0)\\ B_{j,\alpha'}^{(1)}&=\frac{1}{j!}\left\{\frac{\tau_0 K}{2i}\left(\partial_\tau^{j+2} f_{\alpha'}^{(0)}\right)(\tau_0)+\left(\partial_\tau^{j} f_{\alpha'}^{(1)}\right)(\tau_0)\right\} \qquad \text{etc.}\end{aligned}\right)$$

このとき、

<u>定理 2</u>

定理1と同じ仮定のもとで、

$$\begin{cases} B_{j,\alpha'}^{(h)}=0 \quad \text{for } h+j+|\alpha'|\leqq d-1\\ B_{d,0}^{(0)}\neq 0. \end{cases} \quad \cdots\cdots ④$$

注

$\partial_\tau^{j}\partial_{\xi'}^{\alpha'}P_{m-h}(t,x;0,e_n)$ は $\tau^{j}\xi'^{\alpha'}\xi_n^{m-h-j-|\alpha'|}$ の係数である。我々の結論は、係数のことばで書けるが、e_n は R^n の1つの標準的な単位ベクトルのしてとっているわけだから、$\partial_\tau^{j}\partial_{\xi'}^{\alpha'}P_{m-h}$ として扱うことにする。

次に、$\displaystyle\sum_{h=0}^{d} B_{d-h,0}^{(h)}\,\lambda\left(\lambda-\frac{1}{i}\right)\cdots\left(\lambda-\frac{d-h-1}{i}\right)=0$ の根を、$\lambda_1,\cdots$

λ_d とする。このとき、

定理 3

$(A-\mu_0, M)$，①，④を仮定すると、ある定数 C_0 (M, m, ν, K にのみ depend する) が存在して、次のことが成立する。

「 $\|u\|_{H^p(\Omega_\theta^+)} \leqq C \|Pu\|_{H^q(\Omega_\theta^+)}$

for $\forall u \in C^\infty_{flat}(\Omega^+)$, $0 \leqq \forall\theta \leqq T\ (>0)$

が成立するとすると、

$-\mathrm{Im}\,\lambda_\ell \leqq C_0\ (q+m-p)$ 」

但し、Ω は原点の近傍，$\Omega_\theta^+ = \{(t,x) \in \Omega\ ;\ 0 \leqq t \leqq \theta\}$，
p, q は整数，$\|\cdot\|_{H^p(\Omega_\theta^+)}$ は Ω_θ^+ 上の p 次 Sobolev norm
C は u, θ に independent な定数。

(注 上の不等式が成立するとき、$q+m-p \geqq 1$ である。)

この定理 3 は、$\max\{-\mathrm{Im}\,\lambda_\ell\ ;\ \ell = 1, \cdots, d$: τ_0 は $f_0^{(0)}(\tau) = 0$ の d 重根$\}$ なる量が大きくなると、必然的に解の regularity-loss が大きくなることを示している。

§3. 例

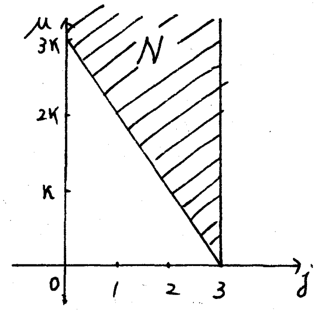
ここであげる例はすべて、$n = 1$ である。

例 1.

$m = 3$，$P_3 = (\tau - t^K\xi)(\tau - 2t^K\xi)(\tau - 3t^K\xi)$

$$= \tau^3 - 6t^{K}\tau^2\xi + 11\, t^{2K}\tau\xi^2 - 6t^{3K}\xi^3$$

なる主部をもつ作用素を考える。（Kは有理数で、$K>-1$）。Newton polygon は右図のようになる。



定理1により、低階項は次の形をしている。

$$\begin{cases} P_2 = A t^{-1}\tau^2 + B t^{K-1}\tau\xi + C t^{2K-1}\xi^2 \\ P_1 = E t^{-2}\tau + F t^{K-2}\xi \\ P_0 = G t^{-3} \qquad , \ A, B, \cdots, G \in E = \bigcup_{M \geq 1} E_M \end{cases}$$

N の辺 $\mu = 3K - K\xi$ $(\nu = 3K)$ を考えると、

$$f_0^{(0)}(\tau) = \tau^3 - 6\tau^2 + 11\tau - 6 = (\tau-1)(\tau-2)(\tau-3).$$

したがって、単根($d=1$)を $\tau_0 = 1, 2, 3$ と3つ持つ。それぞれのτ_0に対して、

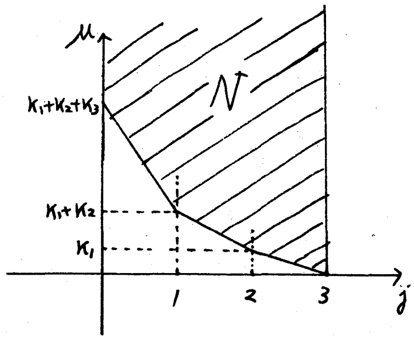
$$B_{0,0}^{(1)} = \begin{cases} -\frac{3K}{2} + A(0,0) + B(0,0) + C(0,0) & (\text{i}) \ \tau_0 = 1 \text{ のとき} \\ 4A(0,0) + 2B(0,0) + C(0,0) & (\text{ii}) \ \tau_0 = 2 \text{ のとき} \\ \frac{9K}{2} + 9A(0,0) + 3B(0,0) + C(0,0) & (\text{iii}) \ \tau_0 = 3 \text{ のとき} \end{cases},$$

$$B_{1,0}^{(0)} = \begin{cases} 2 & (\text{i}) \\ -1 & (\text{ii}) \\ 2 & (\text{iii}) \end{cases}$$ となる。定理3の λ_1 は $-\dfrac{B_{0,0}^{(1)}}{B_{1,0}^{(0)}}$ である。

例 2

$$m = 3, \quad P_3 = (\tau - t^{K_1}\xi)(\tau - t^{K_2}\xi)(\tau - t^{K_3}\xi)$$
$$= \tau^3 - (t^{K_1} + t^{K_2} + t^{K_3})\tau^2\xi + (t^{K_1+K_2} + t^{K_1+K_3} + t^{K_2+K_3})\tau\xi^2$$
$$- t^{K_1+K_2+K_3}\xi^3 \quad (K_1, K_2, K_3 \text{ は有理数で、} K_3 > K_2 > K_1 > -1)$$

を考える。Newton polygon は右図のようになり，定理1によって低階項は次の形をしている。



$$\begin{cases} P_2 = At^{-1}\tau^2 + Bt^{\kappa_1-1}\tau\xi + Ct^{\kappa_1+\kappa_2-1}\xi^2 \\ P_1 = Et^{-2}\tau + Ft^{\kappa_1-2}\xi \\ P_0 = Gt^{-3} \qquad\qquad , \quad A, B, \cdots, G \in \mathcal{E} \end{cases}$$

Newton polygon の辺は $L_1 : \mu = 3\kappa_1 - \kappa_1 j$ ，$L_2 : \mu = \kappa_1 + 2\kappa_2 - \kappa_2 j$ ，$L_3 : \mu = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_3 j$ の3本がある。それぞれに対して，B's を計算しよう。

- L_1 について．

$f_0^{(0)}(\tau) = \tau^3 - \tau^2 = \tau^2(\tau - 1)$ となり，2重根 $(d=2)$，0 と単根 $(d=1)$，1 とをもつ。

$d=2,\ \tau_0 = 0$ のとき，

$B_{2,0}^{(0)} = -1, \quad B_{0,0}^{(1)} = 0,$

$B_{1,0}^{(1)} = B(0,0), \quad B_{0,0}^{(2)} = F(0,0)$．

$d=1,\ \tau_0 = 1$ のとき．

$B_{1,0}^{(0)} = 1,$

$B_{0,0}^{(1)} = A(0,0) + B(0,0) + \frac{2\kappa_1}{i}$．

$B_{0,0}^{(1)} = 0$ だから定理2はすでに満たされている．

- L_2 について．

$f_0^{(0)}(\tau) = -\tau^2 + \tau = -\tau(\tau - 1)$ となり，$d = 1,\ \tau_0 = 0, 1$．

$$B_{1,0}^{(0)} = \begin{cases} 1 & (\text{i})\ \tau_0 = 0 \\ -1 & (\text{ii})\ \tau_0 = 1 \end{cases}$$

$$B_{0,0}^{(1)} = \begin{cases} C(0,0) & (\text{i}) \\ -\frac{\kappa_2}{i} + B(0,0) + C(0,0) & (\text{ii}) \end{cases}$$

∘ L_3 について．

$$f_0^{(0)}(\tau) = \tau - 1 \quad \text{となり．} \quad d = 1,\ \tau_0 = 1 \ .$$

$$B^{(0)}_{1,0} = 1 \quad , \quad B^{(1)}_{0,0} = C(0,0)$$

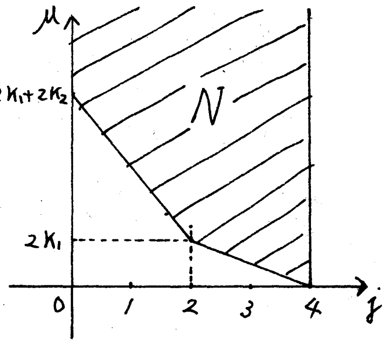
L_1 のところででてきたように、この作用素に関しては，$m-2=1$ 階項まで regularity-loss に影響する。

◎以上の例 1, 2 では、定理 2 は意味がなく、定理 1 で必要条件としてでた条件は実は十分条件でもある。(R. Sakamoto [2])

<u>例 3</u>

$$m=4,\quad P_4 = (\tau - t^{\kappa_1}\xi)^2(\tau - t^{\kappa_2}\xi)^2$$
$$= \tau^4 - 2(t^{\kappa_1}+t^{\kappa_2})\tau^3\xi + (t^{2\kappa_1}+4t^{\kappa_1+\kappa_2}+t^{2\kappa_2})\tau^2\xi^2$$
$$-2(t^{2\kappa_1+\kappa_2}+t^{\kappa_1+2\kappa_2})\tau\xi^3 + t^{2\kappa_1+2\kappa_2}\xi^4$$

(κ_1, κ_2 は有理数，$\kappa_2 > \kappa_1 > -1$)．を考える。



Newton polygon は右図のようになり，
定理 1 によって低階項は次の形。

$$\begin{cases} P_3 = At^{-1}\tau^3 + Bt^{\kappa_1-1}\tau^2\xi + Ct^{2\kappa_1-1}\tau\xi^2 + Et^{2\kappa_1+\kappa_2-1}\xi^3, \\ P_2 = Ft^{-2}\tau^2 + Gt^{\kappa_1-2}\tau\xi + Ht^{2\kappa_1-2}\xi^2 \\ P_1 = It^{-3}\tau + Jt^{\kappa_1-3}\xi \\ P_0 = Kt^{-4} \qquad\qquad , \ A, B, \cdots, K \in E \end{cases}$$

N の辺は、$L_1 : \mu = 4\kappa_1 - \kappa_1 j$ ，$L_2 : \mu = 2\kappa_1 + 2\kappa_2 - \kappa_2 j$ の 2 本が

ある。それぞれに対して B's を計算しよう。

∘ L_1について.

$f_0^{(0)}(\tau)=\tau^4-2\tau^3+\tau^2=\tau^2(\tau-1)^2$ となり. $d=2,\ \tau_0=0,1$。

$$\begin{cases} B^{(0)}_{2,0}=1 \\ B^{(1)}_{0,0}=\begin{cases} 0 & (\text{i})\ \tau_0=0 \text{ のとき}) \\ A(0,0)+B(0,0)+C(0,0)+\frac{K_1}{i} & (\text{ii})\ \tau_0=1 \text{ のとき}) \end{cases} \\ B^{(1)}_{1,0}=\begin{cases} C(0,0) & (\text{i})\ ) \\ 3A(0,0)+2B(0,0)+C(0,0)+\frac{6K_1}{i} & (\text{ii})) \end{cases} \\ B^{(2)}_{0,0}=\begin{cases} H(0,0) & (\text{i})\ ) \\ K_1B(0,0)+F(0,0)+G(0,0)+H(0,0)-7K_1^2+4K_1 & (\text{ii})) \end{cases} \end{cases}$$

定理2によって. $\underline{A(0,0)+B(0,0)+C(0,0)+\frac{K_1}{i}=0}$

∘ L_2について.

$f_0^{(0)}(\tau)=\tau^2-2\tau+1=(\tau-1)^2$ となり, $d=2,\ \tau_0=1$.

$$\begin{cases} B^{(0)}_{2,0}=1 \\ B^{(1)}_{0,0}=C(0,0)+E(0,0)+\frac{K_2}{i} \\ B^{(1)}_{1,0}=C(0,0) \\ B^{(2)}_{0,0}=H(0,0) \end{cases}$$

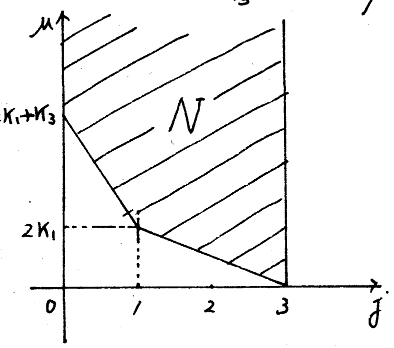
定理2によって. $\underline{C(0,0)+E(0,0)+\frac{K_2}{i}=0}$

この例では. $t>0$ では constant multiplicity になっているので定理1と. constant multiplicity のときの結果から. もっと強い条件が導びけ. それが同時に十分条件にもなる。

例 4.

$m=3,\quad P_3=(\tau-t^{\kappa_1}\xi)(\tau-t^{\kappa_1}\xi-t^{\kappa_2}\xi)(\tau-t^{\kappa_3}\xi)$

$$=\tau^3-(2t^{\kappa_1}+t^{\kappa_2}+t^{\kappa_3})\tau^2\xi+(t^{2\kappa_1}+t^{\kappa_1+\kappa_2}+2t^{\kappa_1+\kappa_3}+t^{\kappa_2+\kappa_3})\tau\xi^2$$
$$-(t^{2\kappa_1+\kappa_3}+t^{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3})\xi^3 \quad \left(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3 \text{ は有理数で, } \begin{matrix}\kappa_2>\\ \kappa_3>\end{matrix}\kappa_1>-1\right)$$



を考える。Newton polygon は右図のようになり、定理1によって、低階項は次の形。

$$\begin{cases} P_2=At^{-1}\tau^2+Bt^{\kappa_1-1}\tau\xi+Ct^{2\kappa_1-1}\xi^2 \\ P_1=Et^{-2}\tau+Ft^{\kappa_1-2}\xi \\ P_0=Gt^{-3} \qquad\qquad , A, B, \cdots, G\in \mathcal{E} \end{cases}$$

Nの辺は $L_1: \mu=3\kappa_1-\kappa_1 j$, $L_2 = 2\kappa_1+\kappa_3-\kappa_3 j$ の２本ある。

。L_1について、

$f_0^{(0)}(\tau)=\tau^3-2\tau^2+\tau=\tau(\tau-1)^2$ となり、$d=2,\ \tau_0=1$ と $d=1,\ \tau_0=0$。

$d=2,\ \tau_0=1$ のとき。

$$\begin{cases} B^{(0)}_{2,0}=1 \\ B^{(1)}_{0,0}=A(0,0)+B(0,0)+C(0,0)+\frac{\kappa_1}{i} \\ B^{(1)}_{1,0}=2A(0,0)+B(0,0)+\frac{3\kappa_1}{i} \\ B^{(2)}_{0,0}=\frac{\kappa_1}{i}A(0,0)+E(0,0)+F(0,0)-\kappa_1(\kappa_1-1) \end{cases}$$

$d=1,\ \tau_0=0$ のとき

$$\begin{cases} B^{(0)}_{1,0}=1 \\ B^{(1)}_{0,0}=C(0,0) \end{cases}$$

定理２により、$\underline{A(0,0)+B(0,0)+C(0,0)+\frac{\kappa_1}{i}=0}$ …… ⑤

。L_2について、

$f_0^{(0)}(\tau)=\tau-1$ となり、$d=1,\ \tau_0=1$。

$B^{(0)}_{1,0}=1,\quad B^{(1)}_{0,0}=C(0,0)$.

⑤の条件は、主部において $\tau - t^{\kappa_1}\xi$ と $\tau - t^{\kappa_1}(1+t^{\kappa_2-\kappa_1})\xi$ が $t\to 0$ のとき、t^{κ_1} の order ではかってもまだくっつくことからくるのであるが、このくっつき方は $t^{\kappa_2-\kappa_1}$ の order である。κ_2 がかわれば当然このくっつき方の order がかわるから、これを反映した必要条件があるはずである。これを求めるには $\tau - t^{\kappa_1}\xi$ を τ にもっていくような変数変換をする。結果のみ書くと、必要条件としては、

$$\frac{\kappa_1}{i} + A(t,x) + B(t,x) + C(t,x) - \frac{\kappa_1}{i} t^{\kappa_3-\kappa_1} \in t^{\kappa_2-\kappa_1} \times E .$$

この条件は実は十分条件でもある。

§4. 定理の証明のための準備

定理1,2の証明のため、operator P に対する2つの変換を考える。

まず、正有理数 p に対して $(T_p u)(t,x) = u(t^{\frac{1}{p}}, x)$ により

$$T_p : C^\infty_{flat}([0,T]\times \mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty_{flat}([0,T]\times \mathbb{R}^n)$$

を定義すると、簡単な計算によって次のことがわかる。

命題 4.1

$(A-\mu_0, M)$ をみたす P に対して、

$$P(t,x;\tau,\xi) = \sum_{j+|\alpha|\le m} t^{\nu-\kappa(j+|\alpha|+h)-h-(1-\mu_0)|\alpha|} a_{j,\alpha}(t,x)\tau^j\xi^\alpha ,$$

$a_{j,\alpha} \in E_M$ とする。(但し、$\kappa \ge \mu_0 - 1$, $h = m-j-|\alpha|$)。このとき、

$\mathcal{T}_p(P) = p^m t^{m(p-1)} T_p^{-1} \circ P \circ T_p$ も $\tilde{\mu}_0 = p\mu_0$, $\tilde{M} = q\frac{M}{p}$ (q は $q\cdot\frac{M}{p}$ が

整数となるような正整数）に対して．$(A-\tilde{\mu}_0, \tilde{M})$ を満たし．

$$\mathcal{T}_p(P) = \sum_{j+|\alpha|\leq m} t^{\tilde{\nu}-\tilde{\kappa}(j+|\alpha'|+h)-h-(1-\tilde{\mu}_0)|\alpha'|}\,\tilde{a}_{j,\alpha}(t,x)\,D_t^j D_x^\alpha$$

となる。但し．$\tilde{a}_{j,\alpha} \in E_{\tilde{M}}$，$\tilde{\nu} = p\nu - m + pm$，$\tilde{\kappa} = p\kappa + p - 1$。

又．$\mathcal{T}_{\frac{1}{p}}(\mathcal{T}_p(P)) = \mathcal{T}_p(\mathcal{T}_{\frac{1}{p}}(P)) = P$ である。

注

このような変換がゆるされるのは．考える作用素の class を広げているからである．P の係数が C^∞ でも．$\mathcal{T}_p(P)$ はそうとは限らない。

次に座標変換でひきおこされる作用素の変換を考えよう。次の命題は．§2 で定義した $B_{j,\alpha'}^{(h)}$ のある種の不変性を示すもので．それ自身面白いものである。

命題　4.2

$(A-\mu_0, M)$ をみたす作用素 P に対して．1組の (ν,κ) について．① が成立しているとし．$f_{\alpha'}^{(h)}(\tau)$ を ② で定義する。$f_0^{(0)}(\tau) = 0$ の d 重根 τ_0 に対して．$B_{j,\alpha'}^{(h)}$ を ③ で定義するとき．

$$\begin{cases} s = t \\ y_j = x_j + t^{\mu_0+\varepsilon} f_j(t,x) \\ y_n = x_n + \dfrac{1}{\kappa+1} t^{\kappa+1}\tilde{\tau}(t,x) \end{cases}, \qquad \left(\begin{array}{l} \varepsilon > 0,\ \varepsilon M \text{は整数} \\ f_j,\ \tilde{\tau} \in E_M \end{array} \right)$$

なる変数変換で P を $\tilde{P}(s,y;D_s,D_y)$ に変換すると．$\tilde{P}$ も $(A-\mu_0,M)$ を満たし、

$$(\partial_\sigma^j \partial_{y'}^{\alpha'} \tilde{P}_{m-h})(s,y;0,e_n) = j!\,\alpha'!\, s^{\mu-\kappa(j+|\alpha'|+h)-h-(1-\mu_0)|\alpha'|}\, \tilde{b}_{j,\alpha'}^{(h)}(s,y), \cdots ⑥$$

$\tilde{b}_{j,\alpha'}^{(h)} \in E_M$ と表わせる。さらに、$\tilde{b}_{j,\alpha'}^{(h)}(0,0)$ から、② で $\tilde{f}_{\alpha'}^{(h)}(\sigma)$ を定義すると、$\tilde{f}_0^{(0)}(\sigma)=0$ は $\sigma_0 = \tau_0 - \tilde{\tau}(0,0)$ を d 重根にもち、③ で $f_{\alpha'}^{(h)}, \tau_0$ のかわりに $\tilde{f}_{\alpha'}^{(h)}, \sigma_0$ にした式で $\tilde{B}_{j,\alpha'}^{(h)}$ を定義すると、$\tilde{B}_{j,\alpha'}^{(h)} = B_{j,\alpha'}^{(h)}$ $(h=0,1,\cdots,m;\ j+|\alpha'| \le m-h)$。
特に、$\tilde{\tau}(0,0)=\tau_0$ とすると、$\tilde{b}_{j,\alpha'}^{(h)}(0,0) = B_{j,\alpha'}^{(h)}$.

証明の概略

$\tilde{P}$ を直接計算すると、⑥ が成立して、

$$\tilde{b}_{j,\alpha'}^{(h)}(0,0) = \frac{1}{j!}\sum_{s=0}^{h}\sum_{\mu=0}^{h-s} \sum_{\substack{g_1+\cdots+g_\mu = h-s+\mu \\ g_\ell \ge 2\ (\forall \ell)}} \frac{\tilde{\tau}(0,0)^\mu}{\mu!\, g_1! \cdots g_\mu!\, i^{h-s}} \left(\partial_\tau^{j+h-s+\mu} f_{\alpha'}^{(s)}\right)(\tilde{\tau}(0,0))$$

$$\times \prod_{\ell=1}^{\mu} \{\kappa(\kappa-1)\cdots(\kappa-d_\ell+2)\}$$

となることがわかる。

この式によって、$\tilde{b}_{j,\alpha'}^{(h)}(0,0)$ は $b_{j,\alpha}^{(h)}(0,0)$ と $\tilde{\tau}(0,0)$ のみできまることと、$\tilde{f}_0^{(0)}(\sigma) = f_0^{(0)}(\sigma + \tilde{\tau}(0,0))$ がわかる。又、$\tilde{\tau}(0,0)=\tau_0$ のとき、$B_{j,\alpha'}^{(h)} = \tilde{b}_{j,\alpha'}^{(h)}(0,0)$ である。さて、

$$\begin{cases} u = s \quad (=t) \\ w_j = y_j \ (= x_j + t^{\mu_0+\varepsilon} f_j(t,x)) \\ w_n = y_n + \frac{1}{\kappa+1} s^{\kappa+1}(\tau_0 - \tilde{\tau}(0,0)) = x_n + \frac{1}{\kappa+1} t^{\kappa+1}(\tau_0 + \tilde{\tau}(t,x) - \tilde{\tau}(0,0)) \end{cases}$$

なる座標変換を考えると、これにより、$\tilde{P}$ が $\tilde{\tilde{P}}$ に変換されるとしたとき、$\tilde{\tilde{P}}$ に対して、$\tilde{\tilde{b}}_{j,\alpha'}^{(h)}$，$\tilde{\tilde{B}}_{j,\alpha'}^{(h)}$ を同様に定義すると、
上でみたことにより、$\tilde{B}_{j,\alpha'}^{(h)} = \tilde{\tilde{b}}_{j,\alpha'}^{(h)}(0,0)$，$B_{j,\alpha'}^{(h)} = \tilde{\tilde{b}}_{j,\alpha'}^{(h)}(0,0)$。

したがって、$\tilde{B}^{(h)}_{j,\alpha'} = B^{(h)}_{j,\alpha'}$ ◭

次に定理1,2の結論のうち、$h=0$のときを示そう。これは well-posedness というよりも、双曲型であることからの帰結である。まず Newton polygon と多項式の零点との関係を示す次の補題を述べる。(証明は省略する。)

補題 4.3

$f(t;\tau)=\sum_{j=0}^{m} a_j(t)\tau^j$, $a_m(t)\equiv 1$, $a_j\in F_{\mu_j}$ $(\mu_j\in \mathbb{R}\cup\{\infty\})$

とする。但し $F_\mu=\{\, t^\mu\varphi(t)\,;\, \varphi\in C^0[0,T],\ \varphi(0)\neq 0\,\}$ $(\mu<\infty)$,

$F_\infty=\{\,\varphi\in C^0[0,T]\,;\ \forall N,\ {}^\exists\varphi_N\in C^0[0,T]$ s.t. $\varphi(t)=t^N\varphi_N(t)\,\}$.

$\{(j,\mu_j)\}_{j=0}^{m}$ から §2 のようにして Newton polygon Nをかき、その辺の $j=m-k$ と $j=m-k+1$ の間の部分の傾きを $-\bar{\kappa}_k$ とする。(但し、$j=j_0$ (≥ 1) がNの垂直な辺のときは、$\bar{\kappa}_{m-j_0+1}=\cdots=\bar{\kappa}_m=\infty$ とする。) このとき、$\sigma_k(t)\in F_{\bar{\kappa}_k}$ が存在して

$$f(t;\tau)=\prod_{k=1}^{m}(\tau-\sigma_k(t))$$ とできる。

逆に、$\sigma_k\in F_{\bar{\kappa}_k}$ によって、こう分解されるとすると、fから作られる Newton polygon の辺の傾きは $\{\bar{\kappa}_1,\cdots,\bar{\kappa}_m\}$。

注

上のように $\bar{\kappa}_1\leq\cdots\leq\bar{\kappa}_m$ をとると、Nの辺は

$$\mu=\mu(j)=\sum_{\ell=1}^{m-j}\bar{\kappa}_\ell\ 。$$

定理 1,2 の $h=0$ の部分は次の命題よりしたがう。

命題 4.4

$P_m(t,x;\tau,\xi)=\sum_{j+|\alpha|=m} a_{j,\alpha}(t,x)\tau^j\xi^\alpha$ において、

$(A-\mu_0,M)$ と、$(\partial_\tau^j P_m)(t,x;0,e_n)\in t^{\nu-\kappa j}\times E_M$ $(j=0,1,\cdots,m)$

を仮定する。P_m が τ について、$t>0$ で双曲型とすると、

$(\partial_\tau^j\partial_\xi^\alpha P_m)(t,x;0,e_n)\in t^{\nu-\kappa(j+|\alpha|)-(1-\mu_0)|\alpha|}\times E_M$

証明の概略

$x=\hat{x}$ を fix する。$\eta\in\mathbb{R}^n$, $\rho\in\mathbb{R}$ に対して、τ の多項式

$P_m(t,\hat{x};\tau,e_n+\rho\eta)$ を考える。

(t,η) を fix するとこれは (ρ,τ) につき多項式で、τ について双曲型だから $\rho=0$ の近傍で analytic な m 個の根 $\tau_j(t,\eta;\rho)$ $(j=1,\cdots,m)$ をもつ。$(A-\mu_0,M)$ により、(η,ρ) が有界な範囲を動くとき、$|\tau_j(t,\eta;\rho)|\leq C\cdot t^{\mu_0-1}$ である。

一方、$P_m(t,\hat{x};\tau,e_n)$ を t を parameter とする τ の多項式とみて、補題 4.3 を使うと、$\overline{\kappa}_1\leq\cdots\leq\overline{\kappa}_m$ がきまって、根 $\sigma_j(t)$ を

$|\sigma_j(t)|\leq C\cdot t^{\overline{\kappa}_j}$ $(j=1,\cdots,m)$ ととれる。

この2つのことをあわせると、

$$\begin{cases} P_m(t,\hat{x};\tau,e_n+\rho\eta)=\prod_{j=1}^{m}(\tau-\sigma_j(t,\eta;\rho)) \quad \cdots\cdots ⑦ \\ \sigma_j(t,\eta;\rho) \text{ は } (t,\eta) \text{ をとめるごとに } \rho \text{ につき analytic} \\ \left.\begin{array}{l} |\sigma_j(t,\eta;\rho)|\leq C\cdot t^{\mu_0-1} \\ |\sigma_j(t,\eta;0)|\leq C\cdot t^{\overline{\kappa}_j} \end{array}\right\} \cdots ⑧ \end{cases}$$

Cauchy の積分公式によって、

$$|\partial_\rho^k \sigma_j(t,\eta:0)| \leqq C_k t^{\mu_0-1} \quad (\forall j,k) \quad \cdots\cdots ⑨$$

$\mu=\nu-\kappa j$ なる直線は $\{\overline{K_1},\cdots,\overline{K_m}\}$ できまる Newton polygon の下にあるから、⑦, ⑧, ⑨ により、

$$\left|\partial_\tau^j \partial_\rho^k \left(P_m(t,x;\tau,e_n+\rho\eta)\right)\Big|_{\rho=0,\tau=0}\right| \leqq C\cdot t^{\sum_{l=1}^{m-j-k}\overline{K_l}}\cdot t^{k(\mu_0-1)}$$

$$\leqq C\cdot t^{\nu-\kappa(j+k)+(\mu_0-1)k}$$

左辺は $(\partial_\tau^j \langle\eta,\partial_\xi\rangle^k P_m)(t,x;\tau,e_n)$ だから、これより結論がしたがう。$(\langle\eta,\partial_\xi\rangle=\sum_{j=1}^n \eta_j\partial_{\xi_j}.)$ ▲

§5. 定理1,2の証明の概略

定理1,2の証明は Ivrii-Petkov [1] の定理4.1の証明の方法を Newton polygon の1辺ごとに使うことによってなされる。

Newton polygon N において、点 $(m,0)$ から順に垂直でない辺を $L_1,\cdots,L_l$ とし、L_r を $\mu=\nu_r-\kappa_r j$ とする。命題4.1で p を十分大きくとることによって、$M=1$, μ_0, ν_r, κ_r は正整数としてよい。簡単のために、$\mu_{m,0}^{(0)}<\infty$ としよう。定理1のために示すべきことは、$r=1,\cdots,l$ に対して、

$$[N]_r \begin{cases} \partial_\tau^j \partial_{\xi'}^{\alpha'} P_{m-h}(t,x:0,e_n) \in t^{\nu_r-\kappa_r(j+|\alpha'|+h)-h+(\mu_0-1)|\alpha'|}\times C^\infty \\ (h=0,\cdots,m;\ j+|\alpha'|\leqq m-h) \end{cases}$$

である。$h=0$ に対しては、命題4.4によってすでに示されているから、次の命題を示せばよい。

命題 5.1

(仮定)
$$\begin{cases} \partial_\tau^j \partial_{\xi'}^{\alpha'} P_m(t,x;0,e_n) = j!\alpha'!\, t^{\nu-\kappa(j+|\alpha'|)+(\mu_0-1)|\alpha'|}\, b_{j,\alpha'}^{(0)}(t,x) \\ \partial_\tau^j \partial_{\xi'}^{\alpha'} P_{m-h}(t,x;0,e_n) = j!\alpha'!\, t^{\nu-\kappa(j+|\alpha'|+h)-h+(\mu_0-1)|\alpha'|-\varepsilon_{h,j,\alpha'}}\, b_{j,\alpha'}^{(h)}(t,x), \\ b_{j,\alpha'}^{(h)} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \quad (h=0,1,\cdots,m\,;\ j+|\alpha'| \leqq m-h) \text{ であり,} \\ 0<\tilde\nu<\nu,\ \mu_0-1 \leqq \tilde\kappa < \kappa,\ 0 \leqq j_0 < m \text{ なる整数 } \tilde\nu, \tilde\kappa, j_0 \\ \text{があって,} \begin{cases} \tilde\nu - \tilde\kappa(m-j_0) = \nu - \kappa(m-j_0) \\ b_{j,\alpha'}^{(0)} \in t^{(\tilde\kappa-\kappa)(m-j_0-j-|\alpha'|)} \times C^\infty \quad (j+|\alpha'|>m-j_0) \\ b_{m-j_0,0}^{(0)}(0,0) \neq 0,\ b_{j,\alpha'}^{(h)}(0,x) \not\equiv 0 \quad \cdots\cdots\cdots ⑩ \\ \varepsilon_{h,j,\alpha'} \leqq (\kappa-\tilde\kappa)(m-j_0-h-j-|\alpha'|) \quad (h \geqq 1)\text{。} \end{cases} \end{cases}$$

以上のことを仮定するとき、P に対する flat Cauchy 問題が原点で μ_0-well-posed ならば、

$$\varepsilon_{h,j,\alpha'} \leqq 0 \quad (h=1,\cdots,m;\ j+|\alpha'| \leqq m-h)$$

$\kappa_1 = \mu_0 - 1$ のときの $[N]_1$ はすでにみたされている。($(A-\mu_0, M)$ による)。$\kappa_1 > \mu_0 - 1$ のときは、命題 5.1 において、$\kappa=\kappa_1$, $\nu=\nu_1$, $\tilde\kappa = \mu_0-1$, $\tilde\nu = m(\mu_0-1)$, $j_0=0$ とすると、仮定がすべてみたされて、したがって $[N]_1$ がいえる。以下、$[N]_2, [N]_3, \cdots$ の順に命題 5.1 をくりかえし使うことで $[N]_\lambda$ $(\lambda=1,\cdots,l)$ が証明できる。(⑩ を仮定してよいことについては実は少し議論が必要であるが、細かいことなので省略する。)

定理2については、命題4.2によって、$\tau_0=0$ としてよい

ことに注意すると、次の命題が示せればよい。($h=0$ の場合の結論は命題4.4から導びける。)

命題 5.2

$$\partial_t^j \partial_{\xi'}^{\alpha'} P_{m-h}(t,x;0,e_n) = j!\alpha'!\, t^{\nu-\kappa(j+|\alpha'|+h)-h+(\mu_0-1)|\alpha'|} \cdot b_{j,\alpha'}^{(h)}(t,x),$$

$b_{j,\alpha'}^{(h)} \in C^\infty \quad (h=0,1,\cdots,m;\ j+|\alpha'| \leqq m-h)$ とする。

$$b_{j,\alpha'}^{(0)}(0,0)=0 \quad \text{for } j+|\alpha'| \leqq d-1$$

$$b_{d,0}^{(0)}(0,0) \neq 0$$

とすると、P に対する flat Cauchy 問題が原点で μ_0-well-posed なら、$b_{j,\alpha'}^{(h)}(0,0)=0 \quad \text{for } h+j+|\alpha'| \leqq d-1$.

上の命題5.1, 5.2 が key point であるから、この証明を書かねばならないのであるが、紙数の関係と、Ivrii-Petkov [1] の定理4.1 の証明を少し modify するだけなので省略させていただく。

§6. 定理3の証明の概略

命題4.2 によって、$\tau_0=0$ としてよい。

$\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n$ なる正整数を M, m, κ, ν, d にのみ depend して適当にとり、

$$\begin{cases} t = s\rho^{-\omega_0} \\ x_j = y_j \rho^{-\omega_j} \quad (j=1,\cdots,n) \end{cases} \quad (\rho>0)$$

なる座標変換をすると、P は P_ρ へうつり、任意の正整数 N

に対して、

$$P_\rho = \rho^{\alpha w_0} \frac{b_{d,0}^{(0)}(0,0)}{i^d} \Big\{ s^{\nu-\kappa d-d} \prod_{l=1}^{d} (s\partial_s - i\lambda_l) D_{y_n}^{m-d} + \sum_{j=1}^{N} \rho^{-j} R_j(s,y;D_s,D_y) + \rho^{-(N+1)} \widetilde{R}_{N+1,\rho}(s,y;D_s,D_y) \Big\}$$

となる。但し、α は M, m, κ, ν, d のみできまる定数で、R_j は m 次の微分作用素で係数は $S^{-m}\times E_M$ に入る。又 $\widetilde{R}_{N+1,\rho}$ は m 次作用素で係数は $\rho\to\infty$ のとき、$S^{-m}\times E_M$ で有界。さらに、$D_{y_n}^{m-d+1}, \cdots, D_{y_n}^{m}$ は $R_1, \sim R_d$ にでてこない。このとき、

$$e^{-i\rho y_n} \circ P_\rho \circ e^{i\rho y_n} = \rho^{\alpha w_0 + m-d} \frac{b_{d,0}^{(0)}(0,0)}{i^d} \Big\{ s^{\nu-\kappa d-d} \prod_{l=1}^{d} (s\partial_s - i\lambda_l) + \sum_{j=1}^{N} \rho^{-j} S_j(s,y;D_s,D_y) + \rho^{-(N+1)} \widetilde{S}_{N+1,\rho}(s,y;D_s,D_y) \Big\}$$

となる。($S_j, \widetilde{S}_{N+1,\rho}$ は $R_j, \widetilde{R}_{N+1,\rho}$ と同様の作用素)

$\max_{1\leq l\leq d} \mathrm{Re}\, i\lambda_l = \mathrm{Re}\, i\lambda_1 = -\mathrm{Im}\,\lambda_1$ としてよい。

$a = i\lambda_1$, $\mu_l = \lambda_1 - \lambda_l$ $(l = 1, \cdots, d)$ とすると、

$$s^{-a} \circ e^{-i\rho y_n} \circ P_\rho \circ e^{i\rho y_n} \circ s^{a} = \rho^{\alpha w_0 + m-d} \frac{b_{d,0}^{(0)}(0,0)}{i^d} \Big\{ s^{\nu-\kappa d-d} \prod_{l=1}^{d} (s\partial_s + i\mu_l) + \sum_{j=1}^{N} \rho^{-j} T_j(s,y;D_s,D_y) + \rho^{-(N+1)} \widetilde{T}_{N+1,\rho}(s,y;D_s,D_y) \Big\}$$

$$\equiv \rho^{\alpha w_0 + m-d} \frac{b_{d,0}^{(0)}}{i^d} \cdot L_\rho \quad \text{となる。}$$

但し、$T_j, \widetilde{T}_{N+1,\rho}$ は $R_j, \widetilde{R}_{N+1,\rho}$ と同様の作用素。

$$L_0 = s^{\nu-\kappa d-d} \prod_{l=1}^{d} (s\partial_s + i\mu_l) \quad \text{とする。}$$

$L_\rho u = 0$ を漸近的に解くため、次の補題を用意する。

補題 6.1

K を $\mathbb{R}^n$ の compact set とするとき、$f\in E_M$, $\operatorname{supp} f\subset[0,T]\times K$ に対して、$(s\partial_s+i\mu)v=s^{-\alpha}(\log s)^j f(s,y)$ の解として、

$$v(s,y)=s^{-\alpha}\sum_{h=0}^{j}g_h(s,y)(\log s)^{j-h}+s^{-i\mu}\sum_{h=0}^{j}A_h(y)(\log s)^{j+1-h},$$

$g_h\in E_M$, $\operatorname{supp} g_h\subset[0,T]\times K$, $A_h\in C_0^\infty(K)$ がとれる。

さらに、$\operatorname{Re}\alpha<\operatorname{Re} i\mu$ のときは、$A_h\equiv 0$ $({}^\forall h)$ とできる。

系 6.2

$$\prod_{l=1}^{d}(s\partial_s+i\mu_l)v=s^{-\alpha}(\log s)^j f(s,y)\quad(f\in E_M,\ \operatorname{supp} f\subset[0,T]\times K)$$

の解として、

$$v=s^{-\alpha}\sum_{h=0}^{j}g_h(s,y)(\log s)^{j-h}+\sum_{\substack{\operatorname{Re} i\mu_l\le\operatorname{Re}\alpha\\1\le l\le d}}s^{-i\mu_l}\sum_{h=0}^{j+d-1}A_{l,h}(s,y)(\log s)^{j+d-h},$$

$g_h, A_{l,h}\in E_M$, $\operatorname{supp} g_h$, $\operatorname{supp} A_{l,h}\subset[0,T]\times K$

がとれる。

さて、$L_\rho\left(\sum_{j=0}^{N}u_j\rho^{-j}\right)=O\left(\rho^{-(N+1)}\right)$ をとこう。

まず、$u_0(s,y)\equiv u_0(y)\in C_0^\infty(K)$, $u_0(0)=1$ ととると、

$L_0u_0=0$ となる。

次に、$T_1u_0\in s^{-m}\times E_M$ だから、

$L_0u_1=-T_1u_0$ の解として、

$$u_1\in s^{-m-\nu+(N+1)d}\times E_M+\sum_{\operatorname{Re} i\mu_l\le m+\nu-(N+1)d}s^{-i\mu_l}\sum_{h=0}^{d-1}E_M\cdot(\log s)^{d-h}$$

がとれる。以下、順に系 6.2 を使って

$$u_j=\sum_{l=1}^{jd+1}s^{-\alpha_l^{(j)}}\sum_{h=0}^{jd-1}(\log s)^{jd-h}\tilde{h}_{j,l,h}(s,y),$$

$$\tilde{h}_{j,l,h} \in E_M, \quad supp\, \tilde{h}_{j,l,h} \subset [0,T] \times K,$$
$$0 \leqq Re\, \alpha_l^{(j)} \leqq (2j-1)m + j\nu - j(K+1)d \qquad (l = 1, \cdots, jd+1).$$

ととれる。

$$\begin{cases} v_\rho^{(N)} = \sum_{j=0}^{N} u_j \rho^{-j} \\ U_\rho^{(N)} = e^{i\rho y_n} s^\theta \tilde{\chi}_\rho(s) v_\rho^{(N)} \end{cases}$$

とおく。但し、$\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leqq \chi(t) \leqq 1$,

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & (t \leqq \frac{1}{2}) \\ 1 & (t \geqq 1) \end{cases}, \quad \tilde{\chi}_\rho(s) = \chi(s\rho^{\frac{1}{2\Delta}}), \quad \Delta = 2m+\nu-(K+1)d.$$

このとき、
$$(\partial_s^\nu \tilde{\chi}_\rho)(s) = \rho^{\frac{\nu}{2\Delta}} (\partial_s^\nu \chi)(s\rho^{\frac{1}{2\Delta}})$$
$$= s^{-\nu} \tilde{\chi}_\nu (s\rho^{\frac{1}{2\Delta}}), \quad supp\, \tilde{\chi}_\nu \subset [\tfrac{1}{2}, 1],$$
$$(\nu = 1, 2, \cdots)$$

となっている。求める結果は次の2つの補題から出る。

<u>補題　6.3</u>

定理3の仮定の不等式が成立するとき、ある定数 $\tilde{C} > 0$ があって、

$$\|\tilde{u}\|_{p,t} \leqq \tilde{C} \cdot \rho^{(q-p)\omega_n} \|P_\rho \tilde{u}\|_{q,t} \quad (*)$$
$$\text{for } \rho >> 1, \ \forall t \in (0,1], \ \forall \tilde{u} \in C_0^\infty(B^+)$$

但し、
$$\begin{cases} B^+ = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ t^2 + |x|^2 \leqq 1,\ 0 \leqq t\} \\ \|v\|_{p,t} = \begin{cases} \|D_{y_n}^p v\|_{L^2(B_t^+)} & (p \geqq 0 \text{ のとき}) \\ \|v\|_{H^p(B_t^+)} & (p \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases} \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\|v\|_{g,t}^{(*)} = \begin{cases} \|v\|_{H^g(B_t^+)} & (g \geqq 0) \\ \sup\limits_{w \in C_0^\infty(B_t^+)} \dfrac{|(v,w)_{L^2(B_t^+)}|}{\|D_{y_n}^{|g|} w\|_{L^2(B_t^+)}} & (g \leqq 0) \end{cases} \\
B_t^+ = \{ (s,y) \in B^+ ;\ s \leqq t \}
\end{cases}
$$

<u>補題 6.4</u>

$0 < t_0$ と原点の compact 近傍 K を適当にとると、$\delta > 0$, $C > 0$ があって、

$$
\begin{cases}
\|U_\rho^{(N)}\|_{p,t_0} \geqq \delta \cdot \rho^p \\
\|P U_\rho^{(N)}\|_{g,t_0}^{(*)} \leqq C\ \rho^{\alpha\omega_0 + \frac{m}{2\Delta} + g - \frac{\mathrm{Re}\,\theta}{2\Delta}}
\end{cases}
$$

この２つの補題によって、

$$
p \leqq (g-p)\omega_n + \alpha\omega_0 + \frac{m}{2\Delta} + g - \frac{\mathrm{Re}\,\theta}{2\Delta}
$$

$$
\therefore\ \mathrm{Re}\,\theta \leqq C_0(g+m-p)
$$

（C_0は M, m, κ, ν, d にのみ depend する.）

文献

[1] V. Y. Ivrii – V. M. Petkov : Necessary conditions for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed, Russian Math. Surveys, 29 (1974), 1–70.

[2] R. Sakamoto : Cauchy problem for degenerate hyperbolic

equations, Comm. Pure Appl. Math., 33 (1980), 785–816.

[3] T. Mandai: On energy inequalities and regularity of solutions to weakly hyperbolic Cauchy problems, to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ.

[4] T. Mandai: Necessary conditions for the well-posedness of flat Cauchy problems and regularity-loss of solutions, in preparation.