数理解析研究所講究録
529巻 1984年 1-20

内部領域における消散項を持つ非線型双曲型方程式の大域解

筑波大 数学系 柴田 良弘

§1. 結果. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 有界領域, $\partial\Omega$をその境界でコンパクト, C^∞とする。$x=(x_1\cdots x_n)$を空間, tを時間変数とし, 微分記号として, $\partial_t=\partial_0=\partial/\partial t$, $\partial_x=(\partial_1,\cdots\partial_n)$ ($\partial_j=\partial/\partial x_j$)等を用いる。次の混合問題を考える。

(1.1) $\Phi(u)=\mathcal{L}u+F(t,x,\Lambda u)=f(t,x)$ in $[0,\infty)\times\Omega$

$u(t,x)=0$ on $[0,\infty)\times\partial\Omega$.

$u(0,x)=\phi_0(x)$, $\partial_t u(0,x)=\phi_1(x)$ in Ω.

ここで作用素 $\mathcal{L}$, Λ 及び非線形関数 F に次の仮定をおく。

(1.2) 仮定. A^0 $\mathcal{L}$は

$$\mathcal{L}u=\partial_t^2u-\sum_{i,j=1}^n\partial_i(a_{ij}(t,x)\partial_ju)+\sum_{j=1}^n a_j(t,x)\partial_j\partial_tu+\sum_{j=0}^n b_j(t,x)\partial_ju$$
$$+c(t,x)u+d(t,x)u$$

の形をしており, 係数は次の条件を満足する。

1° 係数 a_{ij}, a_j, b_j, c, d はすべて real-valued $\mathcal{B}^\infty([0,\infty)\times\overline{\Omega})$ functions である。

2° $a_{ij}=a_{ji}$ かつある正定数 k_0 に対して

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geqq 2k_0|\xi|^2$$

が任意の $\xi\in\mathbb{R}^n$, $(t\cdot x)\in[0\ \infty)\times\Omega$ について成立する。

3° $c(t,x)\geqq 0$.

4° ある正定数 k_1, T_0 に対して

$$b_0(t,x)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\partial_i a_i(t\cdot x)\geqq 2k_1$$

が任意の $(t\cdot x)\in[0,\infty)\times\Omega$ について成立する。

5° $$\lim_{t\to\infty}\Big\{\sup_{x\in\bar{\Omega}}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}|\partial_t a_{ij}(t\cdot x)|+\sum_{j=1}^{n}|\partial_t a_j(t\cdot x)|+\sum_{j=1}^{n}|b_j(t\cdot x)|$$

$$+|d(t\cdot x)|+|\partial_t c(t\cdot x)|\Big]\Big\}=0$$

が成立する。

B° $\Lambda u=(u,\partial_0 u,\dots,\partial_n u;\ \partial_i\partial_j u, 0\leq i\leq j\leq n)$ また作用素 Λ に対応する変数を $\lambda=(\lambda^*;\lambda_0,\dots,\lambda_n;\ \lambda_{ij}\ 0\leq i\leq j\leq n)$ とする。

さらに関数 $F(t,x,\lambda)$ は次の性質をもつ。

1° $F\in\mathcal{B}^\infty([0,\infty)\times\bar{\Omega}\times\{|\lambda|\leq 1\})$

2° F は real valued

3° $F(t\cdot x\cdot 0)=0$, $\mathrm{grad}_\lambda F(t\cdot x\cdot 0)=0$ for all $(t\cdot x)\in[0\cdot\infty)\times\bar{\Omega}$

以上の仮定の下で次の(1.1)に対する大域解の存在と一意性及び，解の t についての減少の order に関する結果が得られる。

定理 1.（存在）. $K \geqq 0$, fixed number, $m \geqq 2$ 整数, 仮定(1.2)が成立しているとする。この時次の事が成立する。

十分小なる正定数 δ_m と十分大なる正整数 M_m（共に m のみに依存する。）があって, data, ϕ_0, ϕ_1, f が m 回の整合条件（後に定義）を満足し, さらに

$$\sup_{x\in\Omega}\Big\{\sum_{|\alpha|\leq M_m+2}|\partial_x^\alpha\phi_0(x)|+\sum_{|\alpha|\leq M_m+1}|\partial_x^\alpha\phi_1(x)|\Big\}+\sup_{\substack{x\in\bar\Omega\\ t\geqq 0}}\Big\{\sum_{|\alpha|+j\leq M_m}(1+t)^K|\partial_x^\alpha\partial_t^j f(t,x)|\leq\delta_m$$

であれば, (1.1) の古典解 $u\in C^m([0,\infty)\times\bar\Omega)$ で

$$\sup_{\substack{x\in\Omega\\ t\geqq 0}}\sum_{|\alpha|+j\leq m}(1+t)^K|\partial_x^\alpha\partial_t^j u(t,x)|\leq C\delta_m$$

なるものが存在する。ここで C は δ_m, M_m, ϕ_0, ϕ_1, f には独立の定数である。 ☒

定理 2（一意性）. $m \geqq 3$ 整数. 仮定(1.2)が成立しているとする。δ_m, M_m を定理 1 のものとする。この時ある δ_m' ($\leq\delta_m$) が存在して, data ϕ_0 ϕ_1, f は δ_m', M_m について定理 1 の条件を満足しているものとする。u を定理 1 で保証された (1.1) の C^m class の解とする。もし $v\in C^m([0,\infty)\times\bar\Omega)$ が (1.1) に対するもう一つの解であれば, $u=v$ である。 ☒

[注] (1.1)の解という時は $|\Lambda v|\leq 1$ なる条件は満足されている。
☒

定理 3.（exponential decay） $m \geqq 3$. 整数. この時. ある δ_m''

で次の性質を満足するものが存在する：M_m, δ_m を定理1のものとし，$0<\delta_m''\le\delta_m$。ϕ_0, ϕ_1, f を $K=0$, M_m, δ_m'' に対して定理1の条件を満足しているものとする。さらに f は

$$\int_\Omega |f(t,x)|^2 dx \le Ce^{-\beta t} \qquad t\geq 0$$

をある定数 $\beta>0$, $C>0$ に対して満足しているものとし，u を(1.1)の定理1で保証されている解とする。ならば

$$\int_\Omega \left[|\partial_t u(t,x)|^2 + \sum_{i=1}^n |\partial_i u(t,x)|^2 \right] dx \le C' e^{-\beta' t}, \quad t\geq 0$$

がある定数 $\beta'>0$, $C'>0$ に対して成立する。 ▨

定理1の証明は，線形化した問題に対しての一様な decay 評価を用いて，smoothing process をもつ quadratic iteration scheme を作ることにより行なわれる。これはいわゆる Nash-Moser technique として良く知られている。

以下定理1の証明の概略を述べる。尚定理2，3の証明は省略するが，簡単に言えば，例えば定理2であれば，$w=u-v$ とおいて問題を

$$\mathcal{L}w + \int_0^1 \partial_\lambda F(t,x,\Lambda v+\theta\Lambda w)d\theta\cdot\Lambda w = 0 \ \text{ in } (0,\infty)\times\Omega, \quad w=0 \text{ on } [0,\infty)\times\partial\Omega$$

$w(0,x)=\partial_t w(0,x)=0$ in Ω と w についての線形な双曲型混合問題にして，w, $v\in C^3$ の仮定から通常の energy method を用いて $w\equiv 0$ を示す。

§2. 準備.

2.1. 記号. ここで述べないものについては通常の記号とする。 semi-norms: $\|\phi\|_{p,N} = \sum_{|\alpha|\le N} \|\partial_x^\alpha \phi\|_{L_p(\Omega)}$

$|f|_{p,N,[a,b]} = \sup_{a\le t\le b} \sum_{j+|\alpha|\le N} \|\partial_t^j \partial_x^\alpha f(t,\cdot)\|_{L_p(\Omega)}$

$|f|_{p,N,K} = \sup_{t\ge 0} (1+t)^K \sum_{j+|\alpha|\le N} \|\partial_t^j \partial_x^\alpha f(t,\cdot)\|_{L_p(\Omega)}$

$f=(f_1,\dots f_s)$. vector の時

$|\partial_t^j \partial_x^\alpha f|_{p,N,[a,b]} = \sum_{k=1}^{s} |\partial_t^j \partial_x^\alpha f_k|_{p,N,[a,b]}$

$|\partial_t^j \partial_x^\alpha f|_{p,N,K} = \sum_{k=1}^{s} |\partial_t^j \partial_x^\alpha f_k|_{p,N,K}$

関数 F の Λ についての微分.

$\partial_\Lambda^k F(t,x,\Lambda u)(\Lambda v_1,\dots,\Lambda v_k) = \partial_{\theta_1} \cdots \partial_{\theta_k} F(t,x,\Lambda u+\theta_1\Lambda v_1+\dots+\theta_k\Lambda v_k)\Big|_{\theta_1=\dots=\theta_k=0}$

$\Lambda_1 u = (u,\partial_1 u,\dots \partial_n u)$, $\Lambda_2 u = (u,\partial_1 u,\dots \partial_n u,\partial_i\partial_j u \ 1\le i\le j\le n)$

$F(t,x,\Lambda u) = F(t,x,\Lambda_2 u,\Lambda_1 \partial_t u,\partial_t^2 u)$.

また C, $C_{p_1\dots p_s}$ を夫々絶対定数, 本質的に量 $p_1\dots p_s$ にのみ依存する定数を表わすものとする。

2.2. 補間不等式.

2.1で定義された semi-norms に対して (Seeley's ext theorem と) 次の補間不等式が成立することが重要である。これは村松の表現定理を用いて示されるが, この定理を用いれば, もっと一般に円錐条件を満足する領域について変数によって異なる norm をもつ semi-norms の族について補間不等式を示すことが可能である。

Lemma 2.1. $0 \le M \le N$, 整数, $1 \le p \le \infty$, $K \geqq 0$ real number.

(i) $$\sum_{|\alpha|=M} \| \partial_x^\alpha \phi \|_{L_p(\Omega)} \le C_{N,p} \left(\|\phi\|_{L_p(\Omega)} \right)^{1-\frac{M}{N}} \left(\|\phi\|_{p,N} \right)^{\frac{M}{N}}$$

(ii) $$\sum_{j+|\alpha|=M} |\partial_t^j \partial_x^\alpha f|_{p,0,K} \le C_{p,N,K} \left(|f|_{p,0,K} \right)^{1-\frac{M}{N}} \left(|f|_{p,N,K} \right)^{\frac{M}{N}}$$

(iii) $$\sum_{j+|\alpha|=M} |\partial_t^j \partial_x^\alpha f|_{p,0,[a,b]} \le C_{p,N,a,b} \left(|f|_{p,0,[a,b]} \right)^{1-\frac{M}{N}} \left(|f|_{p,N,[a,b]} \right)^{\frac{M}{N}}$$

Lemma 2.1 と Hölder's ineq. $a \cdot b \le \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$ を用いて次が示せる。

Lemma 2.2. 1° $\|\phi\|_{p,N} \|\chi\|_{q,M} \le C [\|\phi\|_{p,k} \|\chi\|_{q,M+N-k} + \|\phi\|_{p,N+M-l} \|\chi\|_{q,l}]$

2° $\|\phi\|_{p,N} |f|_{q,M,[a,b]} \le C [\|\phi\|_{p,k} |f|_{q,N+M-k,[a,b]} + \|\phi\|_{p,N+M-l} |f|_{q,l,[a,b]}]$

3° $\|\phi\|_{p,N} |f|_{q,M,K} \le C [\|\phi\|_{p,k} |f|_{q,N+M-k,K} + \|\phi\|_{p,N+M-l} |f|_{q,l,K}]$

4° $|f|_{p,N,[a,b]} |g|_{q,M,[a',b']} \le C (|f|_{p,N+M-l,[a,b]} |g|_{q,l,[a',b']} +$
$|f|_{p,k,[a,b]} |g|_{q,N+M-k,[a',b']})$

5° $|f|_{p,N,[a,b]} |g|_{q,M,K} \le C [|f|_{p,k,[a,b]} |g|_{q,N+M-k,K}$
$+ |f|_{p,N+M-l,[a,b]} |g|_{q,l,K}]$

6° $|f|_{p,N,K} |g|_{q,M,K'} \le C [|f|_{p,k,K} |g|_{q,N+M-k,K'}$
$+ |f|_{p,N+M-l,K} |g|_{q,l,K'}]$

但し定数 C は夫々の量 $p, q, a, b, a', b', N, M, k, K'$ に依存し k, l, N, M は正整数で $0 \le k \le N$, $0 \le l \le M$ を満足し, $1 \le p, q \le \infty$, a, b, a', b' は実数 ($a \le b$, $a' \le b'$) $K, K' \geqq 0$

∎

2.3 整合条件。 $u \in C^\infty$ と簡単の為に仮定する。u に対して f, ϕ_0, ϕ_1 を

(ア) $f = \Phi(u)$, $u(0\,x) = \phi_0(x)$, $\partial_t u(0\,x) = \phi_1$

とおく。さらに

(イ) $u_j(x) = (\partial_t^p u)(0\ x)$ $p \geqq 2$; $u_0 = \phi_0$. $u_1 = \phi_1$

とおく。以下 u_j $(j \geqq 2)$ を f. ϕ_0 ϕ_1 で評価し、さらに整合条件を導入する。定義から

(ウ) $u_2 + a_1^{(0)}(0.x\ \partial_x)u_1 + a_2^{(0)}(0.x.\partial_x)u_0 + F(0.X, \Lambda_2 u_0.\Lambda_1 u_1.u_2)$

$= f(0.x)$

但し $a_1^{(j)}(t\ x\ \partial_x)\chi(x) = \sum_{k=1}^n \partial_t^j a_k(t\,x)\partial_k \chi(x) + \partial_t^j b_0(t\,x)\chi(x)$

$a_2^{(j)}(t, x, \partial_x)\chi(x) = \sum_{i,k=1}^n \partial_i(\partial_t^j a_{ik}(t\,x)\partial_k \phi(x))$

$+ \sum_{i=1}^n \partial_t^j b_i(t\,x)\partial_i \chi(x) + (\partial_t^j c(t\,x) + \partial_t^j d(t\,x))\chi(x)$.

今 $F(t.x.0) = 0$, $\partial_\lambda F(t\ x.0) = 0$ より陰関数の定理を用いて、ある十分小なる正定数 σ_0 と $U(x, \lambda_1.\lambda_2, g) \in C^\infty(\Omega \times \{(\lambda_1.\lambda_2, g) : |\lambda_1| + |\lambda_2| + |g| \leqq \sigma_0\}$ があって、U は一意的に決まり、かつ $U(x.0.0.0) = 0$ また、非線形方程式：

$U - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(0\,x)\lambda_{ij} - \sum_{ij}\partial_i a_{ij}(0.x)\lambda_j + \sum_{j=1}^n a_j(0\,x)\lambda_{0.j} +$

$+ \sum_{j=0}^n b_j(0.x)\lambda_j + c(0.x)\lambda^* + d(0.x)\lambda^* + F(0.x.\ \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_1, U) - g = 0$

を満足する。($\hat{\lambda}_2$. $\hat{\lambda}_1$ は Λ_2, Λ_1 に対応する変数)こうして、もし $\|\Lambda_2\phi_0\|_\infty + \|\Lambda_1\phi_1\|_\infty + \|f(0.\cdot)\|_\infty \leqq \sigma_0$ $\Rightarrow$

$u_2(x) = U(x, \Lambda_2\phi_0, \Lambda_1\phi_1, f(0\,x))$

さらに、帰納法により、ある C^∞ functions $G^{(j)}_{\alpha,\beta,\gamma}$ $(j=0,1,\dots,p-2)$ があって

(i) $\partial_t^{p-2}\bar{F}(0,x,\Lambda_2 u,\Lambda_1\partial_t u,\partial_t^2 u)|_{t=0} = \partial_{\lambda_{0,0}}\bar{F}(0,x,\Lambda_2 u_0,\Lambda_1 u_1,u_2)u_p +$

$+\sum_{\alpha,\beta,\gamma} G^{(0)}_{\alpha,\beta,\gamma}(x,\Lambda_2 u_0,\Lambda_1 u_1,u_2)(\Lambda_2 u_1)^{\alpha_1}\cdots(\Lambda_2 u_{p-2})^{\alpha_{p-2}}(\Lambda_1 u_1)^{\beta_1}\cdots(\Lambda_1 u_{p-1})^{\beta_{p-2}}\cdot$
$(u_3)^{\beta_{p-2}}\cdots(u_{p-1})^{\gamma_{p-3}},$

$(|\alpha_1|+\cdots+(p-2)|\alpha_{p-2}|+|\beta_1|+\cdots+(p-2)|\beta_{p-2}|+\gamma_1+\cdots+(p-3)\gamma_{p-3}=p-2)$

(ii) $\partial_t^{p-2-j}\bar{F}^{(j)}(0,x,\Lambda_2 u,\partial_t\Lambda_1 u,\partial_t^2 u)|_{t=0} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} G^{(j)}_{\alpha,\beta,\gamma}(x,\Lambda_2 u_0,\Lambda_1 u_1,u_2)\times$
$\times(\Lambda_2 u_1)^{\alpha_1}\cdots(\Lambda_2 u_{p-2-j})^{\alpha_{p-2-j}}(\Lambda_1 u_2)^{\beta_1}\cdots(\Lambda_1 u_{p-1-j})^{\beta_{p-2-j}}(u_3)^{\gamma_1}\cdots(u_{p-j})^{\gamma_{p-2-j}}$ $(j\geq 1)$

$(\sum_{l=1}^{p-2-j} l(|\alpha_l|+|\beta_l|+\gamma_l) = p-2-j)$

但し、$\bar{F}^{(j)}(0,x,\lambda) = \partial_t^j\bar{F}(t,x,\lambda)|_{t=0}$ とおいた。

が成立する。以上より $\bar{F}(0,x,0)=0$, $\partial_\lambda\bar{F}(0,x,0)=0$, $\bar{\Gamma}(x,0,0,0)=0$ と注意して Lemma 2.2 を用いて 帰納的に次の事が示せる。

Lemma 2.3. u に対して ϕ_0,ϕ_1,f,u_j を (ア),(イ) で定義されたものとする。この時ある十分小なる正定数 σ_1 があって もし $\|\phi_0\|_{\infty,2}+\|\phi_1\|_{\infty,1}+|f|_{\infty,0,[0,1]}\leq\sigma_1$ であれば

$$\|u_p\|_{\infty,L}\leq C_L\{\|\phi_0\|_{\infty,L+p}+\|\phi_1\|_{\infty,L+p-1}+|f|_{\infty,L+p-2,[0,1]}\}$$

を満足する。 図

定義 2.4. $\phi_0\in C^L(\bar{\Omega})$, $\phi_1\in C^{L-1}(\bar{\Omega})$, $f\in C^{L-2}([0,\infty)\times\bar{\Omega})$ として σ_1 を Lemma 2.3 のものとする。

ϕ_0, ϕ_1 f が L階の整合条件を満足するとは次の2つの条件を満足することを云う。

(i) $\|\phi_0\|_{\infty,2} + \|\phi_1\|_{\infty,1} + |f|_{\infty,0,[0,1]} \leq \delta_1$

(ii) $u_j(x)$ を $u_2(x)$ は(5)で定義されたもの. $j \geq 3$ について

$$u_j(x) = -(1+\partial_{\lambda_{0,0}} F(0,x,\Lambda_2 u_0, \Lambda_1 u_1, u_2))^{-1} \times$$

$$\times \{ \sum_{k=0}^{p-2} \binom{p-2}{k} [a_1^{(k)}(0,x,\partial_x) u_{p-1-k} + a_2^{(k)}(0,x,\partial_x) u_{p-2-k}] +$$

$$\sum_{j=0}^{p-2} \frac{(p-2)!}{(p-2-j)!\,j!} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} G^{(j)}_{\alpha,\beta,\gamma}(x,\Lambda_2 u_0, \Lambda_1 u_1, u_2)(\Lambda_2 u_1)^{\alpha_1} \cdots (\Lambda_2 u_{p-2-j})^{\alpha_{p-2-j}} \times$$

$$\times (\Lambda_1 u_2)^{\beta_1} \cdots (\Lambda_1 u_{p-1-j})^{\beta_{p-2-j}} (u_3)^{\gamma_1} \cdots (u_{p-j})^{\gamma_{p-2-j}} - \partial_t^{p-2} f(0,x) \}$$

とおいた時.

$$\phi_0(x) = 0, \quad \phi_1(x) = 0, \quad u_j(x) = 0 \quad (j = 2 \cdots L-1) \text{ on } \Omega \text{ 図}$$

2.4. "Smoothing operator" $\phi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$, $\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \phi(x)dx = 0$ $(|\alpha| \geq 1)$ なるものとする。また $\chi^j(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ を $\chi^j(t) = 0$ for $t \leq 0, t \geq 1/2$, $\int_0^\infty \chi^j(t)dt = 1$, $\int_0^\infty t^k \chi^j(t)dt = 0$, $1 \leq k \leq j$, なるものとする。さらに $\hat{u}(t,x)$ を t を parameter とみて, u を $\mathbb{R}^n$ の関数に良く知られた Seeley の方法により拡張したものとする。$\hat{u}$ は次の性質をもつ

(ア) $\hat{u}(t,x) = u(t,x) \quad {}^\forall(t,x) \in [0,\infty) \times \overline{\Omega}$

(イ) $\sum_{j=0}^{M} \|\partial_t^j \hat{u}(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n), M-j} \leq C_{p,L} \sum_{j=0}^{M} \|\partial_t^j u(t,\cdot)\|_{p, M-j}$

$\left(\|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n), M-j} = \sum_{|\alpha| \leq M-j} \|\partial_x^\alpha \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)$

さらに $u \in C^M([0,\infty)\times\overline{\Omega})$ の時 $\hat{u} \in C^M([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$，また $\partial_t^j u(0,x)=0$ の時は $\partial_t^j \hat{u}(0,x)=0$ を満足する様に出来る。

$\theta \geqq 1$ に対して <u>j-階の smoothing operator $S^j(\theta)$</u> を

$$S^j(\theta)u = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \theta^{n+1} \chi^{j-1}(\theta(t-s))\,\phi(\theta(x-y))\,\hat{u}(s,y)\,ds\,dy$$

で定義する。この時次の基本的な性質をもつことがわかる。

Lemma. 2.5. $K \geqq 0$，$\theta \geqq 1$，$1 \leqq p \leqq \infty$，j，L を自然数とする。この時次の事柄が成立する。

(i) $\mathcal{E}^{N,p,K} = \{ f;\ |f|_{p,N,K} < \infty \}$ とする。この時 $S^j(\theta)u \in C^\infty([0,\infty)\times\overline{\Omega})$ かつ

$$\partial_t^k S^j(\theta)u\,\big|_{t=0} = 0 \quad , \quad k = 0, 1, 2, \cdots\cdots$$

(ii) $u \in \mathcal{E}^{j,p,K} \cap C^j$ の時は

$$|(1-S^j(\theta))u|_{p,0,K} \leqq C_{p,j,K}\,\theta^{-j}\,|u|_{p,j,K}.$$

(iii) M, N を $0 \leqq M \leqq N$ なる整数とする。$u \in \mathcal{E}^{N,p,K} \cap C^N$ が $\partial_t^i u(0,x) = 0$ for $i = 0, \cdots, N-1$ を満足するとする。ならば

$$|S^j(\theta)u|_{p,M,K} \leqq C_{p,M,N,K,j}\,\theta^{M-N}\,|u|_{p,N,K}. \quad \square$$

§3. 線形化された方程式について。ここでは次の線形作用素を考える。

$$\text{(3.1)} \quad A_0 \partial_t^2 u - \sum_{i,j=1}^n \partial_i (A_{ij} \partial_j u) + \sum_{j=1}^n A_j \partial_j \partial_t u + B_0 \partial_t u + \sum_{j=1}^n B_j \partial_j u$$

$$+ Cu + Du = F \qquad \text{in } [0,\infty)\times\Omega$$

$$u = 0 \qquad \text{on } [0,\infty)\times\partial\Omega$$

$$u(0,x) = \partial_t u(0,x) = 0 \qquad \text{in } \Omega.$$

但し F は $\partial_t^j F(0,x) = 0$ for $j = 0, 1, \dots, \hat{m}-3$

を満足するものと以下仮定する。また

$$\hat{m} = 2\{\max([n/2]+2, m-1)\} + 4 + [n/2]。$$

今 係数に次の仮定をおく。

(3.2) 仮定. 1° 係数 A_{ij}, A_j, B_j, C, D はすべて real-valued $\mathcal{B}^\infty([0,\infty)\times\overline{\Omega})$ functions とする。

2° $A_{ij} = A_{ji}$, $\sum_{ij=1}^n A_{ij}\xi_i\xi_j \geq k_0|\xi|^2$, $\frac{1}{2} \leq A_0 \leq \frac{3}{2}$, $C > 0$.

3° $B_0 - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^n \partial_j A_j \geq k_1$ for any $(t,x) \in [T_0,\infty)\times\overline{\Omega}$.

4° $\sum_{ij=1}^n |A_{ij}|_{\infty,0,0} + \sum_{j=1}^n |A_j|_{\infty,0,0} + |B_0|_{\infty,0,0} + |C|_{\infty,0,0} +$
$+ \sum_{j=0}^n |\partial_j A_j|_{\infty,0,0} + \sum_{ijk=1}^n |\partial_k A_{ij}|_{\infty,0,0} \leq C_0$

但し $C_0 = 2[\sum_{ij=1}^n(|a_{ij}|_{\infty,0,0} + \sum_{k=1}^n |\partial_k a_{ij}|_{\infty,0,0}) + \sum_{j=1}^n |\partial_j a_j|_{\infty,0,0}$
$+ |b_0|_{\infty,0,0} + |c|_{\infty,0,0}]$ ∎

energy を $E(t,x) \equiv \frac{1}{2}\int_\Omega \{A_0(t,x)(\partial_t u(t,x))^2 + \sum_{ij=1}^n A_{ij}(t,x)\partial_i u(t,x)\partial_j u(t,x)$
$+ C(t,x)(u(t,x))^2\}dx$ とおいて, Poincaré's inequality と部分積分より次が従う。

Theorem 3.1. $T > 0$ 任意の定数, (3.2)の 1°, 2° を仮定する。

$$\mathcal{A}_N = |(A_i, i=0,\dots,n; A_{ij}, i,j=1\dots n; B_j, j=0,\dots,n; C, D)|_{\infty,N,0}$$

$$C_1 = 2[\sum_{ij=1}^n |a_{ij}|_{\infty,1,0} + \sum_{j=1}^n |a_j|_{\infty,1,0} + \sum_{j=0}^n |b_j|_{\infty,1,0} + |c|_{\infty,1,0} + |d|_{\infty,1,0}$$
$$+ 1]$$

とおく。$\mathcal{A}_1 \leq C_1$ を仮定する。今 $\partial_t^j F(0,x) = 0$, $j = 0, 1, \dots, \hat{m}-3$

$|F|_{2,\hat{m}-1,0}$ に対して (3.1)の解 u が $[0,T]$ で存在し $\partial_t^j u(0,x)=0$ $j=0,\dots,\hat{m}-1$ を満足し，さらに

$$|u|_{2,N,[0,T]} \le C_{T,N}\left(|F|_{2,N-1,[0,T]} + \mathcal{A}_N |F|_{2,0,[0,T]}\right)$$

である。但し

$$|f|_{2,N,[0,T]} = \sup_{0\le t\le T} \sum_{|\alpha|+j\le N} \|\partial_t^j\partial_x^\alpha f(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega)}. \quad \boxtimes$$

次に decay estimate を示す。これもまた方程式(3.1)に u と $\partial_t u$ をかけてまと部分積分することと，Poincaré's inequality から示せる。

Theorem 3.2. (3.2) 1°〜4° を仮定する。$K>0$.

$$\mathcal{B}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \|(\partial_t A_{ij}(t,\cdot),\ i,j=1,\dots,n;\ \partial_t A_j(t,\cdot),\ j=0,\dots,n;\ B_j(t,\cdot),\ j=1,\dots,n;$$
$$\partial_t C(t,\cdot);\ D(t,\cdot))\|_{\infty,0}$$

とおく。この時次の性質を満足する正定数 $K_{\hat{m}}$, $T_{\hat{m}}$ が存在する。[性質](i) $K_{\hat{m}}$, $T_{\hat{m}}$ は本質的に c_0, $\hat{m}$ にのみ依存する。

(ii) $\mathcal{A}_1 \le C_1$ さらに $\mathcal{B}(t) \le K_{\hat{m}}$ if $t \ge T_{\hat{m}}$ を仮定する。この時 Theorem 3.1 で保証される data F に対する (3.1) の解 u について次の一様な decay estimate が成立する。

$$|u|_{2,N,K} \le C_{\hat{m},K}\left[|F|_{2,N-1,K} + \mathcal{A}_N |F|_{2,0,K}\right]$$

for any integer $N \in [1,\hat{m}]$。ここで $C_{\hat{m},K}$ は本質的に $\hat{m}$, $K, c_0, C_1, k_0, k_1, T_{\hat{m}}$ にのみ依存する定数である。 $\boxtimes$

§4. Iteration scheme. 2.3 節の考察より，初期 data φ_0 φ_1 と f は $\hat{m}$ 階の整合条件を満足するものとする。さらに u_j $(j\geq 0)$ を φ_0 φ_1 f に対応して 2.3 節で逐次決定したものとする。この時，$\rho(t)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ を $\rho(t)=1$ near $t=0$, $\rho=0$ $|t|\geq 1/2$ なるものとして，

$$v(t,x)=\Big[\sum_{j=0}^{\hat{m}-1}\frac{t^j}{j!}u_j(x)\Big]\rho(t)$$

とおく。$\hat{m}$ 階の整合条件を満足するから，$v|_{\partial\Omega\times[0\infty)}=0$ である。さらに

$$|v|_{\infty,N,K}\leq C_{N,K}\big[\|\phi_0\|_{\infty,N+\hat{m}-1}+\|\phi_1\|_{\infty,N+\hat{m}-2}+|f|_{\infty,N+\hat{m}-3,K}\big]$$

である。今 $u=v+w$ の形で解を求めるとして，w について方程式を書き直せば，Taylor 展開により

$$(4.1)\quad \mathcal{L}w+(\partial_\lambda F)(t,x,\Lambda v)\Lambda w+G(t,x,\Lambda w)=g(t,x)\quad \text{in } [0\infty)\times\Omega$$

$$w=0\quad \text{on } [0\infty)\times\partial\Omega$$

$$w(0,x)=0\qquad (\partial_t w)(0,x)=0\qquad \text{in } \Omega$$

但し

$$g(t,x)=f(t,x)-\Phi(v(t,x)),$$

$$G(t,x,\lambda)=\int_0^1(1-\theta)\,\partial_\lambda^2F(t,x,\Lambda v+\theta\lambda)(\lambda,\lambda)\,d\theta$$

である。2.3節の考察から特に $(\partial_t^j g)(0,x)=0$, $0\leq j\leq\hat{m}-3$ が成り立つ。そこで

$$\hat{\mathcal{L}}w=\mathcal{L}w+(\partial_\lambda F)(t,x,\Lambda v)\Lambda w=(1+\hat{a}_0)\partial_t^2w-\sum_{j=1}^n\partial_i(\hat{a}_{ij}\partial_j w)$$

$$+\sum_{j=1}^n\hat{a}_j\partial_j\partial_t w+\hat{b}_0\partial_t w+\sum_{j=1}^n\hat{b}_j\partial_j w+cw+\hat{d}w$$

(c ははじめのもの) とおくと $\partial_\lambda F(t,x,0)=0$ より，

初期dataを十分小さくとれば

(4.2) (i) $\sum_{i,j=1}^{n} \hat{a}_{ij}\xi_i\xi_j \geq \frac{3}{2}k_0|\xi|^2$, $\frac{3}{4} \leq 1+\hat{a}_0 \leq \frac{5}{4}$. $\hat{a}_{ij} = \hat{a}_{ji}$

(ii) $\hat{b}_0(t,x) - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} \partial_i \hat{a}_i(t,x) \geq \frac{3}{2}k_1$ if $t \geq T_0$

(iii) $\sum_{i,j=1}^{n} |\hat{a}_{ij}|_{\infty,0,0} + \sum_{i,j,k=1}^{n} |\partial_k \hat{a}_{ij}|_{\infty,0,0} + |\hat{b}_0|_{\infty,0,0} + |c|_{\infty,0,0}$
$+ \sum_{j=0}^{n} |\partial_j \hat{a}_j|_{\infty,0,0} + \sum_{i,j,k=1}^{n} |\partial_k \hat{a}_{ij}|_{\infty,0,0} \leq \frac{3}{4}C_0$

(iv) $|(\hat{a}_{ij}, i,j=1,\dots,n; 1+\hat{a}_0; \hat{a}_j, j=1,\dots,n; \hat{b}_j, j=0,\dots,n; c; \hat{d})|_{\infty,1,0}$
$\leq \frac{3}{2}C_1$

また $v(t,x)=0$ $t \geq 1/2$ より $\hat{a}_0 = 0$. $\hat{a}_{ij} = a_{ij}$ $\hat{a}_j = a_j$
$b_j = \hat{b}_j$. $\hat{d} = d$ if $t \geq 1/2$ が成立する。 ☐

そこで次のような iteration scheme を作る。まず w_0 を

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{L}}w = g & \text{in } [0,\infty)\times\Omega, \quad w=0 \text{ on } (0,\infty)\times\partial\Omega. \\ w(0,x) = \partial_t w(0,x) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

の定理3.1, 3.2で保証された解とする。w_{p+1}を順次

$$w_{p+1} = w_p + \dot{w}_p = \sum_{j=0}^{p} \dot{w}_j + w_0$$

で与えるとして、今 $\dot{w}_0,\dots,\dot{w}_p$ が既に与えられているとする。$B>1$ を fixed constant として

$$S_p w = S^{\hat{l}}(B^p)w$$

とおく。但し

$$\hat{l} = 2\max(m-1, [n/2]+2)+1.$$

次に 2階の線形作用素 L_p を

$$L_p w = \hat{\mathcal{L}}w + \partial_\lambda G(t,x,S_p\Lambda w_p)\Lambda w$$

とおく。剰余項 e_p', e_p'', e_p は,

$$e_p' = \partial_\lambda G(t,x,\Lambda w_p)\Lambda \dot{w}_p - \partial_\lambda G(t,x,s_p\Lambda w_p)\Lambda \dot{w}_p$$

$$e_p'' = \mathcal{L} w_{p+1} + G(t,x,\Lambda w_{p+1}) - (\mathcal{L} w_p + G(t,x,\Lambda w_p))$$
$$\qquad - (\mathcal{L} \dot{w}_p + \partial_\lambda G(t,x,\Lambda w_p)\Lambda \dot{w}_p)$$

$$e_p = e_p' + e_p''$$

とおく。最後に,

$$g_0 = -S_0[G(t,x,\Lambda w_0)]$$

$$g_{p+1} = -(S_{p+1}-S_p)E_p - S_{p+1}e_p - (S_{p+1}-S_p)G(t,x,\Lambda w_0)$$

但し　$E_p = \sum_{j=0}^{p-1} e_j$　とおく。この時 $\dot{w}_{p+1}$ を

$$\begin{cases} L_{p+1} w = g_{p+1} \ \text{in}\ [0,\infty)\times\Omega, & w = 0 \ \text{on}\ [0,\infty)\times\partial\Omega \\ w(0,x) = \partial_t w(0,x) = 0 & \text{in}\ \Omega \end{cases}$$

の解として定義する。特に

$$\mathcal{L} w_{p+1} + G(t,x,\Lambda w_{p+1})$$
$$\qquad = g + e_p + (1-S_p)E_p + (1-S_p)G(t,x,\Lambda w_0)$$

を満足する。

3章の評価を用いて帰納的に次が示せる。

Lemma 4.1. $0<\delta$ を十分小なる定数とする。この時 $\delta_m > 0$ が δ に応じて決まって もし data φ_0, φ_1, f が

$$\|\varphi_0\|_{\infty,2\hat{m}+1} + \|\varphi_1\|_{\infty,2\hat{m}} + |f|_{\infty,2\hat{m}-1,K} \le \delta_m$$

を満足し、さらに $\hat{m}$ 回の整合条件を満足すれば、次の三つの事柄が成立する。　$\theta_j = B^j$　とおく。

(i) $\partial_t^k \dot{w}_j(0, x)=0$, for $k=0,1,2,\dots$; $j=0,1,2\dots$

(ii) $|\Lambda \dot{w}_j|_{2,L,K} \le \delta\,\theta_j^{-\beta+L}$ for any integer $L\in[0,\hat{L}]$

(iii) $|\Lambda \dot{w}_j|_{\infty,L,K} \le \delta\,\theta_j^{-\beta+L}$ for any integer $L\in[0,\hat{L}]$.

where

$$\beta = \max([n/2]+2,\ m-1).$$

$$\hat{L} = 2\beta+1, \qquad \hat{m} = \hat{L}+3+[n/2]$$ □

以下おおまかに，上の補題を示す。まず w_0 については定理3.2から，

(4.3) $$|w_0| \le C_{\hat{m},K}\,|g|_{2,\hat{m}-1,K} \le C\,[\,\|\phi_0\|_{\infty,2\hat{m}} + \|\phi_1\|_{\infty,2\hat{m}-1} + |f|_{\infty,2\hat{m}-2,K}\,]$$

よって，δ_mを十分小にとっておけば，（δに応じて）

Lemma 4.2. もし $\|\phi_0\|_{\infty,2\hat{m}} + \|\phi_1\|_{\infty,2\hat{m}-1} + |f|_{\infty,2\hat{m}-2,K} \le \delta_m \Rightarrow$

(i) $\partial_t^k w_0(0, x) = 0$ $\quad k=0,1,2,\dots,\hat{m}-1$

(ii) $|\Lambda w_0|_{2,\hat{L},K} \le \delta$.

(iii) $|\Lambda w_0|_{\infty,\hat{L},K} \le \delta$. □

そこで，$\dot{w}_j$, $j=0,\dots,p$に対して既にLemma 4.1が示されているとする。この時次の補題が帰納法の仮定とsmoothing operatorの性質，補間不等式及び等比数列の計算により従う。

Lemma 4.3. $w_j = w_0 + \sum_{k=0}^{j-1} \dot{w}_k \quad j=1,\cdots,p+1$;

(i) $|S_j \Lambda w_j|_{\ell,L,K} \le C_L \delta \theta_j^{-\beta+L}$ if $-\beta+L \geqq \tau$

(ii) $|S_j \Lambda w_j|_{\ell,L,K} \le C\delta$ if $-\beta+L \le \tau$

(iii) $|(1-S_j)\Lambda w_j|_{\ell,L,K} \le C\delta\theta_j^{-\beta}$ if $0 \le L \le \tilde{\ell}$

(iv) $\partial_t^k w_j(0,x)=0, \quad k=0,1,\cdots,\hat{m}-1$

但し これ以下 τは十分小なる正定数. また ℓは 2又は∞を表わしているものとする。 ☒

Lemma 4.4. δ_mを十分小にとって

(A) $\|\phi_0\|_{\infty,2\hat{m}+1} + \|\phi_1\|_{\infty,2\hat{m}} + |f|_{\infty,2\hat{m}-1,K} \le \delta_m$

が成立しているとする。次の estimate が従う。$0 \le L \le \hat{m}$,

(i) $|\partial_\lambda G(t,x,S_j\Lambda w_j)|_{\infty,L,0} \le C\delta\theta_j^{-\beta+L}$ if $-\beta+L \geqq \tau$

$|\partial_\lambda G(t,x,S_j\Lambda w_j)|_{\infty,L,0} \le C\delta$ if $-\beta+L \le -\tau$

(ii) $|\partial_\lambda^2 G(t,x,S_j\Lambda w_j + \theta(1-S_j)\Lambda w_j)|_{\infty,L,0} \le C(1+\delta\theta_j^{-\beta+L})$

for $0 \le L \le \tilde{\ell}, -\beta+L \geqq \tau$

$|\partial_\lambda^2 G(t,x,S_j\Lambda w_j + \theta(1-S_j)\Lambda w_j)|_{\infty,L,0} \le C$ for $-\beta+L \le -\tau$.

(iii) $|\partial_\lambda^2 G(t,x,\Lambda w_j + \theta\Lambda\dot{w}_j)|_{\infty,L,0} \le C(1+\delta\theta_j^{-\beta+L})$

for $-\beta+L \geqq \tau, \ 0 \le L \le \tilde{\ell}$

$|\partial_\lambda^2 G(t,x,\Lambda w_j + \theta\Lambda\dot{w}_j)|_{\infty,L,0} \le C$ if $-\beta+L \le -\tau$. ☒

e_j' e_j'' の表現と Lemmas 4.3, 4.4 を用いて

Lemma 4.5. 上の (A) が十分小なる δ_mで成立しているとする。

$\Rightarrow$ (i) $|e_j|_{\ell,L,K} \le C\delta^2\theta_j^{-2\beta+L}$ for $0\le L\le \tilde{L}$

(ii) $\partial_t^k e_j(0,x)=0$, $k=0,1,2\cdots$

for $\ell=2$ or ∞, $j=0,1,2\cdots p$ □

最後に次のlemmaも同様にして今までのlemmasを用いて示せる。

Lemma 4.6. (A)が成立しているとする。

(ア) (i) $\partial_t^j G(t,x,\Lambda w_0)\big|_{t=0}=0$ $\quad j=0,1,2,\dots,\tilde{L}-1$.

(ii) $|G(t,x,\Lambda w_0)|_{\infty,L,K}\le C\delta^2$,

(iii) $|(1-S_p)G(t,x,\Lambda w_0)|_{\infty,L,K}\le C\delta^2\theta_p^{-2\beta+L}$ if $0\le L\le\tilde{L}$,

(iv) $|(1-S_{p+1})G(t,x,\Lambda w_0)|_{\infty,L,K}\le C\delta^2\theta_{p+1}^{-2\beta+L}$ if $0\le L\le\tilde{L}$

(v) $|(S_{p+1}-S_p)G(t,x,\Lambda w_0)|_{\infty,L,K}\le C_L\delta^2\theta_{p+1}^{-2\beta+L}$ if $L\ge 0$.

(イ) (i) $\partial_t^k E_p(0,x)=0$, $k=0,1,2,\cdots$

(ii) $|E_p|_{\infty,L,K}\le C\delta^2\theta_p^{-2\beta+L}$ if $-2\beta+L\ge\tau$, $L\le\tilde{L}$.

(iii) $|E_p|_{\infty,L,K}\le C\delta^2$ if $-2\beta+L\le-\tau$

(iv) $|(1-S_p)E_p|_{\infty,L,K}\le C\delta^2\theta_p^{-2\beta+L}$ if $0\le L\le\tilde{L}$

(v) $|(1-S_{p+1})E_p|_{\infty,L,K}\le C\delta^2\theta_{p+1}^{-2\beta+L}$ if $0\le L\le\tilde{L}$

(vi) $|(S_{p+1}-S_p)E_p|_{\infty,L,K}\le C_L\delta^2\theta_{p+1}^{-2\beta+L}$ if $L\ge 0$.

以上をあわせて特に

(ウ) (i) $\partial_t^j g_0(0,x)=\partial_t^j g_{p+1}(0,x)=0$, $j=0,1,2\cdots$

(ii) $|g_0|_{\infty,L,K}\le C_L\delta^2\theta_0^{-2\beta+L}$ for $L\ge 0$

(iii) $|g_{p+1}|_{\infty,L,K}\le C_L\delta^2\theta_{p+1}^{-2\beta+L}$ for $L\ge 0$.

ここで Lemma 4.1 を Lemma 4.6(ii) と Theorem 3.2 を用いて示す。 まず Lemma 4.4 (i) より δ を十分小にとれば、

$L_{p+1}\, w = \hat{\mathcal{L}} w + (\partial_\lambda G)(t, x, s_{p+1} \Lambda w_{p+1}) \Lambda w$ の係数は、

定理 3.2 の仮定をすべて満足する。こうして 定理 3.2 より

$0 \leq L \leq \hat{m} - 2$ に対して

$$|\Lambda \dot{w}_{p+1}|_{2,L,K} \leq C\, [\, |g_{p+1}|_{2,L+1,K} +$$

$$(1 + |(\partial_\lambda G(t, x, s_{p+1} \Lambda w_{p+1})|_{\infty, L+2, 0})\, |g_{p+1}|_{2,0,K}\,]$$

$$\leq \quad C_L\, \delta^2\, \theta_{p+1}^{-2\beta + L + 1}$$

特に、 $\beta > 1$ より $(\max_{0 \leq L \leq \hat{m}-2} C_L)\delta \leq 1$ に δ を十分小にとって

$$|\Lambda \dot{w}_{p+1}|_{2,L,K} \leq \delta\, \theta_{p+1}^{-\beta + L} \qquad \text{for } \forall L \in [0, \hat{L}]$$

が従う。また Sobolev's inequality より、 $0 \leq L \leq \hat{L} \Rightarrow$

$$|\Lambda \dot{w}_{p+1}|_{\infty,L,K} \leq C_S\, C_{L + [n/2] + 1}\, \delta^2\, \theta_{p+1}^{-2\beta + L + [n/2] + 2}$$

今 $\beta = \max([n/2] + 2, m - 1)$ であるから δ を十分小

にとって $C_S(\max_{0 \leq L \leq \hat{L}} C_{L + [\frac{n}{2}] + 1}) \cdot \delta \leq 1$ にとって

$$|\Lambda \dot{w}_{p+1}|_{\infty,L,K} \leq \delta\, \theta_{p+1}^{-\beta + L}$$

が示せた。以上で Lemma 4.1 の証明は完結した。

最後に定理の証明をする。Lemma 4.1 から容易に

$$\sum_{p=0}^{\infty} |\Lambda \dot{w}_p|_{\infty, m-2, K} + |\Lambda w_0|_{\infty, m-2, K} \le \frac{2B}{B-1} \cdot \delta$$

が従う。こうして $w \in C^m([0, \infty) \times \bar{\Omega})$ で

$$w = w_0 + \sum_{p=0}^{\infty} \dot{w}_p$$

$$|w|_{\infty, m, K} \le \left(\frac{2B}{B-1}\right) \cdot \delta$$

の存在はわかる。さらに

$$|\hat{\mathcal{L}} w + G(t, x, \Lambda w) - g|_{\infty, 0, 0}$$

$$\le |\hat{\mathcal{L}} w + G(t, x, \Lambda w) - (\hat{\mathcal{L}} w_{p+1} + G(t, x, \Lambda w_{p+1}))|_{\infty, 0, 0}$$

$$+ |e_p|_{\infty, 0, 0} + |(1 - S_p) E_p|_{\infty, 0, 0} + |(1 - S_p) G(t, x, \Lambda w_0)|_{\infty, 0, 0}$$

$$\le C \left[\sum_{j=p+2}^{\infty} |\Lambda \dot{w}_j|_{\infty, 0, 0} + \theta_{p+1}^{-\beta} \right]$$

が任意の p について成立する。こうして

$$\hat{\mathcal{L}} w + G(t, x, \Lambda w) = g \quad \text{in } (0, \infty) \times \Omega$$

を満足し w の作り方から明らかに $w = 0$ on $(0, \infty) \times \partial\Omega$

$w(0, x) = \partial_t w(0, x) = 0$ in Ω が従う。こうして w が所求の解である。

Q. E. D.

参考文献: Y. SHIBATA: On the global existence of classical solutions of mixed problem for some second order non-linear hyperbolic operators with dissipative term in the interior domain, to appear.