

ある種の双曲型 Cauchy 問題の解の特異性について

筑波大数学系 若林誠一郎 (Seiichiro Wakabayashi)

1. 序 双曲型方程式の解の特異性を記述する手段として、Hamilton flow (null bicharacteristic flow) が重要な役割を果たしてきだが、特性根が滑らかでないとき、Hamilton flow をそのまま定義することはできない。一般の双曲型方程式の解の特異性を記述するために、Hamilton flow を一般化・拡張する必要がある。ここでは、Hamilton flow の定義を拡張して、 C^∞ のカテゴリーで“ある種の仮定の下に(包含的の場合を含む)”。この一般化された Hamilton flow を用いて、解の波面集合が上から評価されることをしめす(定理1参)。また、Gevrey クラス(特性根の重複度に依存して異なる)において、係数が実解析的であると仮定して、Gevrey クラスでの解の特異性が一般化された Hamilton flow によって評価されることをしめす(定理2参)。講演における予想が正しいことをしめす。

2. "flow" の定義および結果 $P(x, \xi) \in C^\infty$ 係数を持つ
 $= (\xi_1, \dots, \xi_n)$ の m 次多項式とし。

$P(x, \xi) = \sum_{j=1}^m P_j(x, \xi)$, $P_j(x, \xi)$: j 次齊次多項式
 とかく。ここで $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi \stackrel{\text{dual}}{\leftrightarrow} x$ である。次の
 Cauchy 問題を考えよう：

$$(CP) \quad \begin{cases} P(x, D) u(x) = f(x) \\ \text{supp } u \subset \{x_i \geq 0\} \end{cases}$$

ここで、 $f \in \mathcal{D}'$, $\text{supp } f \subset \{x_i \geq 0\}$ である。また C^∞ 法と
 して Cauchy 問題

$$(CP)' \quad \begin{cases} P(x, D) u(x) \equiv f(x) \pmod{C^\infty} \\ \text{sing supp } u \subset \{x_i \geq 0\} \end{cases}$$

を考えよう。ここで $f \in \mathcal{D}'$, $\text{sing supp } f \subset \{x_i \geq 0\}$ である。まず、

(A-1) $P_m(x, \xi)$ は各 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $\beta = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ に属し、
 双曲型多項式である。すなわち、

$P_m(x, \xi - i\tau\beta) \neq 0$ for $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$
 を仮定する。

"flow" の定義 $z = (x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^n$ に属して、

$$P_m(z + s\delta z) = s^m (P_{mz}(\delta z) + o(1)) \quad \text{as } s \rightarrow 0$$

$$P_{mz}(\delta z) \neq 0 \quad \text{in } \delta z \in T_z(T^*\mathbb{R}^n)$$

によつて、 z における P_m の localization $P_{mz}(\delta z)$ を定義する（

Atiyah-Bott-Gårding [1] の定義の一般化)。

Lemma 1 $P_{m_Z}(\delta z)$ は δz の m 次齊次多項式で、 $(0, \vartheta) \in \mathbb{R}^{2n}$ に関する双曲型多項式である。

証明は、Ivrii-Petkov [10], Hörmander [6], Bronshtain [2] より明らかであろう。故に、 $z \in T^* \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\Gamma_z \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(P_{m_Z}, (0, \vartheta)) \subset T_z(T^* \mathbb{R}^n)$$

が定義できる。ここで、

$\Gamma(P_{m_Z}, (0, \vartheta)) = \{ \delta z ; P_{m_Z}(\delta z) \neq 0 \}$ の $(0, \vartheta)$ を含む連結成分である。

$$\Gamma_z^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{ \delta z \in T_z(T^* \mathbb{R}^n) ; \sigma(\delta z, \delta z') \geq 0 \text{ for } \delta z' \in T_z \}$$

とおく。ここで、 $\sigma(\delta z, \delta z') = \delta x \cdot \delta \xi' - \delta x' \cdot \delta \xi$, $\delta z = (\delta x, \delta \xi)$, $\delta z' = (\delta x', \delta \xi')$ である。

$K_z^\pm \stackrel{\text{def}}{=} \{ z(t) \in T^* \mathbb{R}^n ; \{ z(t) \} \text{ は Lipschitz 連続な曲線} \}$

$$\frac{d}{dt} z(t) \in \Gamma_{z(t)}^\sigma \text{ (a.e. } t), z(0) = z, \pm t \geq 0 \}$$

によると、“flow”を定義する。ここで、 $A_z \stackrel{\text{def}}{=} \{ \delta z ; P_{m_Z}(\delta z) = 0 \}$ とおいて、 K_z^\pm の定義における $\Gamma_{z(t)}^\sigma \in \Gamma_{z(t)}^\sigma \cap A_{z(t)}$ で“ちぎかえて”同じものを定義する。

K_z^\pm の性質 (i) $P_m(z) \neq 0$ ならば、 $K_z^\pm = \{ z \}$ である (\because

$P_{m_Z}(\delta z) \equiv P_m(z)$ たり $\Gamma_z^\sigma = \{ 0 \}$)。

(ii) $z \in T^* \mathbb{R}^n \setminus 0$ ならば、 $K_z^\pm \subset T^* \mathbb{R}^n \setminus 0$ であり。 $z = (x, 0)$ ならば、 $K_{(x, 0)}^\pm = K_x^\pm \times \{ 0 \}$ とかける ($\because P_{m(x, 0)}(\delta x, \delta \xi) = P_m(x, \delta \xi)$)

より、 $\Gamma_{(x,0)}^\sigma = \Gamma(P_m(x,\cdot), \mathcal{V})^*$ ^(x \in \mathcal{V})となる。ここで、

$$\Gamma^* = \{\delta x; \delta x \cdot \delta \xi \geq 0 \text{ for } \forall \delta \xi \in \Gamma\}$$

である。 K_x^\pm は解の台(support)を記述するものと考えられる(狭義双曲型作用素に対するDuistermaat [4] 参)。

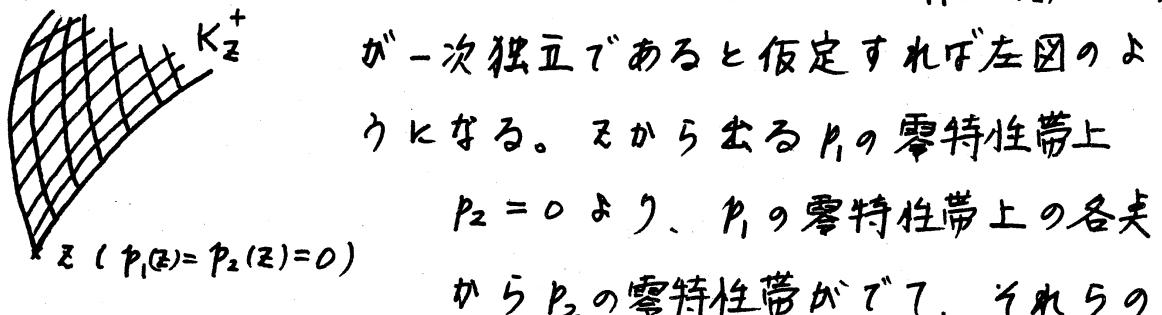
(iii) P_m が狭義双曲型のとき。

$K_z^\pm =$ ' z から x_1 が増加する方向に沿る P_m の零特性帯'

$$\text{if } z \in T^*R^n \setminus 0, P_m(z) = 0$$

(iv) P_m が重複度一定のとき。 P_m に対する K_z^\pm は P_m によりつくれる狭義双曲型多項式に対する K_z^\pm と一致する。

(v) $P_2(z) = p_1(z)p_2(z)$, $\{p_1, p_2\} = ap_1 + bp_2$ (p_1, p_2 は Σ に属する 1 次正齊次) のとき。包含的すなわち、 $H_{p_1}, H_{p_2}, (\Sigma \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j})$



が一次独立であると仮定すれば左図のようになる。すから出る p_1 の零特性帯上

$p_2 = 0$ より、 p_1 の零特性帯上の各点

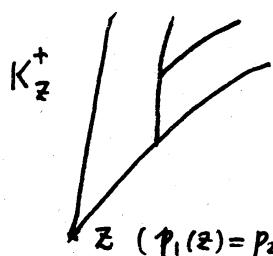
から p_2 の零特性帯がでて、それらの

broken bichar. の全体が K_z^+ である(2次元曲面に含まれる)。

一次独立性を仮定しないときは、上のようならずの射影である。すなはし、 p_1, p_2 の零特性帯が一束になる場合を許せば、上のよう

に記述される。

(vi) $P_2(z) = p_1(z)p_2(z)$, $\{p_1, p_2\} \neq 0$ のとき、 z が $p_1(z) = p_2(z) = 0$ を満たすならば、すからして p_1 の零特性帯と p_2 の零特性帯の



和集合がその近傍で K_z^+ と一致する。 P_1 の零特性帯上 $P_2(z)$ が零になる点があれど ($P_1(z) = P_2(z) = 0$) で、そこから得る P_2 の零特性帯を K_z^+ に含まれる。すなわち、 K_z^+ はそこから得る broken null bichar. の x_1 が増加する方向のもの全体である。

(vii) $P_m(x, \xi) \equiv P_m(\xi)$ (定係数) のとき。

$$K_{(x, \xi)}^\pm = (\{x\} \pm T(P_m \xi, \vartheta)^*) \times \{\xi\}$$

である。

C^∞ のカテゴリーで解の特異性を考えるとさには、次の仮定をおく：

(A-2) 任意の $(x^0, \xi^0) \in T^*R^n \setminus 0$ に対し、齊次正準変換 $\chi: \widetilde{\Pi} \rightarrow \Pi$ ($\widetilde{\Pi}: (0, \eta^0) \in T^*R^n \setminus 0$ の錐近傍, $\Pi: (y^0, \xi^0) \in T^*R^n \setminus 0$ の錐近傍) が存在して、

$$P_m \circ \chi(y, \eta) = e(y, \eta) p(\eta), \quad (y, \eta) \in \widetilde{\Pi}$$

$$e(y, \eta) \neq 0 \quad \text{in } \widetilde{\Pi}$$

となる。 $e = 1$, $p(\eta)$ は(齊次)多項式である。

仮定(A-2)より、 χ, χ^{-1} とそれぞれ対応する Fourier 積分作用素 F_1, F_2 が存在して (F_1, F_2 はそれぞれ $(0, \eta^0), (x^0, \xi^0)$ で elliptic)。

$$'F_2 P F_1 \text{ のシンボル}' = p(\eta) - g(y, \eta)$$

in a conic nbd of $(0, \eta^0)$ (以下 "at $(0, \eta^0)$ "とかく)

ここで、 $p(\eta)$ が"主シンボル"となるよう ζ_1, ζ_2 がとらわれている。

(A-3) (Levi 条件) 各 $(x^0, \xi^0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ に対して、今定義された $p(\eta), \varphi(y, \eta)$ は、

$|\varphi(y, \eta)| \leq C |p(\eta - i\tilde{\vartheta})| \quad \text{at } (0, \eta^0), \quad |\eta| \geq C_0$
をみたす。ここで、 $\tilde{\vartheta} = \frac{\partial \eta}{\partial \xi}(x^0, \xi^0) \vartheta (\neq 0 \text{ となる}), \chi^{-1}(x, \xi) = (y(x, \xi), \eta(x, \xi))$ である。

(A-3) は

$|\varphi(y, \eta)| \leq C \cdot \tilde{p}(\eta) \quad \text{at } (0, \eta^0)$
と同値である(仮定(A-1)の下)。ここで、 $\tilde{p}(\eta) = \left(\sum_{\alpha} \left| \frac{\partial p}{\partial \eta^\alpha}(\eta) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ である。

(A-4) 各 $z \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ に対して、 $K_z^+ \cap \{x_1 \geq 0\}$ はコンパクトである。

定理 1 (A-1)-(A-4) の仮定の下で、 u が "(CP)" の解ならば、

$WF(u) \subset \{z; z \in K_z^+, \text{ for some } z' \in WF(f)\} \equiv \mathcal{D} \circ WF(f)$ である。

注意 (A-2) は非常にきつい仮定であるが、包含的である場合および主部が定係数である場合にはみたされる。一般には (A-3) は X の選択方に依存する条件だが、Levi 条件の自然な拡張にはなっている(定理 3, 4 参)。

\ast によって (K) または $\{K\}$ を表わすこととする ($1 < K < \infty$)。 \mathcal{D}^* によってコンパクトな台をもつ Gevrey 族を、 \mathcal{D}'^* によって ultradistribution の空間を表わすこととする (Komatsu [11] 参)。 $WF_*(f)$ によって超局所的 f が \mathcal{D}^* (or \mathcal{E}^*) に属さない $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ の閉部分集合を表わすこととする (例えば、Wakabayashi [18] 参)

定理 2 $P(x, \xi)$ の係数が実解析的かつ、仮定(A-1)
および 仮定

(A-4)' 各 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $K_x^- \cap \{x_1 \geq 0\}$ が“コンパクト”である。

がみだされていふとする。 $P_m(x, \xi_1, \xi')$ = 0 の ξ_1 についての根の重複度が高々 r (≥ 2) であるとする。そのとき、 $1 < K < \frac{r}{r-1}$ に対して、 $f \in \mathcal{D}'^*$ ならば、(CP) の解 u に対して、

$$WF_*(u) \subset \mathcal{D} \circ WF_*(f)$$

が成立する。

注意 Gevrey クラス \mathcal{D} の適切性は、Irriti [8], Bronshtein [3], Trepreau [17] によつて認められている。定理 2 にちつては、 $P_m(x, \xi)$ の係数が実解析的であることを仮定すればよし、低階の係数について実解析的であると仮定する必要はない。また、特性根が滑らかならば、 $P_m(x, \xi)$ の係数も実解析的である必要はない。

系 定理2の仮定の下で、

$$\text{supp } u \subset \{x \in \mathbb{R}^n; x \in K_y^+ \text{ for some } y \in \text{supp } f\}$$

である。

注意 $P(x, \xi)$ の係数が実解析的である必要はないが、そのときは、定理2の証明と同じようにして証明する必要がある。

3. 定理1に対する注意および例 狹義双曲型作用素 (real principal type) に対する Hörmander [7] によると、定理1 が示された。重複度一定の場合には Chazarain、包含的な場合は (例1 参)、森本, Laacar, Nasmas (特に Nasmas) によって示された ([20], [14], [12], [16])。non-involutive に対する Ivrii, Hange, Melrose によって定理1は証明された ([9], [5], [13])。その他多くの研究があり、結果としては定理1をそれぞれの場合に証明したことになる、というようと思われる。

定理1の仮定 (A-3) は、簡単な場合には、齊次正準変換 X の選び方に依存しないことがわかる。

定理3 P_m の特性根の重複度が高々2であるとする。そのとき

$$(A-3) \text{ at } (x^0, \xi^0) \iff \left| \frac{P_{m-1}'(x, \xi)}{P_m(x, \xi - i\vartheta)} \right| \leq C \text{ at } (x^0, \xi^0)$$

ニニテ。

$$P'_{m-1}(x, \xi) = P_{m-1}(x, \xi) + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_j} P_m(x, \xi) \quad (\text{subprincipal symbol})$$

である。

定理4 $(x^0, \xi^0) \in T^* \mathbb{R}^n \setminus 0$ とし。

$$P_m(x, \xi) = e(x, \xi) \prod_{j=1}^s (\xi_j - \lambda_j(x, \xi'))^{\nu_j} \quad \text{at } (x^0, \xi^0)$$

なる形であるとする。ニニテ。 $\lambda_j(x, \xi') \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}))$,
 $e(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ かつ、 $e(x^0, \xi^0) \neq 0$ である。さら
 に。 $p_j = \xi_j - \lambda_j(x, \xi')$ とおいて、 $\{p_j, p_k\} = 0$ ($j, k = 1, \dots, s$)
 かつ H_{p_1}, \dots, H_{p_s} , $\sum \xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_k}$ が 1 次独立であると仮定する(すなわち、包含的であると仮定する)。それとし。

(A-3) at (x^0, ξ^0)

\iff

$$P(x, D) = e(x, D) p_1(x, D)^{\nu_1} \cdots p_s(x, D)^{\nu_s} \\ + \sum_{\mu < \nu} a_\mu(x, D) p_1(x, D)^{\mu_1} \cdots p_s(x, D)^{\mu_s} \quad \text{at } (x^0, \xi^0)$$

である。ニニテ。 $a_\mu(x, D) \in L^{m-r}$ かつ。 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s)$,
 $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_s)$, $\nu_1 + \cdots + \nu_s = r$ である。

定理5 $w = (w_1, \dots, w_l)$ としテ。 $(n+l)$ 变数の偏微分作用
 素 $\tilde{P}(x, w, D_x, D_w)$ が存在 レテ。

$$\tilde{P}(x, w, D_x, D_w) u(x) = P(x, D_x) u(x) \quad (u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$$

(i.e. $\tilde{P}(x, w, \xi, 0) = P(x, \xi)$ for x, w, ξ) かつ、 \tilde{P} が
 (A-1)-(A-4) を満たすならば、定理1が成立する。

例 1 (Nosmas [16])

$$P(x, D) = p_1(x, D)^{\nu_1} \cdots p_s(x, D)^{\nu_s}$$

$$+ \sum_{\mu < \nu} a_\mu(x, D) p_1(x, D)^{\mu_1} \cdots p_s(x, D)^{\mu_s}, \quad a_\mu(x, D) \in L^0$$

$$p_j(x, \xi) \sim \xi_1 - \lambda_j(x, \xi'), \quad \lambda_j(x, \xi') \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}))$$

$\lambda_j(x, \xi')$ は $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ で 1 次齊次

$$\{p_j, p_k\} = a_{jk} p_j + b_{jk} p_k$$

a_{jk}, b_{jk} は $\xi' \neq 0$ に対して滑らか

ならば、定理 1 が成立する。実際 P を適当につくして定理 5 が適用できる。

例 2 $n=3$.

$$P(x, \xi) = \xi_1^3 + 3\xi_1^2\xi_3 - 3x_2^2(\xi_2^2 + \xi_3^2)(\xi_1 + \xi_3) + a(x)\xi_1^2$$

$$+ x_2^2(b(x)\xi_2^2 + c(x)\xi_3^2) + d(x)\xi_1\xi_3 + x_2(e(x)\xi_1\xi_2 + f(x)\xi_2\xi_3)$$

に対して定理 5 が適用できる。 $\xi_1^0 = x_1^0 = \xi_3^0 = 0$ なる (x^0, ξ^0)

に対して、特性根は 3 重根となる(滑らかでない)。そのとき、

$$V_{\lambda>0} K_{(x^0, \lambda \xi^0)}^+ = \{ (x, \xi); 0 \leq x_3 - x_3^0 \leq 3(x_1 - x_1^0),$$

$$x_2 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = \lambda \xi_2^0, \xi_3 = 0 \text{ and } \lambda > 0 \}$$

である (conical refraction).

定理 1 の証明については、Wakabayashi [19] を参照されたい。

4. 定理 2 に対する注意

定理6 $P(x, \xi)$ の係数が実解析的かつ、(A-1), (A-4)'
をみたすとする。(CP)が C^∞ 適切ならば。

$$WF(u) \subset \mathcal{C}^\circ WF(f)$$

が成立する。

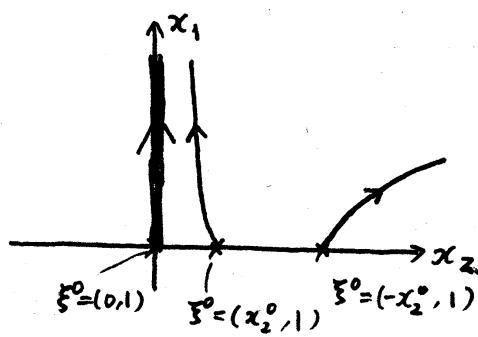
注意 特に、Nishitani [15] において 2 階 2 变数双曲型偏
微分作用素(係数は実解析的)に対する Cauchy 問題が C^∞ 適切であ
るための必要十分条件が与えられているので、定理 6 より。
実解析的係数をもつ 2 階 2 变数双曲型偏微分作用素に対する
 C^∞ 適切な Cauchy 問題の解の波面集合は、ほぼ完全に評価され
ることになる。

例 $m=2, n=2$ をする。

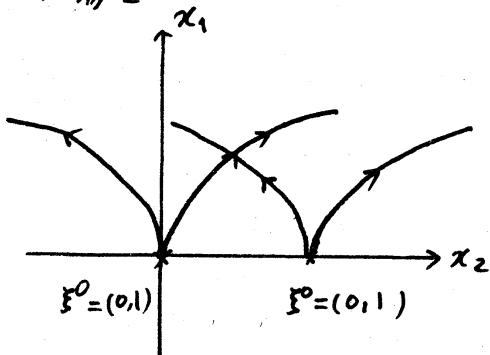
$$P_m(x, \xi) = \begin{cases} \xi_1^2 - x_2^2 \xi_2^2 & \text{--- (i)} \\ \xi_1^2 - x_1^2 \xi_2^2 & \text{--- (ii)} \\ \xi_1^2 - (x_1^2 + x_2^2) \xi_2^2 & \text{--- (iii)} \end{cases}$$

ヒレで、 $P(x, \xi)$ を Cauchy 問題が C^∞ 適切となるよう選ぶ(
Nishitani [15] の条件をみたすように低階をきめる)。そのとき。
 $x_1=0$ 上の束より得る解の波面集合を評価する $K_{(0, x_2^0, \xi^0)}^+$ で。
図のようになる(C^∞ 適切を仮定しているので、解の波面集合
が K_z^+ によって評価できる)。

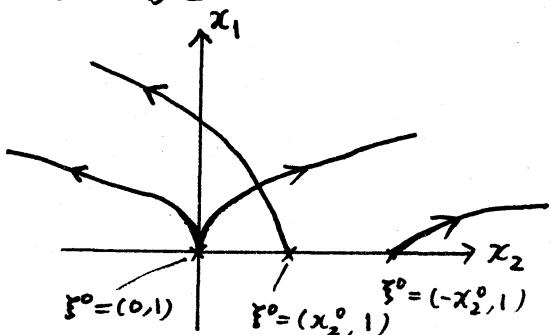
(i) の場合



(ii) の場合



(iii) の場合



(i) の場合には、定理 1(定理 5) を適用してよい。 (ii) の場合は non-involutive の場合で、Ivri, Hanges, Melrose で扱っている。

定理 2 の証明は、Bronshtein [3] の方法・評価と Wakabayashi [19] における方法を組み合わせることによってなされる。次の Lemma を証明するため、定理 2 において係数が実解析的であると仮定した。

Lemma 2 任意のコンパクト集合 $M \subset \Gamma_z$ に対して、 \exists の近傍 U が存在して

$$z' \in U \Rightarrow M \subset \Gamma_{z'}$$

が成立する (inner semi-continuity)。

この Lemma より、 K_z^\pm が近似的に構成されることが認められ、定理 2 を証明するためには、次をしめせばよいかとなる。

- $z^0 \in T^* R^n \setminus 0$, $M \subset \Gamma_{z^0}$: コンパクト, $U \gg U'$: z^0 の近傍で. $\forall z \in U$ に対して $M \subset \Gamma_z$ をみたすとする.
- * $\text{supp } f \subset U'$ かつ $WF_*(f) \cap (\{z^0\} - M^\sigma) = \emptyset$ なる $f \in \mathcal{D}'$ に対して. $P(x, D) u = f$, $\text{supp } u \subset \{x, x \geq c\}$ $z^0 \in WF_*(u)$ ならば. $z \in U' \cap (\{z^0\} - M^\sigma)$ が存在して、 $z \in WF_*(u)$ かつ $z \neq z^0$ をみたす.
- * は、逐次近似によつて解りを構成して、Bronshten の評価を用ひて、解りの表現における積分路を変更して証明される。

REFERENCES

- [1] M. F. Atiyah, R. Bott and Gårding, Acta Math. 124 (1970), 109-189.
- [2] M. D. Bronshten, Sib. Mat. Zh. 20 (1979), 493-501.
- [3] _____, Trudy Moskov. Mat. Obsc. 41 (1980), 83-99.
- [4] J. D. Duistermaat, Courant Institute Lecture Notes, New York 1974.
- [5] H. Hanges, Indiana Univ. Math. J. 28 (1979), 89-97.
- [6] L. Hörmander, J. Analyse Math. 32 (1977), 118-196.
- [7] _____, Enseignement Math. 17 (1971), 99-163.
- [8] V. Ja. Ivrii, Mat. Sb. 96 (1975), 390-413.
- [9] _____, Functional Anal. Appl. 10 (1976), 141-142.
- [10] V. Ja. Ivrii and V. M. Petkov, Uspehi Mat. Nauk. 29 (1974), 3-70.
- [11] H. Komatsu, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 20 (1973), 25-105.
- [12] R. Lascar, Springer Lecture Notes in Math. 856 (1981).
- [13] R. B. Melrose, Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 939-940.
- [14] Y. Morimoto, Comm. in P. D. E. 4 (1979), 609-643.
- [15] T. Nishitani, A necessary and sufficient condition for the hyperbolicity of second order equations with two independent variables, to appear.
- [16] J. C. Nosmas, Comm. in P. D. E. 5 (1980), 1-22.
- [17] J. M. Trepneau, Comm. in P. D. E. 4 (1979), 339-387.

- [18] S. Wakabayashi, Japanese J. Math. 6 (1980), 179-228.
- [19] _____, Singularities of solutions of the Cauchy problems for operators with nearly constant coefficient hyperbolic principal part, to appear in Comm. in P. D. E.
- [20] J. Chazarain, Ann. Inst. Fourier Grenoble 24 (1974), 173-202.