数理解析研究所講究録
530巻 1984年 61-70

2階方程式に対する Cauchy 問題の解の一意性

兵庫教育大学　渡辺金治

1。序　R^n の領域 Ω で定義された2階偏微分作用素 L：

$$L[u]=\sum_{j,k=1}^{n} a_{j,k}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+c(x)u,$$

および Ω 内の超曲面 S：

$$S=\{x\in\Omega\ ;\ \varphi(x)=\varphi(x^0)\},$$

に対する Cauchy 問題の解の一意性を考える。すなわち

$$(*)\quad \begin{cases} L[u]=0 & \text{in } \Omega \\ u(x)=0 & \text{in } \{x : \varphi(x)>\varphi(x^0)\} \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} u\equiv 0 \text{ near } x^0$$

ここで L の係数はすべて C^∞，$a_{j,k}$ は実数値函数で，S は x^0 において L に関して非特性的であることを常に

仮定する。また(*)の解 u も C^∞ であることを仮定する。

L が楕円型，強双曲型，または放物型の場合には，一意性はよく知られている。ここでは Lascar-Zuily [5]，Hounie-Melo [4]，渡辺 [7] の一意性定理，および Alinhac-Zuily [1]，中根 [6]，Hörmander [2]，[3] の反例を，紹介する。[4]，[5] は Pseudo convexity を拡張したものであり [7] は楕円型の場合を non negative symbol の場合に拡張したものである。また本集会の大鍛冶，中根両氏の講演の主題とも関係するので参照していただきたい。

2。いくつかの定理および反例． Lascar-Zuily [5] は Pseudo convexity w.r.t. bicharacteristics of L という考えを導入し次に述べる定理を得た。簡単のため次の L，φ を考える。 $x=(x_1,\cdots,x_n)=(t,y_1,\cdots,y_{n-2},s)$， $x^0=(0,\cdots,0)$

$$\begin{cases} L[u]=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\displaystyle\sum_{j,k=1}^{n-2}A_{j,k}\frac{\partial^2 u}{\partial y_j\partial y_k}+\sqrt{-1}\,A\frac{\partial u}{\partial s}+B_0\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n-2}B_j\frac{\partial u}{\partial y_j}+Cu, \\[2ex] \varphi=-t. \end{cases}$$

定理 1.（[5]）． A は実数値函数で，$A(0)\neq 0$ を仮定する。(P). 次の条件

$$\sum_{j,k=1}^{n-2}\left\{\frac{\partial A_{j.k}}{\partial t}(0)-A_{j.k}(0)\frac{\partial A}{\partial t}(0)A(0)^{-1}\right\}\xi_j\xi_k>0 \quad \text{for all } 0\neq\xi\in R^{n-2}$$

を満たすならば め1 の解は一意的である。

(ii) 次の条件 ： $\exists\ \xi^0\in R^{n-2}$,

$$\sum_{j.k=1}^{n-2}A_{j.k}(0)\xi_j^0\xi_k^0\neq 0,\ \sum_{j.k=1}^{n-2}\left\{\frac{\partial A_{j.k}}{\partial t}(0)-A_{j.k}(0)\frac{\partial A}{\partial t}(0)A(0)^{-1}\right\}\xi_j^0\xi_k^0<0$$

を満たすならば，適当な u，$f\in C^\infty$ が存在して

$$L[u]=fu,\qquad 0\in \operatorname{supp} u\subset\{t\geq 0\}.$$

例　Schrödinger 作用素

$$L=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\sum_{j=1}^{n-2}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial s},\quad \varphi=-(t-\varepsilon|y|^2).$$

このとき $\varepsilon>0$ なら一意性定理が，$\varepsilon<0$ なら非一意性定理が成り立つ。

Hounie－Melo [4] は Partial pseudo convexity という概念を導入し次に述べる定理を得た。簡単のため次の L φ を考える。

$$\begin{cases} L[u] = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \displaystyle\sum_{j,k=1}^{n-2} A_{j,k} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} + A \dfrac{\partial u}{\partial s} + B_0 \dfrac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n-2} B_j \dfrac{\partial u}{\partial y_j} + Cu, \\ \varphi = -t, \end{cases}$$

定理2.（[4]）. Aは実数値函数, $A(0) \neq 0$ と仮定する。このとき条件.

$$\sum_{j,k=1}^{n-2} \frac{\partial A_{j,k}}{\partial t}(0)\xi_j\xi_k > 0 \quad \text{when} \quad 0 \neq \xi \in R^{n-2}, \ \sum_{j,k=1}^{n-2} A_{j,k}(0)\xi_j\xi_k = 0$$

を満すならば (*) の解は一意的である。

例　放物型, $\sum A_{j,k}\xi_j\xi_k > 0$ for all $0 \neq \xi$, の場合の拡張にもなっている。また混合型の時, $n=4$, $\sum A_{j,k}\xi_j\xi_k = \xi_1^2 \pm t\xi_2^2$ の場合 $+$ なら一意性定理が, $-$ なら非一意性定理が定理1の(ii)の意味で成り立つ。

渡辺[7]は2変数, non negative symbol を持つLに対し次に述べる定理を得た。$n=2$, L を

$$L[u] = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu,$$

と書き

$$X_1 = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_2 = b\frac{\partial}{\partial x} + c\frac{\partial}{\partial y},$$

とおく。

定理3([7]). 次の条件(i),(ii)を満たすものとする。

(i) $$a(x,y)\xi_1^2 + 2b(x,y)\xi_1\xi_2 + c(x,y)\xi_2^2 \geqq 0 \qquad \text{for all } (x,y,\xi).$$

(ii) X_1 と X_2 とが生成する Lie algebra が各点で接空間を張る。

このとき open set からの一意接続性定理が成り立つ。とくに(＊)の解は一意的である。

例. $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

定理3と関係する反例. 初期面 $\varphi = -x$, L として

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A\frac{\partial^2}{\partial y^2} + B\frac{\partial}{\partial x} + C\frac{\partial}{\partial y} + D$$

を考える。

① $A \geqq 0$, および A が (x,y) の函数として finite order の zero のみを持つ時は(＊)の解は一意的であるが, infinite order の zero を持つ時

には反例がある(Hörmander [2], p 225)。

② $A\equiv 0$, かつ Real part of C が (x,y) の函数として finite order の zero のみを持つ時は (*) の解は一意的,しかし Hörmander [3] によって,$\exists\alpha$ flat at $x=0$ $\exists u\in C^\infty$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\sqrt{-1}+\alpha)\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad (0,0)\in\operatorname{supp}u\subset\{x\geq 0\}.$$

③ $A\equiv 0$, Real part of $C\equiv 0$ とする。Imaginary part of C が (x,y) の函数として finite order の zero のみを持つ時 (*) の解は一意的である。

④ $A\geq 0$ でない時,i.e. 複素数値函数の場合には中根[6] の反例がある。たとえば

$$L=(\partial/\partial x-\sqrt{-1}\,x^{l}\,\partial/\partial y)^2+x^{k}(\sqrt{-1}\,\partial/\partial x)^2-x^{m}(\sqrt{-1}\,\partial/\partial x).$$

$$\left(k\leq 2l,\ m<\frac{k}{2}-1\quad\text{or}\quad k>2l,\ m<2l-k-1\right)$$

次の反例は中根氏の講演においてより一般の形でくわしく述べられた。

$$L=(\partial/\partial x+\sqrt{-1}\,x^{l}\,\partial/\partial y)^2+\sqrt{-1}\,x^{k}\,b\,\partial/\partial y$$

$$(l-1>k,\ b(0,0)\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)).$$

この例については,$l-1=k$ なる時には一意性

定理が成り立つことが本集会の大鍛治氏の講演によって明らかにされた。また $l-1>k$, $b(x,y)\geq 0$ なる場合にも一意性が得られることがわかっている。

⑤ $n\geq 3$ の場合. Alinhac-Zuily [1] によって. いくつかの反例が次の形で述べられている。

$$L=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\sum_{j=1}^{n-1}\left\{p_j(t,x)\frac{\partial}{\partial x_j}+\sqrt{-1}\,q_j(t,x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right\}.$$

Vector fields $p=\sum p_j(t,x)\partial/\partial x_j$, $q=\sum q_j\partial/\partial x_j$ が"本質的に"一変数のそれでない時. 定理1の (ii) の意味で非一意性定理が成り立つ。たとえば,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sqrt{-1}\,t^m\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}-t\frac{\partial}{\partial x_2}\right\},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\sqrt{-1}\,\alpha\frac{\partial}{\partial x_1}+\beta\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}+t\frac{\partial}{\partial x_2}\right\},\quad \alpha\cdot\beta\neq 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\sqrt{-1}\,t^l\frac{\partial}{\partial x_1}+t^m\frac{\partial}{\partial x_2},\quad 2(m+1)<l.$$

3. 問題. 定理1〜3に関して次に述べる作用素に対して一意性又は非一意性定理が得られれば興味深

いと思う。

① $L[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sum A_{j\cdot k}\frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k}+g\frac{\partial u}{\partial s}+\cdots$

ここで $g(0)\neq 0$, g 複素数値函数.

② $L[u]=\sum_{j\cdot k=1}^{n} a_{j\cdot k}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}+\cdots$

ここで $\sum a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geqq 0$. かつ

$X_j=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\,\partial/\partial x_k$, $j=1,\cdots,n$ が生成する Lie algebra

が接　空間を張る。

Reference

[1] Alinhac - Zuily , Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles .
Comm. in P. D. Eqs. 6 (7) , 799-828 (1981) .

[2] Hörmander , Linear partial differential operators
Springer-Verlag , Berlin . 1963 .

[3] Hörmander , Non uniqueness for the Cauchy problem .
Lecture Notes in Math. Springer Verlag , N°. 459 , (1975) .

[4] Hounie - Melo , Uniqueness in the Cauchy problem for a class of differential operators with double characteristics , preprint .

[5] . Lascar - Zuily , Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels à caracteristiques doubles , Duke Math. J. '82.

[6] Nakane , Uniqueness and non uniqueness in the Cauchy problem for a class of operators of degenerate type . Proc. Japan Acad. 58 (1982) 147~149.

[7] . Watanabe , Sur l'unicité du prolongement des solutions

des équations elliptiques dégénérées.
Tôhoku Math. J. 34. p239~249. (1982).