数理解析研究所講究録
530 巻 1984 年 24-35

ある種の偏微分作用素の Cauchy 問題の一意性

京大理　大鍛治隆司（ Takashi Ōkaji ）

§1 序

我々は、次の形の作用素 P を考える。

$$t^K P(x,t,D_x,D_t) = \tilde{P}(x,t,t^\nu D_x, tD_t)$$
$$= (tD_t)^m + \sum_{\substack{|\alpha|+j\le m\\ j\le m-1}} a_{\alpha,j}(x,t)(t^\nu D_x)^\alpha (tD_t)^j,$$

ここで，$0\le K\le m$，整数，ν：正の有理数，$D_t=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$，$D_x=(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n})$，$a_{\alpha,j}(x,t)\in C^\infty(\overline{\Omega})$．（$\Omega$ は原点のある近傍）.

この作用素 P に対する Cauchy 問題の解の一意性を調べるのが目的である；

問題

$$(1)\quad \begin{cases} Pu=0 & \text{in } \Omega \\ \partial_t^j u = 0, & j=0,1,2,\cdots,\infty, \text{ on } \Omega\cap\{t=0\}. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $u\equiv 0$ in $^\exists\omega$：原点のある近傍　？

この問題について，最近，G. Roberts ([6]), H. Uryu ([7]), S. Nakane ([5]) 氏等によって，ある結果が得られた。ここでは，彼らの結果の低階に関する条件を取り除くことを考える。

正確に言えば，次のようになる。

$$\hat{P}_m(x,t,\xi,\tau) = \tau^m + \sum_{\substack{|\alpha|+j\leqq m \\ j\leqq m-1}} a_{\alpha j}(x,t)\xi^\alpha\tau^j = 0$$ の τ に関する根を $\lambda_j(x,t,\xi)$ $(j=1,2,\cdots,m)$ とする時

<u>仮定</u>　1) real 根 λ_j は simple，non-real 根 λ_j は高々 double

2) non-real 根 λ_j は $|\mathrm{Im}\,\lambda_j| \geqq \varepsilon > 0$ on $\bar{\Omega}\times S^{n-1}$ をみたす．

3) distinct roots λ_j, λ_k は $|\lambda_j - \lambda_k| \geqq \varepsilon > 0$ on $\bar{\Omega}\times S^{n-1}$ をみたす．

<u>定理</u>　上の仮定の下で，$u\in C^\infty(\Omega)$ が (1) の解ならば，ある原点の近傍 ω があって，そこで $u\equiv 0$ となる．

<u>注意1</u> 瓜生氏は根 λ_j がすべて simple という条件の下に，又 Roberts 氏 $(0<\nu\leqq 1)$ 及び中根氏 $(\nu\in\mathbb{Z}, k=m)$ は，上の仮定とともに，低階にある条件をつけて（もちろん double root が存在する時）上と同じ結果を示された。

<u>注意2</u>　今考えている作用素 P において，$\nu=1$，$k=m$ とすれば，この作用素は，ふつうの非特性作用素を特別の場合として含んでいる．これについては，Calderón 氏が根が simple の場合を解決し ([3])，Mizohata 氏が non-real 根は高々 double まで許されることを示された．([4])．この方面のより詳しい文献については，Zuily 氏の lecture note 等を参照されたい。

上の定理は，退化型作用素と非特性作用素の結果が，完全に対応していることを示唆している。この種の事実は，双曲型作用素の well-posedness の問題について，田原氏が初めて指摘

された。([9]).

§2. 証明の概略. その1. (作用素の分解)

証明の大筋は. 以前のものと本質的には変わりません. (重み t^{ε}をもつ Carleman estimate による。) ただ. 今の場合, 低階を無視して推論を行なうわけにはいかないので, まず作用素を低階もこめて. 高々2階の作用素の積に分解します. そしてこの分解された各々の作用素を micro-local に解析します。

以後、簡単の為に. $K=m$, $\nu\in\mathbb{N}$ の場合に話を限定します. そうすれば. Pは次のように書けます。

$$\left\{\begin{array}{l} P = D_t^m + \sum t^{l_{\alpha j}} a_{\alpha j}(x,t) D_x^{\alpha} D_t^{j} \\ l_{\alpha j} = (l+1)|\alpha| + j - m, \quad a_{\alpha j}(x,t) \in C^{\infty}(\bar{\Omega}) \end{array}\right.$$

前の記号では, $\nu = l+1$ に対応する。又 $l_{\alpha j}$ は負となってもよい。

Carleman の方法を Pに適用する為に. (1)の解を xについて compactly supported な関数に変換しなければなりません。今の場合. t の degenerate factor が重要であることを考慮して. Holmgren 変換ではなく, 次の singular な変換を行ないます。

$$\left\{\begin{array}{l} x = X \\ t = (\delta - |x|^2)^2 T \end{array}\right.$$

(この種の変換は. Baouendi & Zachmanoglou ([2]) において初めて使用された。) そうすれば, "$u(x,t)\in C^{\infty}$ で $t=0$ で flat $\Rightarrow \tilde{u}(X,T)\in C^{\infty}$, $T=0$, $|X|^2=\delta$ で

flat"となり，適当に修正すれば．$\hat{u}(X,T)\in C_0^\infty$, $P^\#\hat{u}=0$, $\partial_T^j\hat{u}|_{T=0}=0$ ($j=1,2,\cdots,\infty$) が得られます．ここで $P^\#$ は上の変換で P から得られる作用素です。簡単の為に (X,T) を再び (x,t) で書けば，

$$P^\# = D_t^m + \sum_{\substack{|\alpha|+j\le m\\ j\le m-1}} t^{\ell\alpha j} f(x)^{|\alpha|} a_{\alpha j}^\#(x,t) D_x^\alpha D_t^j$$

$$f(x,t) = (\delta - |x|^2)^{2(\ell+1)}, \quad a_{\alpha j}^\# \in C^\infty.$$

となります。

Pに対する仮定より，$P^\#$ に対して次の事が成り立ちます。

$$\begin{cases} P_m^\#(x,t,\xi,\tau) = \prod_{j=1}^{r} (\tau - t^\ell f(x)\lambda_j^\#(x,t,\xi)) \prod_{j=r+1}^{r+s} (\tau - t^\ell f(x)\lambda_j^\#(x,t,\xi))^2 \\ |\lambda_i^\# - \lambda_j^\#| \geqslant \varepsilon \qquad \text{if } i\neq j \\ |\mathrm{Im}\,\lambda_j^\#| \geqslant \varepsilon \qquad j=r+1,\cdots,r+s. \\ \mathrm{Im}\,\lambda_j^\# \equiv 0 \text{ or } |\mathrm{Im}\,\lambda_j| \geqslant \varepsilon,\ j=1,2,\cdots,r, \qquad (x,t,\xi)\in\Omega^\#\times S^{n-1}. \end{cases}$$

又，$\lambda_j^\#$ を適当に修正することによって，$\lambda_j^\# \in S_{1,0}^1(\mathbb{R}^n)$ で上の条件を $(x,t,\xi)\in\mathbb{R}^n\times[0,T_0]\times S^{n-1}$ でみたしているとしてもよいことがわかります。

問題は $P^\#$ について

(*) $\quad \|t^{-\gamma}u\|^2 \leqslant C\|t^{-\gamma}P^\# u\|^2, \quad u\in C_0^\infty(\omega\times[0,T])$

という不等式が成り立つか？ということに帰着されます。($t^{-\gamma}$ という重みは．Alinhac & Baouendi [1] において初めて使われた。)

そこで，作用素 $P^\#$ を分解して(*)を調べる事になる。その為に，少し記号を導入しておく。

$L^j \ni A \Leftrightarrow \sigma(A)\in S_{1,0}^j(\mathbb{R}^n)$ ($\sigma(A)$ は A のシンボル)

$T^j \ni B \Leftrightarrow B = \sum_{d+k\le j} t^{(\ell+1)d+k-j} f(x)^d A_{d,k}(x,t,D_x) D_t^k, \quad A_{d,k}\in L^d.$

$\lambda_j(x,t,D_x) \in L^1$ を $\lambda_j^\#(x,t,\xi)$ を symbol にもつ作用素.

$\partial_j = D_t - t^\ell f(x)\lambda_j(x,t,D_x) \in T^1$ とする. この時次の命題が成り立つ。

<u>命題1</u> 任意の置換 π について.

$$P^\# = e_{\pi(1)} \cdots e_{\pi(r+s)} + t^{-2} r_{m-2}$$

$$e_j = \begin{cases} \partial_j + t^{-1} a_j(x,t,D_x) & j=1,\cdots,r \\ \partial_j^2 + t^{-1}(a_j(x,t,D_x)D_t + t^\ell f(x) b_j(x,t,D_x)) & j=r+1,\cdots,r+s. \end{cases}$$

$$a_j \in L^0,\ b_j \in L^1,\ r_{m-2} \in T^{m-2}.$$

<u>命題2</u> $r_{m-2} \in T^{m-2}$ について.

$$r_{m-2} = \sum_{i,j=1}^{r} g_{i,j}(x,t,D_x) \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{r+s} e_k + \sum_{j=r+1}^{r+s} g_j(x,t,D_x) \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{r+s} e_k + t^{-1} r_{m-3}.$$

$$g_{i,j},\ g_j \in L^0,\ r_{m-3} \in T^{m-3}$$

この2つの命題は, 次の3つの補題をくり返し使うことによって示されます。

<u>補題1</u> ([5], [6], [7]) $i \neq j$ とする時, $r_1 \in T^1$ は次のように書ける。

$$r_1 = Q_1\partial_i + Q_2\partial_j + t^{-1}Q_3 \quad , \quad Q_j \in L^0,\ (j=1,2,3)$$

<u>補題2</u> $i \neq j$ とする時. $r_2 \in T^2$ は

$$r_2 = Q_1\partial_i^2 + Q_2\partial_j + t^{-1}Q_3,\quad Q_1 \in L^0,\ Q_2, Q_3 \in T^1.$$

と書ける。

<u>補題3</u> $i \neq j$ の時. $r_3 \in T^3$ について.

$$r_3 = Q_1\partial_i^2 + Q_2\partial_j^2 + t^{-1}Q_3,\quad Q_1, Q_2 \in T^1,\ Q_3 \in T^2$$ となる.

これらの補題は $|\sigma(\lambda_i-\lambda_j)|\geqq\varepsilon>0$ on $\mathbb{R}^n\times[0,T]\times S^{n-1}$ を用いて symbol 計算によって示される。

命題1,2を用いれば、不等式(*)は、次の2つの不等式より得られることがわかる。 $v\in C_0^\infty(\Omega'\times[0,T])$ に対し

(2) $\quad \gamma\|t^{-\gamma-1}v\|^2\leqq C\|t^{-\gamma}\{\partial_j+t^{\ell}a(x,t,D_x)\}v\|^2 \quad (\gamma>{}^\exists\gamma_0)$

$\qquad a\in L^0, \quad j=1,\cdots,r+s.$

(3) $\quad \gamma^2\|t^{-\gamma-2}v\|^2+\|t^{-\gamma-1}D_tv\|^2+\|t^{-\gamma+\ell-1}f(x)D_xv\|^2$

$\qquad \leqq C\|t^{-\gamma}\{\partial_j^2+t^{\ell}r(x,t,D_x,D_t)\}v\|^2. \quad (\gamma>\gamma_0)$

$\qquad r\in T^1, \quad j=r+1,\cdots,r+s.$

(2)の不等式は、すでに[5],[6],[7]等において示されている。
(3)の不等式については、$\sigma(r)(x,t,\xi,\lambda_j)$ が十分小さい時は、本質的には、[5],[7]において示されている。

§3. 証明の概略.(不等式(3)の証明)

(3)の証明の概略について述べる。まず $r(x,t,D_x,D_t)$ を次のように表わします.

$$r(x,t,D_x,D_t)=a(x,t,D_x)\partial_j+t^{\ell}f(x)b(x,t,D_x)$$

$$a\in L^0,\ b\in L^1.$$

この時、次の3条件のうち少なくとも1つがみたされるように conic n.b.d. の有限和に分解します。;

$\omega\times[0,T_1]\times\mathbb{R}^n\backslash 0\}=\bigcup_{k=1}^{N}\omega\times[0,T_1]\times W_k$, ω; 十分小さな原点の近傍, T_1: 十分小さな正数.

$$\begin{cases} 1) & \operatorname{Im}\lambda_j^{\#}(x,t,\xi) < -\varepsilon, \ |b(x,t,\xi)| \leqslant 2^{-12}\varepsilon^2. \\ 2) & \operatorname{Im}\lambda_j^{\#}(x,t,\xi) < -\varepsilon, \ |b(x,t,\xi)| > 2^{-11}\varepsilon^2. \\ 3) & \operatorname{Im}\lambda_j^{\#}(x,t,\xi) > \varepsilon \end{cases}$$

そうすると、上の分解に付随した単位分解を用いることによって、不等式(3)は、次の命題が成り立つことに帰着されます

<u>命題3</u>　$\gamma_k \in L^0$, $\operatorname{supp}\sigma(\gamma_k) \subset \omega\times[0,T_1]\times W_k$ とする。ある正の定数 C, T_2, γ_0 があって、$0<T\leqslant T_2$, $\gamma>\gamma_0$, $v\in C_0^\infty([0,T]:\mathcal{S}_x(\mathbb{R}^n))$ に対して、

$$\gamma^2\|t^{-\gamma-2}\gamma_k v\|^2 + \|t^{-\gamma-1}D_t\gamma_k v\|^2 + \|t^{-\gamma+\ell-1}f(x)D_x\gamma_k v\|^2$$

$$\leqslant C\|t^{-\gamma}L\gamma_k v\|^2 + C(T+\tfrac{1}{\gamma})E_\gamma(v).$$

$E_\gamma(v) =$ (3)の左辺。

この命題は次の2つの補題を基礎とします。

<u>補題4</u>　$Q = \partial_j + t^{\frac{\ell-1}{2}}f(x)^{\frac{1}{2}}a_{\frac{1}{2}}(x,t,D_x)$, $a_{\frac{1}{2}}\in L^{\frac{1}{2}}$. 今、$\operatorname{Im}\lambda_j^{\#} < -\varepsilon$ on $\omega\times[0,T_1]\times W_k$ とする。この時、$\frac{1}{T}$, γ を十分大にすれば、$v\in C_0^\infty([0,T]:\mathcal{S}_x(\mathbb{R}^n))$ に対して、

$$\frac{\ell+1}{6}\left\{\gamma\|t^{-\gamma-1}\gamma_k v\|^2 + \varepsilon\|t^{-\gamma+\frac{\ell-1}{2}}f^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}\gamma_k v\|^2\right\} + C\gamma^{-1}\|t^{-\gamma}D_t\gamma_k v\|^2$$

$$\leqslant \|t^{-\gamma}Q\gamma_k v\|^2 + CT\|t^{-\gamma-1}\Lambda^{-1}v\|^2$$ が成り立つ。

$\Lambda\in L^1$, $\sigma(\Lambda)=\sqrt{1+|\xi|^2}$.

<u>補題5</u>　$\operatorname{Im}\lambda_j^{\#} > \varepsilon$ on $\omega\times[0,T_1]\times W_k$ とする。$\frac{1}{T}$, γ を十分大にすれば、$v\in C_0^\infty([0,T]:\mathcal{S}_x(\mathbb{R}^n))$ に対して、

$$M\gamma\|t^{-\gamma-1}\gamma_k v\|^2 + M\|t^{-\gamma+\frac{\ell-1}{2}}f^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}\gamma_k v\|^2 + C\gamma^{-1}\|t^{-\gamma}D_t\gamma_k v\|^2$$

$$\leqslant \|t^{-\gamma}\partial_j \psi_k v\|^2 + CT\|t^{-\gamma-1}\Lambda^{-1}v\|^2$$ が成りたつ。

この２つの補題の証明は後に回わして，先に，命題３の証明について述べましょう。

まず最初に，2)の場合は，仮定より，Lを更に次のように分解することが出来ます，

$$L\psi_k = Q_1(x,t,D_x,D_t)Q_2(x,t,D_x,D_t)\psi_k + t^{-1}a(x,t,D_x)Q_2(x,t,D_x,D_t)\psi_k$$
$$+ t^{\frac{\sigma}{2}-1}f^{\frac{1}{2}}(x)\, d_{\frac{1}{2}}(x,t,D_x)\psi_k + \{d_{0,1}(x,t,D_x) + t^{\frac{\sigma}{2}-1}d_{0,2}(x,t,D_x)\}$$
$$\times\psi_k + \{d_{\infty,1}(x,t,D_x) + t^{\frac{\sigma}{2}-1}d_{\infty,2}(x,t,D_x)\}.$$

ここで，$Q_i = D_t - \lambda_j(x,t,D_x) + (-1)^i t^{\frac{\sigma}{2}} f^{\frac{1}{2}}(x)\, q_{\frac{1}{2}}(x,t,D_x)$，　$(i=1,2)$

$q_{\frac{1}{2}},\ d_{\frac{1}{2}} \in L^{\frac{1}{2}}$，　$d_{0,i}\in L^0$，$d_{\infty,i}\in L^{-\infty}$．$(i=1,2)$

従って，この時，補題４を Q_1, Q_2 に対して適用すれば命題３が成立することがわかります，実際，

$$\|t^{-\gamma}L\psi_k v\|^2 \geqslant \frac{1}{2}\|t^{-\gamma}Q_1Q_2\psi_k v\|^2 - C\{\|t^{-\gamma-1}aQ_2\psi_k v\|^2$$
$$+\|t^{-\gamma+\frac{\sigma}{2}-1}f^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}\psi_k v\|^2 + T\cdot\|t^{-\gamma-2}\psi_k v\|^2$$
$$+T\cdot\|t^{-\gamma-2}\Lambda^{-1}v\|^2\}$$
$$\geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\{\gamma^2\|t^{-\gamma-2}\psi_k v\|^2 + \gamma\varepsilon\|t^{-\gamma+\frac{\sigma}{2}-1}f^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}\psi_k v\|^2$$
$$+C\|t^{-\gamma-1}D_t\psi_k v\|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\|t^{-\gamma+\sigma-1}f\Lambda\psi_k v\|^2\}$$
$$-C\gamma^{-1}\|t^{-\gamma}Q_1Q_2\psi_k v\|^2 - C(T+\gamma^{-1})E_\gamma(v).$$

一方，2)の場合は，補題４を $a_{\frac{1}{2}}\equiv 0$ として，∂_j に適用すれば，

$$\|t^{-\gamma}\partial_j^2\psi_k v\|^2 \geqslant \frac{1}{144}\{\gamma^2\|t^{-\gamma-2}\psi_k v\|^2 + \gamma\varepsilon\|t^{-\gamma+\frac{\sigma}{2}-1}f^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}\psi_k v\|^2$$
$$+C\|t^{-\gamma-1}D_t\psi_k v\|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\|t^{-\gamma+\sigma-1}f\Lambda\psi_k v\|^2\}$$

$$-C(T+\gamma^{-1})E_\gamma(v).$$

が得られ、

$$\begin{cases} \|t^{-\gamma+\ell-1} f b \psi_k v\|^2 \leq 2^{-12}\varepsilon^2 \|t^{-\gamma+\ell-1}\Lambda\psi_k v\|^2 + CT\|t^{-\gamma-2} v\|^2 \\ \|t^{-\gamma-1} a\, \partial_j \psi_k v\|^2 \leq C\gamma^{-1}\|t^{-\gamma}\partial_j^2 \psi_k v\|^2 \end{cases}$$

と組みあわせますと、命題3が示されます。

最後に、3)の場合は、補題5を∂_jに適用しますと、Mとして、$\frac{M^2}{16} > \max_{|\xi|=1}|b(x,t,\xi)|$ととっておけば、2)の場合と同様に示すことが出来ます。

次に補題4.5の証明の概略を述べましょう。

(補題4の証明)

$v = t^\gamma w$, $Q_\gamma = t^{-\gamma} Q t^\gamma$ とおくと、

$$\begin{cases} Q_\gamma = X + Y. \\ X = D_t - t^\ell f(x)\lambda_1(x,t,D_x) + t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}}(x)\, a_1(x,t,D_x) \\ Y = \frac{1}{i}\gamma t^{-1} - it^\ell f(x)\lambda_2(x,t,D_x) + it^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}}(x)\, a_2(x,t,D_x) \end{cases}$$

と書ける。ここで、$\lambda_1, \lambda_2 \in L^1$ は $\mathrm{Re}\,\lambda_j^{\#}(x,t,\xi)$, $\mathrm{Im}\,\lambda_j^{\#}(x,t,\xi)$ を、$a_1, a_2 \in L^{\frac{1}{2}}$ は、$\mathrm{Re}\,a_{\frac{1}{2}}(x,t,\xi)$, $\mathrm{Im}\,a_{\frac{1}{2}}(x,t,\xi)$ をそれぞれ、シンボルとする作用素である。すると、

$$(4)\quad \|t^\gamma Q\psi_k v\|_\rho^2 = \|Q_\gamma \psi_k w\|_\rho^2 = \|X\psi_k w\|_\rho^2 + \|Y\psi_k w\|_\rho^2 + 2\mathrm{Re}(Xw, Yw)_\rho$$

$$(u,v)_\rho = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n_x} t^{-2\rho} u\bar{v}\, dx\, dt, \quad (\rho\text{は後で決める数})$$

となる。そこで、$2\mathrm{Re}(Xw, Yw)_\rho$ を下から評価したい。ψ_k を ψ と書くことにすれば、部分積分によって、

(3.1) $$2\mathrm{Re}\,(D_t\chi w, \tfrac{1}{i}\gamma t^{-1}\chi w)_\rho = (1+2\rho)\gamma \| t^{-1}\chi w\|_\rho^2$$

(3.2) $$\begin{aligned}2\mathrm{Re}\,(D_t\chi w, -it^{\ell} f\lambda_2\chi w)_\rho = (\ell-2\rho)&(\chi w, -t^{\ell-1} f\lambda_2\chi w)_\rho \\ &+ (\chi w, -t^{\ell} f\lambda_{2,t}\chi w)_\rho \\ &+ (\chi w, -it^{\ell}(\lambda_2^* f - f\lambda_2)D_t\chi w)_\rho\end{aligned}$$

ここで．$\lambda_2^* \in L^1$ は λ_2 の L^2-adjoint．$\lambda_{2,t} \in L^1$ は $\frac{\partial}{\partial t}\lambda_2(x,t,\xi)$ をシンボルとする作用素である．同様に．

(3.3) $$\begin{aligned}2\mathrm{Re}\,(D_t\chi w, it^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac12} a_2\chi w)_\rho = (\tfrac{\ell-1}{2} - 2\rho)&(\chi w, t^{\frac{\ell-1}{2}-1} f^{\frac12} a_2\chi w)_\rho \\ &+ (\chi w, t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac12} a_{2,t}\chi w)_\rho \\ &+ (\chi w, it^{\frac{\ell-1}{2}}(a_2^* f^{\frac12} - f^{\frac12} a_2)D_t\chi w)_\rho\end{aligned}$$

(3.4) $$\left\{\begin{aligned}&2\mathrm{Re}\,(-t^{\ell} f\lambda_1\chi w, -it^{\ell} f\lambda_2\chi w)_\rho = (t^{2\ell}(\lambda_2^* f^2\lambda_1 - \lambda_1^* f^2\lambda_2)\chi w, i\chi w)_\rho \\ &2\mathrm{Re}\,(-t^{\ell} f\lambda_1\chi w, it^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac12} a_2\chi w)_\rho = (t^{\ell+\frac{\ell-1}{2}}(a_2^* f^{\frac32}\lambda_1 - \lambda_1^* f^{\frac32} a_2)\chi w, i\chi w)_\rho \\ &2\mathrm{Re}\,((-t^{\ell} f\lambda_1 + t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac12} a_1)\chi w, \tfrac{1}{i}\gamma t^{-1}\chi w)_\rho \\ &\qquad = \gamma(\{t^{\ell-1}(f\lambda_1 - \lambda_1^* f) + t^{\frac{\ell-1}{2}-1}(f^{\frac12} a_1 - a_1^* f^{\frac12})\}\chi w, i\chi w)_\rho \\ &2\mathrm{Re}\,(t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac12} a_1\chi w, i(-t^{\ell} f\lambda_2 + t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac12} a_2)\chi w)_\rho \\ &\qquad = (\{t^{\ell+\frac{\ell-1}{2}}(\lambda_2^* f^{\frac32} a_1 - a_1^* f^{\frac32}\lambda_2) + t^{\ell-1}(a_2^* f a_1 - a_1^* f a_2)\}\chi w, i\chi w)_\rho .\end{aligned}\right.$$

ここで一番重要な項は．(3.1) と (3.2) の右辺第1項です。ここで ρ として．$(\ell-2\rho)>0$，（したがって．$\ell=0$ の時のみが問題）で．$(1+2\rho)>0$ となるものならば．何でもいいのですが，簡単の為．$2\rho = \frac{\ell-1}{2}$ とします．そうすれば．Sharp gårding 不等式を使えば．$\sigma(-\lambda_2) > \varepsilon > 0$ だから．

$$(3.2) \geqq \frac{\ell+1}{2}(\chi w, t^{\ell-1} f(-\lambda_2)\chi w)_\rho - CT \| t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac12}\Lambda^{\frac12}\chi w\|_\rho \| t^{-1}\chi w\|_\rho$$

$$- CT^{\frac{1}{2}} \| t^{-1} \gamma w \|_\rho \cdot \| X \gamma w \|_\rho$$

$$\geqq \frac{1}{4}(\ell+1)\varepsilon \| t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} \gamma w \|_\rho^2 - CT \{ \| t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} \gamma w \|_\rho^2 + \| t^{-1} \gamma w \|_\rho^2$$

$$+ \| t^{-1} \Lambda^{-1} w \|_\rho^2 \} - CT^{\frac{1}{2}} \{ \| t^{-1} \gamma w \|_\rho^2 + \| X \gamma w \|_\rho^2 \}.$$

ここで. $D_t = X + t^\ell f \lambda_1 - t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} a_1$ なる関係式を使った。

(3.3) 及び (3.4) は、絶対値が. $CT(\| t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} \gamma w \|_\rho^2 + \gamma \| t^{-1} \gamma w \|_\rho^2)$

で上から評価される。一方. λ_2 は $\omega \times [0,T_1] \times W_k$ で elliptic だから.

$$D_t = X + t^\ell f \lambda_1 - t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} a_1 = X + g_1 (t^\ell f \lambda_2) - t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} a_1 + g_2$$

$$= X + \frac{1}{i} g_1 (-Y + \frac{1}{i}\gamma t^{-1} + i t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} a_2) - t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} a_1 + g_2$$

とかける。ただし、$g_1, g_2 \in L^0$. 従って.

$$\| D_t \gamma w \|_\rho^2 \leqq C\{ \| X \gamma w \|_\rho^2 + \| Y \gamma w \|_\rho^2 + \| t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} \gamma w \|_\rho^2 + \gamma^2 \| t^{-1} \gamma w \|_\rho^2 \}$$

という評価式が得られる。以上の議論によって. (4) より.

$$\| Q_\gamma \gamma w \|_\rho^2 \geqq \frac{1}{4}(\ell+1)\gamma \| t^{-1} \gamma w \|_\rho^2 + \frac{\ell+1}{6} \varepsilon \| t^{\frac{\ell-1}{2}} f^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} \gamma w \|_\rho^2 + C \frac{1}{\gamma} \| D_t \gamma w \|_\rho^2$$

$$- CT \| t^{-1} \Lambda^{-1} w \|_\rho^2$$

が得られる.

(補題5の証明). この時も. やはり. $v = t^\gamma w$ とおき. $\partial_\gamma = t^{-\gamma} \partial_t t^\gamma$

とすれば.

$$\begin{cases} \partial_\gamma = X + Y \\ X = D_t - t^\ell f(x) \lambda_1 \\ Y = \frac{1}{i}\gamma t^{-1} - i t^\ell f(x) \lambda_2 \end{cases}$$ となる.

しかも. $\lambda_2 > \varepsilon > 0$ on $\omega \times [0,T_1] \times W_k$ だから. ρ として.

$1+2\rho > 2M$, $-(\ell-2\rho) > 3M/\varepsilon$ をみたすように選べば. 前と

同じ手法で補題5が示される。

注意　我々は、議論を統一的にする為、modified norm $\|\cdot\|_p$ を用いたが、$\ell>0$ と仮定すれば、$\|\cdot\|_p$ を使わずに、ふつうの norm $\|\cdot\|$ で議論することができる。

参考文献

1. S. Alinhac & M.S. Baouendi, Amer. J. Math. 102 (1980), 179-217
2. M.S. Baouendi & E.C. Zachmanoglou, Duke Math. J., 45 (1978). 1-13.
3. A.P. Calderón, Amer. J. Math, 80 (1958). 16-30.
4. S. Mizohata, Proc. Jap. Acad. 34 (1958) 687-692
5. S. Nakane, Proc. Jap. Acad. 58 (1982), 141-149.
6. G. Roberts, J. Diff. Eq. 38 (1980), 374-392
7. H. Uryu. Tokyo J. Math. 5 (1982) 117-136.
8. C. Zuily. Univ. Federal de Pernambuco Inst. de Math. Notas de Curso. No18 (1981)
9. H. Tahara, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA, 26 (1979), 213-238, 391-412, 27 (1980) 465-507.