数理解析研究所講究録
531巻 1984年 104-116

合流型 Euler-Poisson-Darboux 方程式と戸田方程式

愛媛大, 工, 亀高 惟倫
(Yoshinori Kametaka)

1. 緒論.

2時間変数の戸田方程式

$$(1.1) \qquad XY \log t_n = t_{n+1} t_{n-1} / t_n^2 \qquad \left(X = \frac{\partial}{\partial x},\ Y = \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

の解を合流型 E-P-D 方程式

$$(1.2) \qquad (XY + xX + \alpha - n)\, u_n = 0$$

の解 u_n より構成することができる。有理関数解, 合流型超幾何関数解, 2変数超幾何関数解がよくわかる解の代表として得られた。(1.1) の解のあるクラスに働く変換群をもとめた。1つ解があると別の解を作る方法を与えたことになる。すなわち解の変換公式が得られた。上の変換群に対応する固有関数をもとめた。固有関数展開をすることができ上の変換群の作用をよく理解することができる。2変数超幾何関数のある部分は戸田方程式により再編成できる。

2、Bäcklund 変換.

t_n が (1.1) をみたすとき

$$(2.1) \qquad r_n = XY \log t_n, \qquad s_n = Y \log t_{n-1}/t_n$$

は次をみたす。これも戸田方程式と呼ぶ。

$$(2.2) \qquad Y r_n = r_n (s_n - s_{n+1}), \qquad X s_n = r_{n-1} - r_n.$$

偏微分作用素の3つ組を

$$(2.3) \qquad M_n = XY + s_{n+1} X + r_n, \quad X_n = -r_n^{-1} X, \quad Y_n = Y + s_{n+1}$$

として 2変数関数 $u_n(x,y)$ を成分とする無限次元ベクトル u の空間 T を次のように定める。

$$(2.4) \qquad T = \{ u_n ;\ M_0 u_0 = 0,\ u_{n+1} = Y_n u_n\ (n \geq 0),\ u_{n-1} = X_n u_n\ (n \leq 0) \}$$

<u>定理 2.1</u>　$u_n \in T$ とすると $M_n u_n = 0$, $u_{n+1} = Y_n u_n$, $u_{n-1} = X_n u_n$ ($\forall n$) であって $\tau_n = u_n t_n$ も (1.1) をみたす。

3、変数分離解.

$r_n = f(n) g(x,y)$ の形の (2.2) の解を全てもとめることができる。$f(n)$ は n の2次多項式となる。α, β は任意定数 $a(x)$, $b(y)$ は任意関数とすると

(i) $r_n = (n-\alpha)(n-\beta)\, a'(x)\, b'(y) \left(a(x) + b(y)\right)^{-2}$,

(ii) $r_n = (n-\alpha)\, a(x)\, b(y)$

(iii) $r_n = a(x)\, b(y)$

となる。これらの解のBäcklund変換を考えるには代表的な次の場合を考えればよい。([1], [2], [3], [4])

(i) $r_n = -(n-\alpha)(n-\beta)(x-y)^{-2}$, (ii) $r_n = -(n-\alpha)$, (iii) $r_n = 1$

(i), (ii), (iii) それぞれの場合 $M_n u_n = 0$ は

(i) $M_n u_n = \{XY + (\alpha+\beta-1-2n)(x-y)^{-1}X - (n-\alpha)(n-\beta)(x-y)^{-2}\}\, u_n = 0$

(Euler-Poisson-Darboux 方程式)

(ii) $M_n u_n = \{XY + xX + \alpha - n\}\, u_n = 0$

(合流型 Euler-Poisson-Darboux 方程式)

(iii) $M_n u_n = \{XY + 1\}\, u_n = 0$ (電信方程式)

となる。ここでは(ii)の場合だけ考える。(2.2)より s_n を消去した

(2.5) $XY \log r_n = r_{n+1} - 2r_n + r_{n-1}$

の形の戸田方程式は G. Darboux ([5]) により発見され、その最も重要な(これは我々の主張)解 $r_n = -(n-\alpha)(n-\beta)(x-y)^{-2}$ も彼自身の発見である。 (i) の解の Bäcklund 変換を調べることは Darboux が曲面論 II で展開したいわゆる E-P-D 方程式に対する詳細な研究を戸田方程式の立場でほん訳することに他ならない。 (i) の場合は ([3], [4]) にみるようにかなり複雑になる。より簡単な (ii), (iii) の場合をていねいに調べることも重要である。

4. 変換群.

以下 3 (ii) の場合を考える。

$$(4.1) \qquad t_n = F(n)\, e^{-(n-\alpha)xy}$$

$$\left(F(n+1)F(n-1)/F(n)^2 = -(n-\alpha), \qquad F(0) = F(1) = 1 \right)$$

は (1.1) をみたす。対応して

$$(4.2) \qquad r_n = -(n-\alpha), \qquad s_n = x$$

となるので

$$(4.3) \qquad M_n = XY + s_{n+1}X + r_n = XY + xX + \alpha - n,$$

$$X_n = -r_n^{-1}X = (n-\alpha)^{-1}X, \qquad Y_n = Y + s_{n+1} = Y + x$$

となる。これらの M_n, X_n, Y_n を使って (2.4) により T を定める。T は実質的に合流型方程式の解の集まりである。

<u>定理 4.1</u>　1階偏微分作用素 $D = a(x,y)X + b(x,y)Y + c(x,y)$ で M_0 と M_0 を法として可換なものの全体は4次元ベクトル空間で その基底は $\hat{X} = X + y$, Y, $Z = yY - xX$, 1 である。

上の $\hat{X}$, Y, Z を生成作用素とする 1-parameter 変換群が構成できてそれぞれ $\ker M_0$ を不変にする。これをもとに T を不変にする線形変換の 1-パラメーター群が作れる。$(a)_n = \Gamma(n+a)/\Gamma(a)$ とする。

<u>定理 4.2</u> (主定理)　$u_n \in T$ であるとき

$$(4.4)\qquad \tilde{X}(\lambda)\, u_n(x,y) = e^{\lambda y}\, u_n(x+\lambda, y),$$

$$\tilde{Y}(\mu)\, u_n(x,y) = u_n(x, y+\mu),$$

$$\tilde{Z}_n(\nu)\, u_n(x,y) = e^{n\nu}\, u_n(e^{-\nu}x, e^{\nu}y),$$

$$(4.5)\qquad R\, u_n(\alpha; x, y) = (-1)^n (1-\alpha)_n\, e^{-xy}\, u_{-n}(1-\alpha; y, -x)$$

もまた T に属する。(4.5) の場合 α も u_n の独立変

数と思っておく。 $\hat{X}(\lambda)$, $\tilde{Y}(\mu)$, $\tilde{Z}_n(\nu)$ はそれぞれ $\hat{X}$, Y, $Z_n = Z + n$ を生成作用素とする線形変換の 1-parameter group でそれぞれ $\ker M_n$ を不変にする。

$\{R^4 = id.,\ R,\ R^2,\ R^3\}$ は有限群となる。 $\hat{X} u_n$, $Y u_n$, $Z_n u_n$ もまた T に属する。

上の定理は戸田方程式の解 $u_n t_n$ より独立変数の変換で新しい解 $(\tilde{X}(\lambda) u_n)\cdot t_n$, $\cdots$ が作れ、また微分することによっても新しい解 $(\hat{X} u_n)\cdot t_n$, $\cdots$ が作れることを意味する。 また T は線形空間であって $u_n t_n$, $v_n t_n$ ($u_n, v_n \in T$) なる2つの解より線形結合 $(\mathrm{const}\ u_n + \mathrm{const}\ v_n)\cdot t_n$ によっても新しい解が作れる。

次のような交換関係が成り立つ。

定理 4.3 (交換関係)

(4.6) $\tilde{X}(\lambda)\tilde{Y}(\mu) = e^{-\lambda\mu}\tilde{Y}(\mu)\tilde{X}(\lambda)$, $\tilde{X}(\lambda)\tilde{Z}_n(\nu) = \tilde{Z}_n(\nu)\tilde{X}(e^{-\nu}\lambda)$,

$$\tilde{Y}(\mu)\tilde{Z}_n(\nu) = \tilde{Z}_n(\nu)\tilde{Y}(e^{\nu}\mu),$$

(4.7) $\tilde{X}(\lambda) Y = (Y - \lambda)\tilde{X}(\lambda)$, $\tilde{X}(\lambda) Z_n = (Z_n - \lambda\hat{X})\tilde{X}(\lambda)$,

$$\tilde{Y}(\mu) Z_n = (Z_n + \mu Y)\tilde{Y}(\mu), \quad \tilde{Y}(\mu)\hat{X} = (\hat{X} + \mu)\tilde{Y}(\mu),$$

$$\tilde{Z}_n(\nu)\hat{X} = e^{\nu}\hat{X}\tilde{Z}_n(\nu), \qquad \tilde{Z}_n(\nu)Y = e^{-\nu}Y\tilde{Z}_n(\nu),$$

$$\hat{X}Y = Y\hat{X} - 1, \qquad \hat{X}Z_n = (Z_n - 1)\hat{X}, \tag{4.8}$$

$$YZ_n = (Z_n + 1)Y,$$

$$\tilde{X}(\lambda)R = R\tilde{Y}(-\lambda), \quad \tilde{Y}(\mu)R = R\tilde{X}(\mu), \quad \tilde{Z}_n(\nu)R = R\tilde{Z}_n(-\nu), \tag{4.9}$$

$$\hat{X}R = -RY, \quad YR = R\hat{X}, \quad Z_nR = -RZ_n. \tag{4.10}$$

5. 固有関数,

Z_n の固有関数を合流型超幾何関数 $F(\alpha, \beta; z)$ で作れる。

<u>定理 5.1</u> $T \cap \{u_n \in \ker(Z_n - \beta)\}$ は2次元ベクトル空間で その基底は $A_n(x) = \frac{(1-\alpha)_n}{(1-\beta)_n} x^{n-\beta}$, $B_n(y) = (-1)^n(-\beta)_n y^{\beta-n}$ とし

$$f_n(\alpha, \beta; x, y) = A_n(x) F(\alpha - \beta, n+1-\beta; -xy), \tag{5.1}$$

$$g_n(\alpha, \beta; x, y) = B_n(y) F(\alpha - n, 1+\beta-n; -xy) \tag{5.2}$$

$$= B_n(y)e^{-xy}F(1+\beta-\alpha, 1+\beta-n; xy) = R f_n(\alpha, -\beta; x, y)$$

である。 $\hat{X}$, Y に対して次のように変換をうける。

$$(5.3)\quad (-\hat{X})^j f_n(\alpha, \beta; x, y) = (\beta)_j f_n(\alpha, \beta+j; x, y),$$

$$(-Y)^j f_n(\alpha, \beta; x, y) = \frac{(\alpha-\beta)_j}{(1-\beta)_j} f_n(\alpha, \beta-j; x, y),$$

$$\hat{X}^j g_n(\alpha, \beta; x, y) = \frac{(1+\beta-\alpha)_j}{(1+\beta)_j} g_n(\alpha, \beta+j; x, y),$$

$$(-Y)^j g_n(\alpha, \beta; x, y) = (-\beta)_j g_n(\alpha, \beta-j; x, y)$$

$$(j = 0, 1, 2, \cdots)$$

<u>定理 5.2</u> $T \cap \{u_n \in \ker Y\} = T \cap \{u_n \in \ker Y \cap \ker(Z_n - \alpha)\}$ は 1次元ベクトル空間で その基底は

$$(5.4)\quad p_n = x^{n-\alpha} = f_n(\alpha, \alpha; x, y)$$

である。

$$(5.5)\quad \hat{X}(\lambda) p_n = e^{\lambda y}(x+\lambda)^{n-\alpha}$$

は 1次元空間 $T \cap \{u_n \in \ker(Y-\lambda)\} = T \cap \{u_n \in \ker(Y-\lambda) \cap \ker(Z_n - \alpha - \lambda\hat{X})\}$ の基底である。

$$(5.6)\quad g_n = R p_n = (-1)^n (1-\alpha)_n e^{-xy} y^{\alpha-1-n} = g_n(\alpha, \alpha-1; x, y)$$

は1次元空間 $T \cap \{u_n \in \ker \hat{X}\} = T \cap \{u_n \in \ker \hat{X} \cap \ker(Z_n + 1 - \alpha)\}$ の基底である。

$$(5.7) \quad \tilde{Y}(\mu) g_n = R\tilde{X}(\mu) f_n = (-1)^n (1-\alpha)_n e^{-x(y+\mu)} (y+\mu)^{\alpha-1-n}$$

は1次元空間 $T \cap \{u_n \in \ker(\hat{X}+\mu)\} = T \cap \{u_n \in \ker(\hat{X}+\mu) \cap \ker(Z_n + 1 - \alpha + \mu Y)\}$ の基底である。

6、有理関数解.

前節の f_n, g_n はそれ自体では本質的に新しい解は与えないが $\hat{X}$, Y をほどこすと新しい解（有理関数解）を生む。

<u>定理 6.1</u>（有理関数解）

$$(6.1) \quad P_{n,k} = (-\hat{X})^k f_n / f_n = (\alpha - n)_k x^{-k} F(-k, n+1-\alpha-k\,;\,-xy)$$

$(k = 0, 1, 2, \cdots)$ は (x^{-1}, y) について k 次斉次多項式である。

$$(6.2) \quad \begin{cases} \rho_n = \alpha - n + XY \log P_{n,k} = (\alpha - n) P_{n+1,k} P_{n-1,k} / P_{n,k}^2 \\ \sigma_n = x + Y \log P_{n-1,k} / P_{n,k} \end{cases}$$

は戸田方程式 (2.2) の有理関数解である。$\tilde{P}_{n,k} = Z_n^k \tilde{X}(\lambda) f_n / \tilde{X}(\lambda) f_n$, $Q_{n,k} = Y^k g_n / g_n$, $\tilde{Q}_{n,k} = Z_n^k \tilde{Y}(\mu) g_n / \tilde{Y}(\mu) g_n$ も本質的には

多項式であって　それぞれ有理関数解を与える。

7. 超キカ関数解.

T は線形空間であって　固有関数展開によって様々な解を構成できる。　ε は整数　a_j は任意数列とする。

$$(7.1)\qquad u_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j f_n(\alpha, \beta+\varepsilon j\,;\, x, y)$$

は収束すれば T に属する。　a_j が適当であれば u_n は2変数超キカ関数で表わされる。　2変数超キカ関数は無限にあるので適当なわくを設定して数を制限しなければならない。　Horn の表（[6]）に「2位の」という制限をつければ全部で34種であることが示されている。　ここでは (7.1) の u_n が Horn の表に登場する2変数超キカ関数で表わされる場合を列挙する。

<u>定理 7.1</u>（超キカ関数解）

$\alpha, \beta, \delta, \alpha', \beta'$ は任意定数を表わす。$\left((\alpha)_j = \Gamma(j+\alpha)/\Gamma(\alpha)\right)$

(i)　$\varepsilon = 1$,　$a_j = (\alpha')_j (\beta)_j / (\delta)_j\, j!$,

$$(7.2)\qquad u_n = A_n(\alpha)\, e^{-xy} \sum_{j,k} \frac{(\beta-n)_{j-k}\,(\alpha')_j\,(n+1-\alpha)_k}{(\delta)_j\; j!\; k!}\, x^{-j}(-xy)^k$$

$$= A_n(\alpha)\, e^{-xy}\, \mathrm{H}_2(\beta-n, \alpha', n+1-\alpha, \delta\,;\, x^{-1}, -xy)$$

$$= {}_1F_1(\alpha', \delta; -\hat{X})\, f_n(\alpha, \beta; x, y),$$

(7.3) $$u_n(x,0) = A_n(\alpha)\, {}_2F_1(\alpha', \beta-n, \delta; x^{-1}).$$

特に $\delta = 1+\beta-\alpha$ とすると

(7.4) $$u_n = A_n(\alpha) \sum_{j,k} \frac{(\alpha')_j\, (\beta-n)_{j-k}}{(1+\beta-\alpha)_{j-k}\, j!\, k!}\, x^{-j} (-xy)^k$$

$$= A_n(\alpha)\, \Gamma_1(\alpha', \alpha-\beta, \beta-n; -x^{-1}, xy)$$

$$= {}_1F_1(\alpha'; 1+\beta-\alpha; -\hat{X})\, f_n(\alpha, \beta; x, y)$$

(7.5) $$u_n(x,0) = A_n(\alpha)\, {}_2F_1(\alpha', \beta-n, 1+\beta-\alpha; x^{-1})$$

(ii) $\varepsilon = 1$, $a_j = (\beta)_j / (\delta)_j\, j!$

(7.6) $$u_n = A_n(\alpha)\, e^{-xy}\, \mathrm{H}_4(\beta-n, n+1-\alpha, \delta; x^{-1}, -xy)$$

$$= {}_0F_1(\delta; -\hat{X})\, f_n(\alpha, \beta; x, y)$$

(7.7) $$u_n(x,0) = A_n(\alpha)\, {}_1F_1(\beta-n, \delta; x^{-1})$$

特に $\delta = 1+\beta-\alpha$ とすると

$$(7.8)\qquad u_n = A_n(\alpha)\,\Gamma_2(\alpha-\beta,\ \beta-n;\ -x^{-1},\ xy)$$

$$= {}_0F_1(1+\beta-\alpha;\ -\hat{X})\, f_n(\alpha,\beta;\ x,y)$$

$$(7.9)\qquad u_n(x,0) = A_n(\alpha)\,{}_1F_1(\beta-n,\ 1+\beta-\alpha;\ x^{-1}).$$

その他次の様な u_n が T に属する。

$$A_n(\alpha)\, e^{-xy}\, H_9(\beta-n,\ n+1-\alpha,\ \delta;\ x^{-2},\ -xy),$$

$$A_n(\alpha)\, e^{-xy}\, \Xi_1(\alpha',\ n+1-\alpha,\ \beta',\ n+1-\beta;\ x,\ xy),$$

$$A_n(\alpha)\, \Phi_1(\alpha-\beta,\ \beta',\ n+1-\beta;\ -xy,\ x),$$

$$A_n(\alpha)\, e^{-xy}\, \Phi_2(\beta',\ n+1-\alpha,\ n+1-\beta;\ x,\ xy),$$

$$A_n(\alpha)\, e^{-xy}\, \Phi_3(n+1-\alpha,\ n+1-\beta;\ xy,\ x).$$

副産物として Γ_1 は H_2 で、Γ_2 は H_4 で表わされる…… がわかる。

(1.2) に対して Riemann 関数を合流型超幾何関数で作れる。各種の積分表示を導くことができる。

References

[1] Y. Kametaka On the telegraph equation and the Toda equation, Proc. Japan Acad., (to appear)

[2] 〃 On the confluent Euler-Poisson-Darboux equation and the Toda equation, 同上

[3] 〃 On the Euler-Poisson-Darboux equation and the Toda equation I, 同上

[4] 〃 〃 II, 同上

[5] G. Darboux Leçons sur la théorie générale des surfaces et les application géométriques du calcul infinitesimal II, Chelsea 1972.

[6] A. Erdelyi et al Higher transcendental functions vol. 1, 224-227, McGraw-Hill 1953.