

## スフェロマックの3次元MHDシミュレーション

広大核融合 林 隆也 (Takaya Hayashi)  
佐藤 哲也 (Tetsuya Sato)

### 1. はじめに

トカマクやステラレータなどに比してより単純な構造の核融合プラズマ磁気閉じ込め装置の開発を目的として、コンパクトトラスと称される一群の装置の基礎実験がいくつかの場所でおこなわれている。スフェロマックはその一種のトラス型閉じ込め装置である。トカマクではポロイダル磁場は主にプラズマ電流によって作られるがトロイダル磁場は外部のコイル電流によって作られる。この、プラズマと交差した外部コイル設置の必要性が装置の複雑化、保守の困難さをもたらしている。スフェロマックではその両方の磁場をプラズマ電流自身で形成するため、装置が簡単になる。

このようなスフェロマック配位の閉じ込めの可能性の根拠を与えるものとして、J. B. Taylor の緩和理論がある。これは閉じた領域内のプラズマに適当に磁束を与えた場合、プラズマはどのような配位に自ら落ちつこうとするかを与える仮説

である。この理論においては、全体積で定義される磁気ヘリシティ  $K = \int_{\nabla} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, dV$  ( $\mathbf{A}$  は磁場  $\mathbf{B}$  のベクトルポテンシャル) が他の量と比して強制的に時間変化が小さいと仮定して、一定とおく。これを拘束条件とし、目的関数として磁場エネルギー  $W = \int_{\nabla} \frac{1}{2} B^2 \, dV$  が極小となる状態にプラズマは緩和してゆくと考える。ここで、プラズマ圧力のエネルギーや運動エネルギーは充分小さいとして無視している。この理論はこのようにスタートとゴールを与える理論である。これを解いてみると、解として  $\text{rot } \mathbf{B} = k \mathbf{B}$  という force-free 解を得る。ここで  $k$  は空間的に一定な値となる。これをプラズマ境界ではトロイダル磁場が零であるという条件で解くと、スフェロマック解が得られる。この解は流体力学における Hill 流解と数学的に同じである。スフェロマックでは、(フープ力をおさえるための外部垂直磁場もしくは真空室は必要であるが) 外部コイルによるトロイダル磁場は不要となる。

実験的には、このようなスフェロマックを同軸ガン方式や誘導電流方式で生成している。上に述べたように、生成のときにも緩和現象というダイナミクスを伴った物理過程が重要であり、このことがステラレータやトカマクと比較した場合の一つの特色となっている。

スフェロマックの計算機ダイナミックシミュレーションの計算手順は生成段階および不安定性成長段階の2段階から成っている。生成段階としては、我々はこれまでプリンストン大学S-1装置のslow induction方式のシミュレーションをおこなっている。以下、生成されたスフェロマック、グローバル不安定性の一種である傾斜不安定性のシミュレーション結果の典型例、および不安定性を安定化させる試みの一例を簡単に述べる。

## 2. シミュレーション方式

### 2.1 装置モデル

図1はシミュレーションで用いた装置モデルを示す。円柱形の真空容器の内部にあるトーラス状のものはフラックスコアと呼ばれるコイル系で、ここからポロイダル及びトロイダル磁束をプラズマに

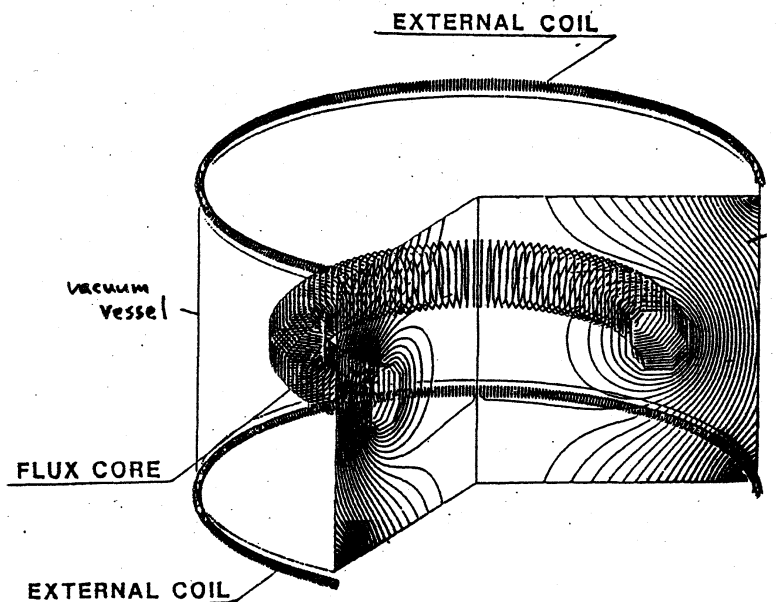


図1. 装置モデル

供給する。この供給は操作プログラムに従っておこなわれ、やがてスフェロマックト-ラスがフラックスコアと中心軸の間に生成される。

座標系は図2のような円柱系でオイラー的に固定されている。メッシュ数は、 $(r, \theta, z)$  方向に  $37 \times 16 \times 37$  又は  $73 \times 32 \times 73$  である。

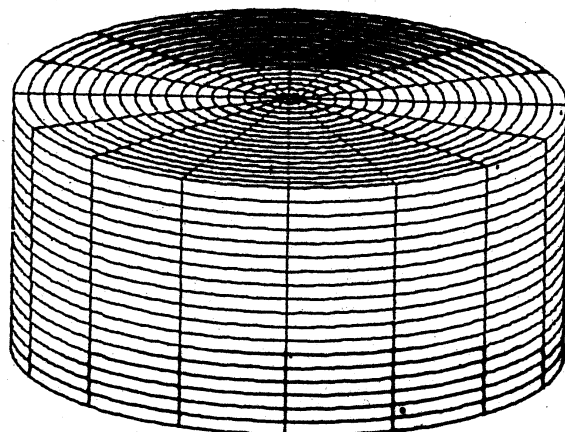


図2. 円柱メッシュ

## 2.2 方程式系

非線形、圧縮性、等方圧力、抵抗性のMHD方程式を用いる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[ \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{\mu} (\mathbf{B} \mathbf{B} - \frac{1}{2} B^2 \hat{\mathbf{i}}) \right] - \nabla \cdot \Pi \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \mathbf{j}) \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathcal{S} - \nabla \cdot (\Pi \cdot \mathbf{v}) \end{array} \right.$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$\mathcal{S} = (\mathbf{U} + p + \frac{1}{2\mu} B^2) \mathbf{v} - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + \frac{1}{\mu} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

$$(\Pi = \nu \left[ \frac{2}{3} (\nabla \cdot \nabla) \hat{\mathbf{i}} - \nabla \mathbf{v} - \tau (\nabla \mathbf{v}) \right])$$

規格化は次の三つの量でおこなう。

磁場  $B_0$ , 長さ  $L$ , アルバート波速度  $V_A \equiv B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0}$

3次元円柱座標系で方程式系を成分表示すると。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \rho v_r - \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \rho v_\theta$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_r}{\partial t} = & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (\rho v_r^2 - B_r^2) - \frac{\partial}{\partial r} (p + \frac{1}{2} B^2) \\ & - \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_r v_z - B_r B_z) + \frac{1}{r} (\rho v_\theta^2 - B_\theta^2) \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_r v_\theta - B_r B_\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_z}{\partial t} = & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (\rho v_r v_z - B_r B_z) \\ & - \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z^2 - B_z^2) - \frac{\partial}{\partial z} (p + \frac{1}{2} B^2) \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_z v_\theta - B_z B_\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_\theta}{\partial t} = & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (\rho v_\theta v_r - B_\theta B_r) - \frac{1}{r} (\rho v_r v_\theta - B_r B_\theta) \\ & - \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_\theta v_z - B_\theta B_z) \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta^2 - B_\theta^2) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (p + \frac{1}{2} B^2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (v_r B_z - v_z B_r + \eta j_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r B_\theta - v_\theta B_r - \eta j_z)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (v_r B_z - v_z B_r + \eta j_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta B_z - v_z B_\theta - \eta j_r)$$

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} (v_\theta B_r - v_r B_\theta + \eta j_z) + \frac{\partial}{\partial z} (v_\theta B_z - v_z B_\theta - \eta j_r)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} = & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left\{ (U + p + \frac{1}{2} B^2) v_r - (v_\theta B_\theta B_r + v_z B_z B_r + v_r B_r^2) + \eta (j_\theta B_z - j_z B_\theta) \right\} \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (U + p + \frac{1}{2} B^2) v_z - (v_r B_r B_z + v_\theta B_\theta B_z + v_z B_z^2) + \eta (j_r B_\theta - j_\theta B_r) \right\} \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ (U + p + \frac{1}{2} B^2) v_\theta - (v_r B_r B_\theta + v_z B_z B_\theta + v_\theta B_\theta^2) + \eta (j_z B_r - j_r B_z) \right\} \end{aligned}$$

### 2.3 境界条件

真空容器は完全導体とみなし、壁上で、

$$\frac{\partial}{\partial t} B_n = 0, \quad v = 0$$

で与える。ここで  $B_n$  は壁に垂直な磁場成分である。

フラックスコアも完全導体であるが、生成段階では境界のメッシュ上にはフラックスコアから供給される磁束を操作プログラムに従って境界条件として与える。

### 2.4 計算スキーム

通常の2次元用 2 step Lax-Wendroff 法を自然に3次元に拡張して用いる。オイラ-的、陽的に実空間で時間発展を解く。フーリエ空間でなく実空間で解くのは、境界の形状が少し複雑なためである。

### 2.5 初期条件

時刻  $T=0$  においてはプラズマ電流は0であり、従ってスフェロマックは存在しない。外部コイルおよびフラックスコアコイル電流によるポロイダル磁場(垂直磁場)だけが存在する。プラズマ密度は真空容器中一様とする。

以下に示す例ではプラズマ圧力は零としているが、有限圧力でも同様の計算が可能である。

### 3. 生成段階のシミュレーション

図3はスフェロマック生成段階の時間変化を、典型的磁力線のプロットにより示している。フラックスコアからの磁束供給によりプラズマとともに中心軸側に押し出された磁力線は、磁気リコネクション過程によって寸断され、やがてフラックスコアのすぐ内側に独立したトーラスを形成する。その後この磁化プラズマは自発的にスフェロマック配位に緩和していき、ほぼ平衡配位となつて落ち着く。

(この生成段階のシミュレーションは軸対称性を仮定して2次元でおこなっている)

図4に、生成されたスフェロマック配位の断面図を示す。(2)は実線がトロイダル磁場、破線はポロイダルフラックスのそれぞれ等高線を示す。もともとはフラックスコアの境界上で与えられたトロイダル磁場のほとんどが、スフェロマック

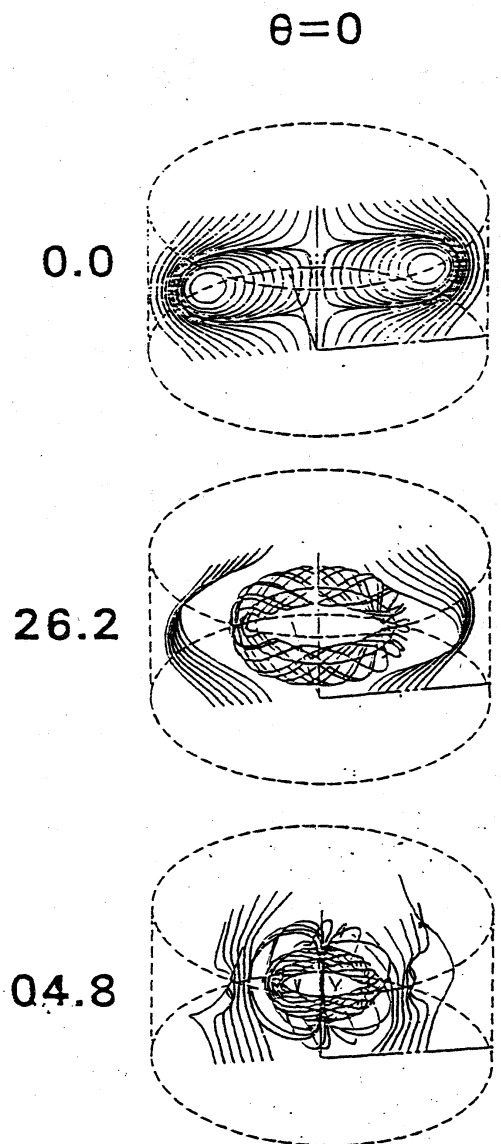


図3 スフェロマック生成

トーラス中にとりこまれていることが分る。(b) はプラズマ電流のベクトルプロットである。プラズマ電流はトーラス中のみ流れ、外部は真空磁場となっていることが分る。磁場と電流の比を調べてみると、平行でかつ比はほぼ一定になっており、Taylorの結果を支持している。

外部磁場の形状や供給するトロイダル/ポロイダル磁束の比を変えることにより、たて長/横長や大小半径の比など生成されるスフェロマックの形状をコントロールすることができる。

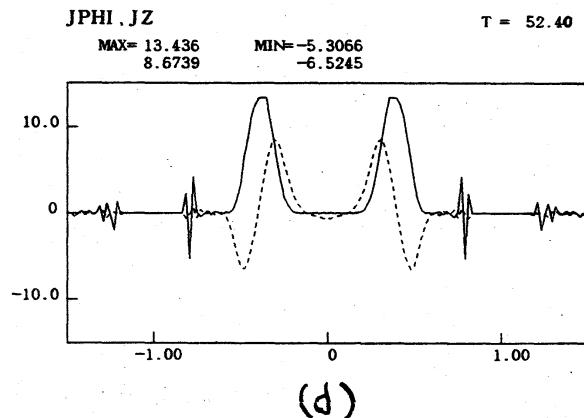
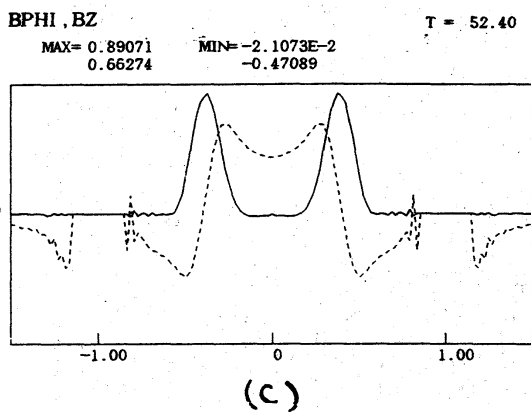
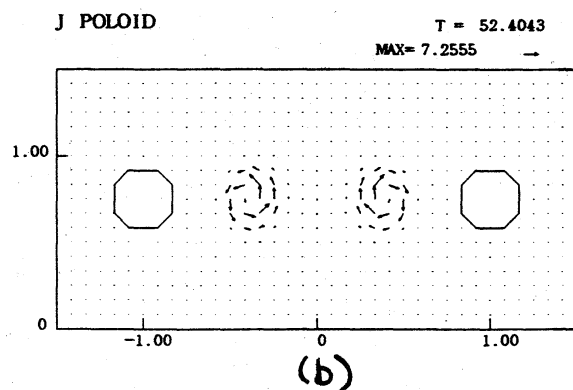
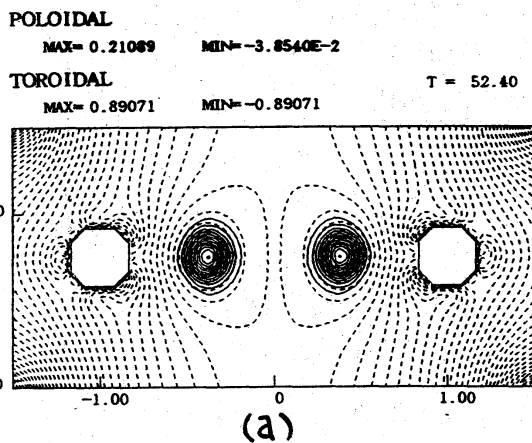


図4 生成されたスフェロマックの断面図



#### 4. 傾斜不安定性のシミュレーション

外部磁場によって閉じ込められたスフェロマックは傾斜不安定性に対して不安定になり易いことが知られている。その時間発展の過程をシミュレーションによってあきらかにしたのが図5である。時間とともにトーラスは次第に傾斜し、やがて平衡を失って崩壊する。シミュレーションの結果、傾斜が進行する過程において、外部磁場とトーラスの磁場との間の磁気リコネクションがトーラスの変形を決める上で重要な働きをすることが明らかとなった。すなわち、平衡状態ではトーラスの磁場とは独立であった外部磁場が傾斜の進行とともにリコネクションを通じてトーラス内部に侵入する。このためにトーラスの磁気

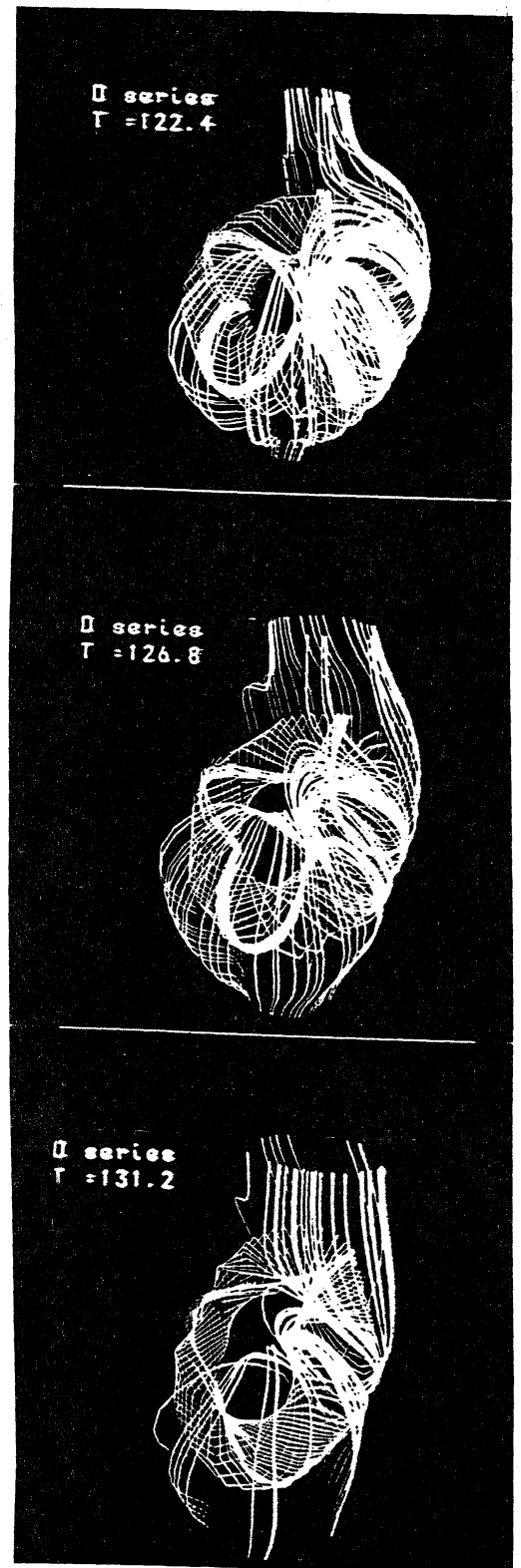


図5 傾斜不安定性

面は次々とはがされてゆく。しかもこのリコネクションは傾斜したトロイダルの片方の側の腕でのみ進行する。この左右非対称性の出現は、傾斜したトロイダル磁場と外部磁場の間の平行/反平行に関する非対称性により説明することができる。図5はこのようなりコネクションがいかに起こっているのかを、各時刻においてちょうどリコネクトした磁力線をプロットすることにより示している。図6は傾斜角の時間変化を示す。図5のケースは図6(a)に対応する。不安定性成長の時間スケールはプリンストンにおける実験結果と良く一致している。

### 5. 傾斜不安定性の安定化

傾斜不安定性の安定化のために、外部磁場形状の制御、受身的コイル設置、スピンなどが考えられている。ここでは隣接した導体の安定化効果をシミュレーションで調べた例を示す。

図7(b), (c)に示すように

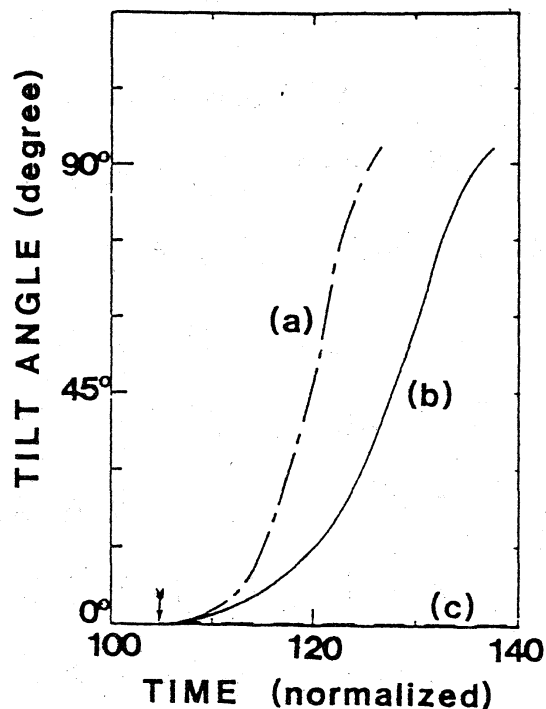


図6 傾斜角の時間発展  
(矢印は擾乱印加時刻)

距離を変えて垂直の円柱状導体壁を設置した。(a) はもとの真空容器のケースで、基準値として使用する。(a)~(c) のケースについて同じ傾斜不安定性擾乱を与えた結果を図6(a)~(c)に示す。(b) では成長率は少し小さくなったが結局傾斜崩壊にいたる。一方、(c) では全く成長がおさえられていることがわかる。(b) と(c) で結果がこのように大きく異なる理由を探るため

に、壁上に誘起された電流パターンを展開して示したのが図8(b), (c) である。(b) は渦状パターンで、これはインダクション電流と解釈することができる。この渦状電流は水平方向の磁場を生成し、この磁場は傾斜不安定性を抑える方向に作用するが、完全に抑制する程には強力でない。一方、(c) のパターンは(b) とは全く異なり、この面内では発散をもつようなパターンである。これはラインタイイング電流と解釈することができる。すなわち、図7(c) を見ると、(c) の場合トーラスを取りまく磁力線が導体壁を貫いていることがわか

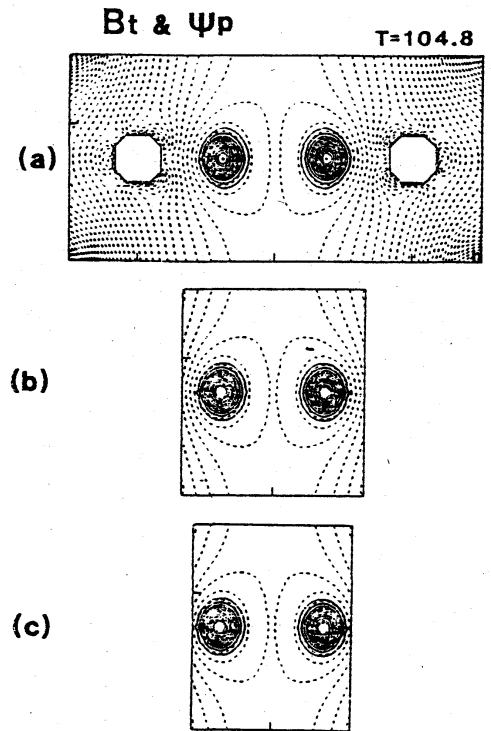


図7 導体壁の設置

る。このため、傾斜運動によって生じる電場が、沿磁力線電流一壁を通じて短絡され、結果として運動が完全に抑制される。

このようなラインタイイング効果は傾斜不安定性抑制に強力な効果を持つという結果を反映して、

プリンストンの実験では一部の磁力線を

フラックスコアにラインタイイングするモードで安定化を図っている。

## 6. おわりに

3次元シミュレーションは実験・理論と密接に結びつくことにより、今後ともますます重要な有効な手段になっていくものと考えている。

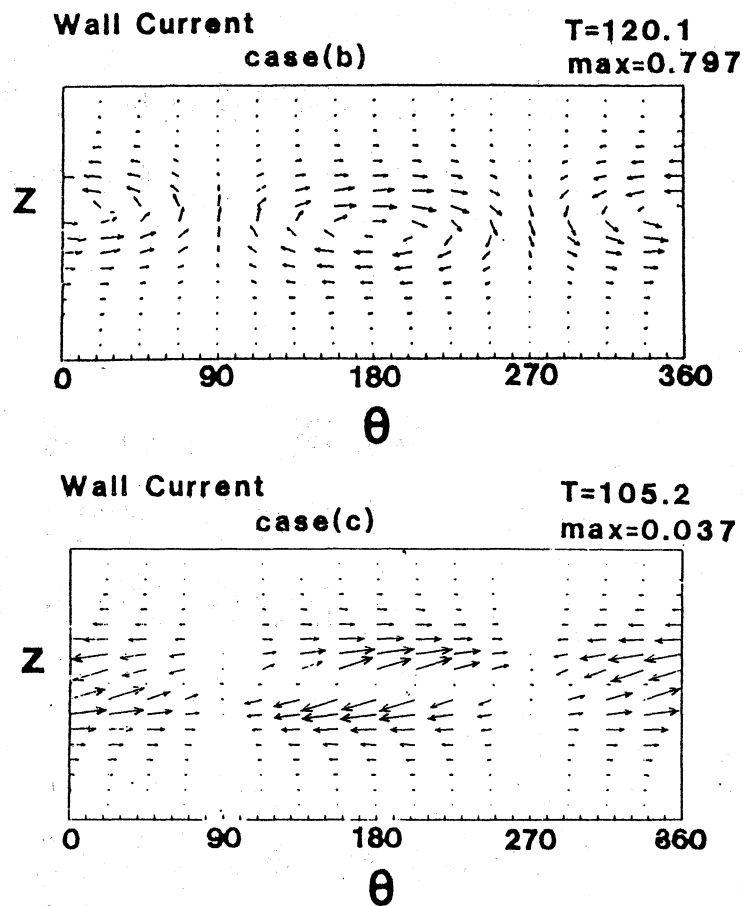


図8 導体壁上に誘起された電流パターン