

トカマクのキック・モードの非線形計算

原研核融合 栗田 源一 (Gen-ichi Kurita)
安積 正史 (Masafumi Azumi)
常松 俊秀 (Toshihide Tsunematsu)
滝塚 知典 (Tomonori Takizuka)
竹田 辰興 (Tatsuoki Takeda)

§.1 はじめに

トカマク装置によるプラズマ閉込めの実験に於て major disruption と呼ばれる急激なプラズマ電流の減少を伴った、自身のワン・ターン電圧スパイクが観測されている。この major disruption は装置が大きくなるにつれ、それに与える損失が大きくなるので、その原因の解明は、大きな問題となっている。現在この原因として、 $m/n=2/1$ (m, n は、各々ポロイダル方向、トロイダル方向を巻数を表わす) のテアリング・モードが関連していると考えられている^{1~3)}。しかしながら、数値計算によると、この $m/n=2/1$ のモードが大きな磁気島を持つような不安定なプラズマの電流分布は、かなり制限されたものであり、更に シェル(導体壁)がプラズマ表面近くにおか

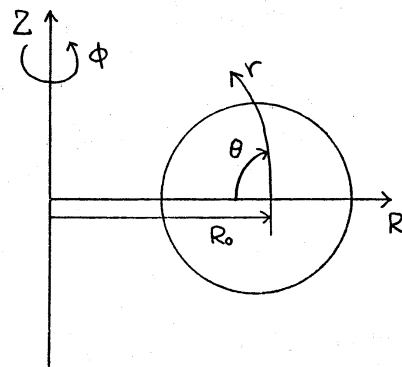
れている場合を除いて、この major disruption のために、 q_a (プラズマ表面での安全係数の値) が 2 以下にならないという実験データから、プラズマ表面の動く $m/n=2/1$ キンクモード不安定性も、これに何らかの関連があるものと考えられる。自由境界キンクモードは、円筒近似では、線形に不安定な領域でも、非線形効果を考慮すれば、ある閾値で飽和することが知られている^{4,5)}。そこで、ここではトロイダル効果を考慮したキンクモードの非線形計算を行い、この飽和が、どのような影響を受けるのかを調べ、 $m/n=2/1$ 自由境界キンクモードと major disruption との相関)を見出すことと、その主な目的とする。

§.2 基礎方程式

通常、自由境界キンクモードの解析は、プラズマは真空領域で囲まれているとして、方程式はプラズマ領域と真空領域で別々に解き境界で解をつないで全体の解を求めるという方法をとる。線形の解析では、プラズマの表面の変形は、摂動量の 2 次の量となるため無視できるが、非線形の計算は、これを考慮しなければならず、このプラズマ表面の変形の計算は、境界条件の計算を含めて、少々複雑なものとなる。そこで、ここでは、このキンクモードの計算を通常、真空解を使わずに、プラズマの

外側に高抵抗領域があると仮定して真空領域と表現する方法をとる。このように仮定すれば、外側の高抵抗領域では、プラズマ電流は殆んど流わず、その解は通常の真空解を使ったものと同じふるまいをすることが予想される。

基礎方程式は通常の簡約方程式を用いるが、プラズマ境界の位置を決めるために抵抗の式を解く必要がある。ここでは抵抗はプラズマの流れに沿って動くと仮定し、簡約方程式に抵抗の対流方程式を加えたものを用いる。磁力線が



オ 1 図

直線となる (r, θ, ϕ) 曲線座標 (オ 1 図) を使い、更にすべての変数を θ と ϕ に関してフーリエ展開すれば、基礎方程式は次の様になる。

$$\frac{\partial U_{m/n}}{\partial t} = [U, \phi]_{m/n} - \frac{B_0}{R_0} n J_{m/n} + [J, \psi]_{m/n}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \psi_{m/n}}{\partial t} = [\psi, \phi]_{m/n} + \frac{B_0}{R_0} n \psi_{m/n} + \sum_{\substack{m'+n'=m \\ n'+n''=n}} \eta_{m'/n'} J_{m''/n''} - E_{m/n}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta_{m/n}}{\partial t} = [\eta, \phi]_{m/n}, \quad (3)$$

こゝで

$$J_{m/n} = \frac{1}{r} \sum_{m'+n'=m} \left[\frac{d}{dr} (G_m^{m'} \frac{d\psi_{m''/n''}}{dr}) - m'' \frac{d}{dr} (G_m^{r0} \psi_{m''/n''}) - m G_m^{r0} \frac{d\psi_{m''/n''}}{dr} - m m' G_m^{\infty} \psi_{m''/n''} \right], \quad (4)$$

$$U_{m/n} = \frac{1}{r} \sum_{m'+n'=m} \left[\frac{d}{dr} (H_{m'}^{rr} \frac{d\phi_{m'/n}}{dr}) - m' \frac{d}{dr} (H_{m'}^{r\theta} \phi_{m'/n}) \right. \\ \left. - m H_{m'}^{r\theta} \frac{d\phi_{m'/n}}{dr} - m m' H_{m'}^{\theta\theta} \phi_{m'/n} \right], \quad (5)$$

$$r g^{ij} = \sum_m G_m^{ij}(r) \exp(im\theta) \quad , \quad (6)$$

$$r \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 g^{ij} = \sum_m H_m^{ij}(r) \exp(im\theta) \quad , \quad (7)$$

$$[a, b]_{m/n} = \sum_{\substack{m'+m''=m \\ n'+n''=n}} \frac{m'}{r} \left(a_{m'/n'} \frac{db_{m''/n''}}{dr} - b_{m''/n''} \frac{da_{m'/n'}}{dr} \right) \quad , \quad (8)$$

(1)~(7)式に於て. $\phi, U, \psi, \chi, \eta$ は各々流れ関数, 荷度, 軸
イダル磁束関数, プラズマ電流, 抵抗を. 又 R_0, B_0 は各々対称軸
から磁気軸までの距離, トロイダル磁場, E は抵抗によるプ
ラズマ電流の減衰を補うための電界を表わす. g^{ij} は曲線
座標 (r, θ, ϕ) のメトリック係数を表わし. 円筒配位では. (4),
(5)式の4, ϕ の作用素は通常のラプラシアンとなる. 又運動
方程式, (1)式, に於て. $(R/R_0)^2 P = \text{const.}$ が仮定されている.

§.3 線形解析

この章では我々の用いた高抵抗モデルでの解が通常の真
空解を使ったキックモードの解と一致することを示し. 更に
数値解析により. 線形に於るその解のふるまいを調べる. 前
章の基礎方程式 (1), (2), (4), (5) を $\phi(U)$ が微少量であるとし
て. ϕ で線形化し. 時間積分を δ とおけば. 円筒配位で.

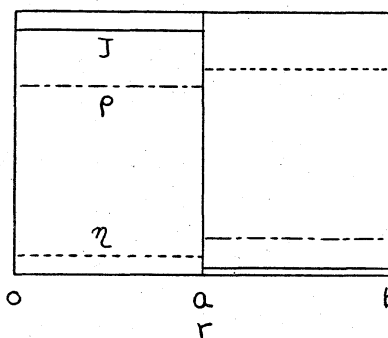
$$\gamma \nabla \cdot (\rho \nabla \hat{\Phi}) = F \Delta \hat{\Phi} - \frac{m}{F} \frac{dJ_0}{dr} \hat{\Phi} \quad (9)$$

$$\gamma \hat{\Phi} = -F \hat{\Phi} + \eta \Delta \hat{\Phi} \quad (10)$$

$$\text{こゝで} \quad F \triangleq \frac{B^0}{F} (m - nq) \quad (11)$$

又 B^0 , q は各々ポロイダル磁場, 安全係数を, \sim は擾動量であることを表わす。この章での線形解析では, 運動方程式, (9)式, に於て $\rho = \text{const.}$ の仮定は, はおされていゝ。以下では,

Fig. 2 のようなモデルプラズマを考え, プラズマ電流抵抗, 密度は各々プラズマ内部, 外部で一様であるとし, 更にキルクモードを表現するために,



$\eta_{in}/\eta_{ex} \ll 1$, 添字 in, ex は各々プラズマ内部, 外部を表わす, であることを仮定

Fig. 2

ある。この仮定により, プラズマ内部, 外部での解 $\hat{\Phi}_{in}, \hat{\Phi}_{ex}$ は, 各々次の様に求まる。

$$\hat{\Phi}_{in} = -\frac{\gamma}{F_{in}} r^m, \quad \hat{\Phi}_{ex} = -\frac{\gamma}{F_{in}} \frac{r^m - b^{2m} r^{-m}}{1 - (b/a)^{2m}}, \quad (12)$$

$$\hat{\Phi}_{in} = r^m, \quad \hat{\Phi}_{ex} = \frac{r^m - b^{2m} r^{-m}}{1 - (b/a)^{2m}}, \quad (13)$$

こゝで, $\hat{\Phi}, \hat{\Phi}$ は $r=0, r=b$ で各々 0, 又 $r=a$ で内部解と外部解が等しくなるという条件を用いた。更に γ を決めるために, (9)式を空間積分した次式,

$$\gamma \left[P \frac{d\hat{\Phi}}{dr} \right]_{a-b}^{a+b} = \left[F \frac{d\hat{\Phi}}{dr} \right]_{a-b}^{a+b} - \frac{m}{a} [J\hat{\Phi}]_{a-b}^{a+b}, \quad (14)$$

(12), (13) 式の解を代入すれば、次の分散関係式が求まる。

$$\gamma^2 = \left[1 + \frac{P_{ex}}{P_{in}} \cdot \frac{1 + (a/b)^{2m}}{1 - (a/b)^{2m}} \right]^{-1} \gamma_{analy.}^2, \quad (15)$$

$$\gamma_{analy.}^2 = \left(\frac{B_{0a}}{a} \right)^2 \frac{2}{P_{in}} (m - nq_{0a}) \left(1 - \frac{m - nq_{0a}}{1 - (a/b)^{2m}} \right), \quad (16)$$

(16)式は、シャワウ17が解析的に導いた一様電流の場合のキークモードの成長率⁶⁾2) 外部に高抵抗領域のあるモデルアウズマの成長率, (15)式, は $P_{ex}/P_{in} \rightarrow 0$ で、このシャワウ17の成長率に一致する。更に $P_{ex}/P_{in} = 1$ の場合でも、この値に $(1 - (a/b)^{2m})/2$ の因子がかかるだけで、キークモードを表現していることは明らかである。ここまでの解析的な取扱いでは、 J, η, P の関数形は、Fig. 2 のようなステップ関数でよいが、数値計算の場合は、この空間微分を数値的に表現するためには、アウズマ境界に於いてもある程度の滑らかさを必要とする。そこで従来の関数形 $f_i(r)$ に適当な滑らかさをもった Shaping 関数 $S_i(r)$ をかけ合わせた数値解析用の関数を考える。即ち

$$J(r) = f_J(r) S_J(r), \quad (17)$$

$$P(r) = f_P(r) S_P(r), \quad (18)$$

$$\eta(r) = f_\eta(r) S_\eta^{-1}(r), \quad (19)$$

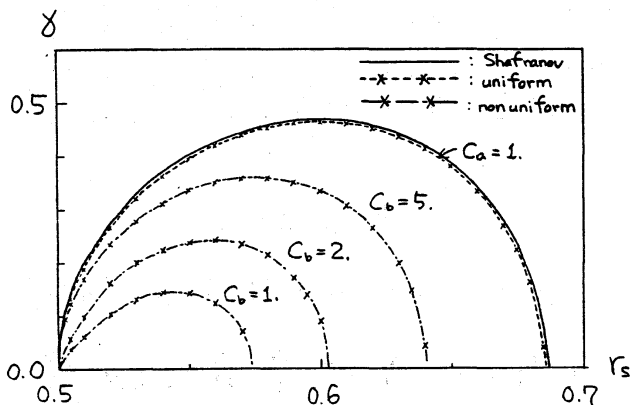
$$f_i(r) = \begin{cases} (1-C_a)\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^{2C_b}\right]^{C_c} + C_a & ; 0 \leq r \leq a \\ C_a & ; a \leq r \leq b \end{cases}, \quad (20)$$

$$S_i(r) = \begin{cases} (1-C_\alpha)\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}(\tan^{-1}\chi_y-\beta\chi_y)\right]+C_\alpha & ; 0 \leq r \leq a-C_y, \\ (1-C_\alpha)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}(\tan^{-1}\chi-\beta\chi)\right]+C_\alpha & ; a-C_y \leq r \leq a+C_y, \\ (1-C_\alpha)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}(\tan^{-1}\chi_y-\beta\chi_y)\right]+C_\alpha & ; a+C_y \leq r \leq b, \end{cases} \quad (21)$$

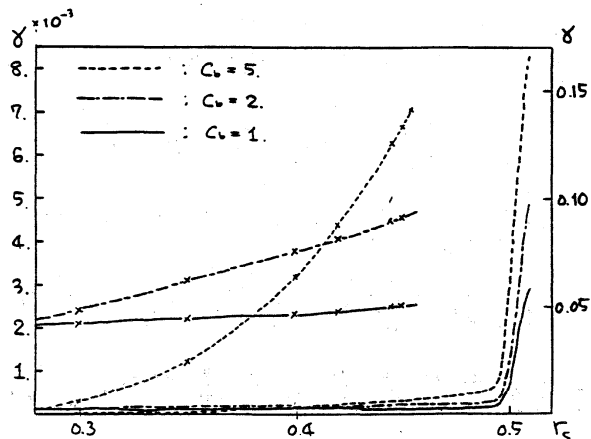
$$\text{ここで} \quad \chi = \pi \cdot \frac{r-a}{C_\beta}, \quad \beta = \frac{1}{1+\chi_y^2}, \quad \chi_y = \pi \cdot \frac{C_y}{C_\beta}. \quad (22)$$

$S_i(r)$ は、 $r=a$ を中心に $2C_y$ の幅で滑らかに減少し、その両外側では一定となる関数である。以下、この数値解に用いた関数を平衡量として使い、(9)、(10)式を固有値問題として解いた線形計算の結果について述べる。

オ3図は成長率 γ の r_s (特異点の位置) 依存性を表わしたグラフである。実線は(16)式のシャフウノフによる解析的値で、数値計算による値(点線)は、これによく合っている。3本の一点鎖線は、分布電流の場合の成長率で、シエラによる安定化



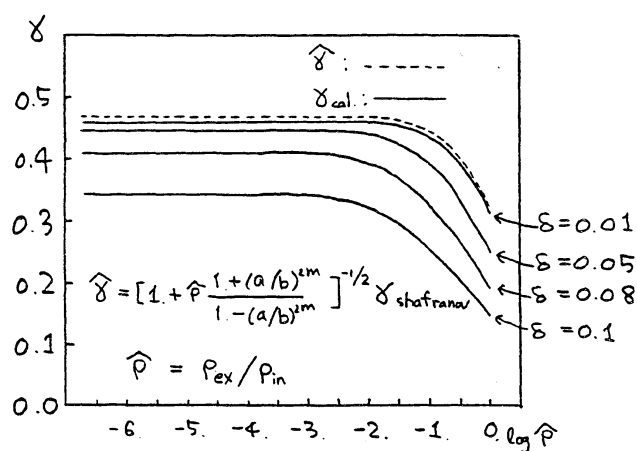
オ3図



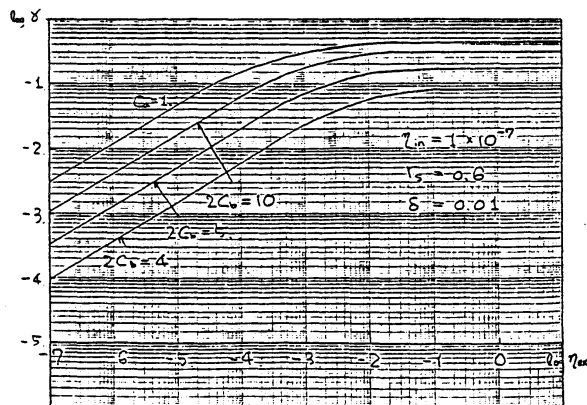
オ4図

の効果が表わされており又この分布電流の場合には、 r_s がプラズマ内部にある場合、プラズマ抵抗が内部でも有限であることからテアリニグ・モードが不安定となる。(第4図) 計算パラメータは、各々 $\eta_{in} = 10^{-7}$, $\eta_{ex} = 1$, $P_{in} = 1$, $P_{ex} = 10^{-3}$, $J_{ex}/J_{in} = 10^{-7}$, $\delta (=2C_s) = 0.01$, $a/b = 0.5$ とした。

第5図に γ の P_{ex} 依存性を示す。点線は(15)式の解析的な値を、又実線は δ を変えた時の数値計算による成長率で、 δ が十分に小さい ($\delta < 0.01$) 時は、解析的な値によく合、 δ が増えるにつれて γ が大きくなり、 δ が大きくなると電流が境界付近で分布をもつようになるため、一様電流分布の仮定が成立し、解析的な値からあれてくる。計算パラメータは、 $J_{ex}/J_{in} = 10^{-7}$, $P_{in} = 1$, $r_s = 0.6$, $a/b = 0.5$, $C_a = 1$ とした。



第5図



第6図

次に第6図に γ の η_{ex} 依存性を示す。上から一様電流、3種類の分布電流の成長率を示すが、いずれも η_{ex} が充分大きい時の値は、その η_{ex} の値に依らずキエリ・モードの α - γ とな

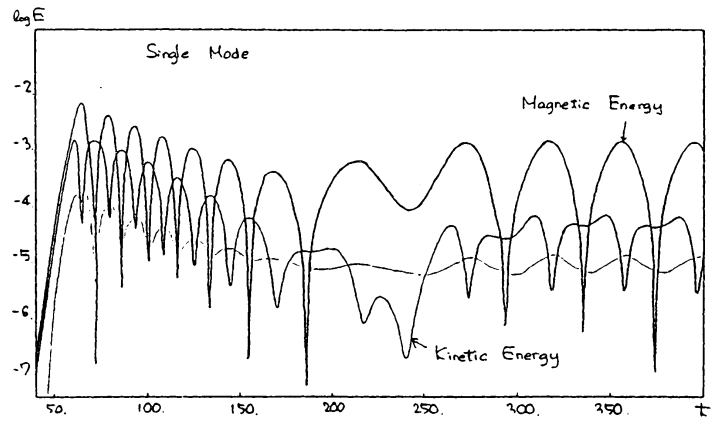
2 いるが η_{ex} の値が小さくなるに従い、2. それの η_{ex} 依存性は $\eta^{3/4}$ となり通常のテアリニグ・モード⁷⁾ の成長率となる。従って η_{ex} の値によつて、2. キニク・モードからテアリニグ・モードに移り、2 いることが示されている。この場合の計算パラメータは、 $J_{in} = 10^{-7}$, $P_{in} = 1$, $P_{ex} = 10^{-3}$, $r_s = 0.6$, $a/b = 0.5$, $\delta = 0.01$ とした。

以上、この章では、線形解析を行い、高抵抗モデルが自由境界キニク・モードを充分よく表現することを解析的、及び数値解析的に示した。数値計算は、 r 方向のメッシュ数、 I_{max} , は、201 から 401 とし、 r 方向の表面付近で密となる非等間隔メッシュを使い、2. $(m, n) = (2, 1)$ モードを対象とした。

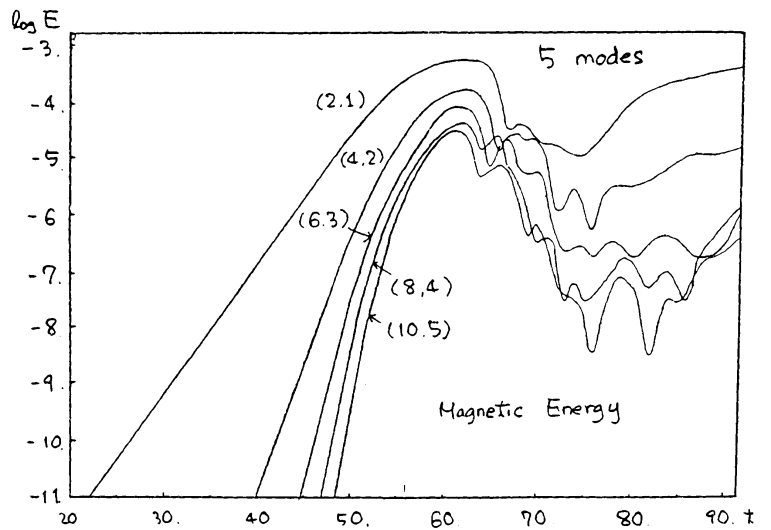
§.5 非線形計算

(9), (10) 式を固有値問題として解く線形の解析では、アルファ₀ = 速度; $v_0 = B/\sqrt{\rho}$ の大きさは問題とならないが、(1)~(3) 式を時間積分して解く非線形の計算では、その大きさが時間ステップ Δt , の大きさの上限を決めるので、計算時間の制約から $P_{ex}/P_{in} = 1$. とおき、 r 方向の密度は、中心 ($r=0$) からシェル ($r=b$) まで一様と仮定する。この場合でも自由境界キニク・モードが充分表現されていることは、前章の解析で明らかである。非線形の計算は、(1)~(3) 式を時間積分しなければならぬが、まずその第一段階として $\eta = \text{const.}$ 即ち (1), (2)

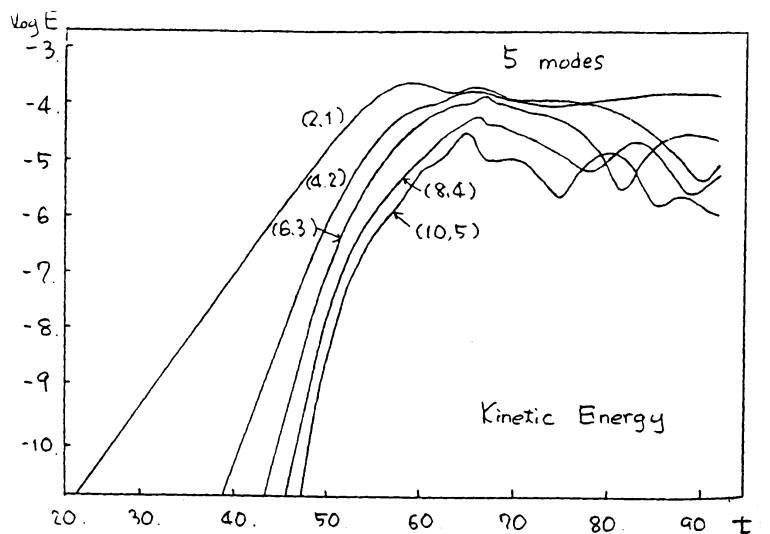
式のみを時間積分ある計算を行う。カ7図は1モードの場合の磁場エネルギーと運動エネルギーの時間変化を示す。このグラフから、磁場エネルギーと運動エネルギーが互にそのエネルギーを交換して各々振動し飽和していることがわかる。カ8図とカ9図は、5モードにした場合の磁場エネルギーと運動エネルギーの時間変化を示したものの2。1モードの場合と、時間スケールが異なり、2モード数が増えたために多少複雑なふるまいにはなっているが、本質的には、1モードの時と



カ7図



カ8図



カ9図

同じ振幅解となつてゐる。飽和レベルは、1モードの時に比べ
 て、低くなつてゐるが、これは1モードの計算は、over shoot
 して大きめの値になつてゐることを示してゐる。更にモー
 ド数を多にした(10モード)計算結果は、5モードの場合と
 比べて殆んど変化なく、モード数は、5で充分と思われる。
 この非線形計算の計算パラメータは、 $\eta_{ex} = 1$, $\eta_{in} = 10^{-4}$,
 $P_{in} = P_{ex} = 1$, $a/b = 0.5$, $\delta = 0.05$, $r_s = 0.6$,
 $I_{max} = 201$, $\Delta t = 0.02$ とした。

§.6 おわりに

現在、フラスコの境界を決めるため、 η の式(3)式を同
 時に解く計算を行つてゐる。ここまでの計算は、円筒配位で
 2次元(単一ヘリシテリ)の計算であるが、次にトーラス配位
 で3次元の計算を行い、円筒配位で飽和してゐたモードが、
 どのような影響を受けるかを調べる予定である。

参考文献

- 1) B.V. Waddell, B. Carreras, H.R. Hicks, J.A. Holmes and D.K. Lee, Phys. Rev. Lett. 41, (1978) 1386.
- 2) G. Kurita, M. Azumi, T. Tuda, T. Takizuka, T. Tsunematsu, S. Tokuda, K. Itoh and T. Takeda, JAERI-M 9788 (1981).
- 3) A. Sykes and J.A. Wesson, Phys. Rev. Lett., 44, (1980) 1215.
- 4) P.H. Rutherford, H.P. Furth and M.N. Rosenbluth, in Proceedings of Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, IAEA (Vienna 1971) vol. II p.539.
- 5) K. Itoh, Ph. D. Thesis (1979).
- 6) V.D. Shafranov, Sov. Phys., Tech. Phys. 15, (1970) 175.
- 7) H.P. Furth, P.H. Rutherford and H. Selberg, Phys. Fluids 16, (1973) 1054.